



**UNIVERSITÄT ZU LÜBECK**

**Aus dem Institut für Mathematik  
der Universität zu Lübeck  
Direktor: Prof. Dr. Jürgen Prestin**

**Erkennung richtungsbezogener Singularitäten mit  
trigonometrischen Shearlets**

Inauguraldissertation  
zur  
Erlangung der Doktorwürde  
der Universität zu Lübeck

Aus der Sektion Informatik/Technik

vorgelegt von  
Kevin Schober  
aus Lübeck

Lübeck, 2021

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Jürgen Prestin

2. Berichterstatterin: Prof. Dr. Gerlind Plonka-Hoch

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 2021

Zum Druck genehmigt. Lübeck, den 12. Juli 2021

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	5
1.1 Räume differenzierbarer Funktionen	7
1.2 Muster und erzeugende Mengen	11
1.3 Fourier-Analysis	14
1.4 Dyadische periodische Multiskalenanalyse	18
1.5 Integraldarstellungen und Fresnel-Integrale	21
2 Richtungsabhängige trigonometrische Polynome	27
2.1 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen	28
2.2 Multiple dyadische Waveletzerlegungen	32
2.3 Richtungsspezifische Zerlegungspfade	34
3 Trigonometrische Shearlets	45
3.1 Konstruktion und Vergleich zu klassischen Shearlets	46
3.2 Frequenz-Lokalisierung	52
3.3 Orts- und Richtungs-Lokalisierung	58
3.4 Frame-Eigenschaften	66
4 Detektion von Singularitäten	85
4.1 Hauptresultate	86
4.2 Zerlegung von Funktionen auf dyadischen Quadraten	89
4.3 Beweis von Theorem 4.1	95
4.4 Lokalisierungslemmata	99
4.5 Beweis von Theorem 4.2	111
Literaturverzeichnis	121

Abbildungsverzeichnis	125
Lebenslauf	126

# Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen trigonometrische Shearlets, welche auf der Theorie dyadischer de la Vallée Poussin-artiger Waveletfunktionen basieren. Trigonometrische Shearlets sind richtungsabhängige trigonometrische Polynome. In dieser Arbeit werden verschiedene Eigenschaften dieser Funktionen hergeleitet und die anisotrope Orts-Frequenz-Lokalisierung zur Detektion von Singularitäten entlang von Kantenkurven Cartoon-ähnlicher periodischer Funktionen genutzt.

Im ersten Kapitel werden alle benötigten theoretischen Grundlagen dieser Arbeit gelegt. Dies umfasst die Notation und Eigenschaften multivariater differenzierbarer Funktionen, die Begriffe Muster und erzeugende Menge sowie grundlegende Definitionen und Resultate der Fourier-Analyse. Die dyadische periodische Multiskalenanalyse bildet den Grundstein der nachfolgenden Kapitel und ermöglicht die Zerlegung translationsinvarianter Räume bezüglich der Musterpunkte einer Matrix in die direkte Summe eines Skalierungs- und eines Waveletraums.

Im zweiten Kapitel werden dyadische de la Vallée Poussin-artige Skalierungs- und Waveletfunktionen basierend auf mehrdimensionalen Indexmengen eingeführt. Diese ermöglichen die kompakte Notation multipler dyadischer Waveletzerlegungen. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden richtungsspezifische Zerlegungen für eine spezielle Wahl dyadischer Dilatationsmatrizen untersucht und der Zusammenhang zur geometrischen Ausrichtung der auftretenden Trägermengen im Frequenzbereich hergestellt.

Das dritte Kapitel befasst sich mit trigonometrischen Shearlets, welche aus der Konstruktion des zweiten Kapitels hervorgehen. Neben der Einordnung dieser Funktionen im Vergleich zu den klassischen diskreten Kegel-Shearlets, werden Richtungs- und Lokalisierungseigenschaften im Frequenz- und Ortsbereich sowie Frame-Eigenschaften im Hilbertraum  $L_2(\mathbb{T}^2)$  bewiesen.

Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit werden zwei Hauptresultate über die Detektion von Unstetigkeiten in den Richtungsableitungen höherer Ordnung von Cartoon-ähnlichen periodischen Funktionen formuliert. Die Theoreme besagen, dass die inneren Produkte dieser Funktionen mit trigonometrischen Shearlets genau dann vernachlässigbar klein werden, wenn das jeweilige Shearlet nicht hinreichend nah an der Kantenkurve lokalisiert ist oder nicht entlang der Kantenkurve orientiert ist. Für den Beweis der Hauptresultate werden die Zerlegung von Funktionen auf dyadischen Quadraten und eine Reihe von Lokalisierungslemmata benötigt, die ebenfalls im letzten Kapitel hergeleitet und bewiesen werden.



# Einleitung

In der heutigen Zeit spielt die Verarbeitung von digitalen Bildern in vielen industriellen oder medizinischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Eine zentrale Aufgabe ist dabei die automatisierte Abgrenzung und Unterscheidung verschiedener Bildbereiche. Dies führt zu der Notwendigkeit, Übergänge beziehungsweise Kanten in Bildern möglichst präzise und effektiv zu erkennen. Kanten sind dadurch charakterisiert, dass Grau- oder Farbwerte eines digitalen Bildes in ihrer Nähe starken Änderungen unterliegen. Durch die Approximation der partiellen Ableitungen erster oder höherer Ordnung in einem Bildpunkt wird anhand der Größe der entsprechenden diskreten Gradienten entschieden, ob ein Punkt zur Kantenmenge gehört oder nicht. Die Probleme an diesen Ansätzen sind die bevorzugte Erkennung von Kanten entlang der Koordinatenachsen und die hohe Empfindlichkeit gegenüber Rauschen, weshalb die Bilder häufig vor der Anwendung von Kantenoperatoren geglättet werden müssen. Ein weit verbreiteter Algorithmus zur Kantendetektion in digitalen Bildern ist der Canny-Algorithmus [9]. In diesem Verfahren werden zunächst Kantenoperatoren auf geglätteten Bildern angewendet und im Anschluss die gefundene Kantenmenge durch die Unterdrückung nichtlokaler Maxima und die Aussortierung zu schwacher Kanten, genannt Hysterese, verfeinert.

Es ist bekannt [47, 48], dass der Canny-Algorithmus äquivalent dazu ist, die lokalen Maxima einer zweidimensionalen Wavelet-Transformation zu finden. Der Begriff Wavelet ist die Übersetzung des französischen Begriffs *ondelette* ('kleine Welle') und wurde zunächst im Zusammenhang der kontinuierlichen Wavelet-Transformation einer Funktion, unter anderem von Grossmann und Morlet [27], verwendet. Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre wurde die diskrete Wavelet-Transformation mit schnellen Algorithmen basierend auf den Arbeiten von Daubechies [14], Meyer [50] und Mallat [45, 46] eingeführt. Der entscheidende Begriff ist dabei die Multiskalenanalyse, welche eine Folge verschachtelter und durch die Verschiebungen einer Skalierungsfunktionen aufgespannter Vektorräume mit speziellen Eigenschaften bezeichnet. Die Unterschiede von einem zum anderen Skalierungsraum werden durch die Waveleträume und deren erzeugenden Funktionen, genannt Wavelets, beschrieben. Eine der herausragenden Eigenschaften der Wavelets ist ihre gute Orts-Frequenz-Lokalisierung. Aus diesem Grund liefern eindimensionale Wavelets optimale Approximationsraten für Funktionen, die abseits von Punktsingularitäten überall glatt sind [17].

Unter anderem in [14, 46, 50] wurden mehrdimensionale Wavelets konstruiert, die aus dem Tensorprodukt eindimensionaler Skalierungs- und Waveletfunktionen hervorgehen. In höheren Dimensionen verlieren Wavelets ihre optimalen Approximationseigenschaften, da Singularitäten nicht nur punktweise, sondern entlang von Kanten verlaufen können [46]. Durch die Tensorprodukt-Struktur sind mehrdimensionale Wavelets aufgrund ihrer Ausrichtung entlang der Koordinatenachsen nicht dazu in der Lage, Singularitäten entlang von Kanten in beliebige Richtungen hinreichend gut zu erfassen.

Es wurden eine Vielzahl verschiedener Ansätze entwickelt, um das Problem der fehlenden Richtungssensibilität klassischer mehrdimensionaler Wavelets zu überwinden. Dazu zählen

unter anderem Brushlets [49], Ridgelets [8], Curvelets [7, 26], Contourlets [18] oder komplexe Wavelets [58]. Insbesondere die Resultate in [7] erregten Aufmerksamkeit, denn im Vergleich zu mehrdimensionalen Wavelets ermöglichen Curvelets die essentiell-optimale spärliche Approximation Cartoon-ähnlicher Funktionen. Eine weitere Konstruktion, die aus der Theorie der zusammengesetzten Wavelets [35] hervorgeht, sind die Shearlets. Diese wurden in zwei oder mehr Dimensionen von verschiedenen Autoren beispielsweise in [13, 28, 38] eingeführt. Der große Vorteil von Shearlets ist, dass sie durch die Anwendung von Skalierungs- und Scherungsmatrizen affine Systeme im  $\mathbb{R}^d$  bilden und dadurch viele günstige Eigenschaften besitzen. So ermöglichen Shearlets als einziges der genannten Systeme eine vereinheitlichte Theorie im kontinuierlichen und diskreten Fall, was sie besonders interessant für die Anwendung in der Praxis macht.

Kontinuierliche Shearlets können auf unterschiedliche Arten konstruiert werden, einerseits mit kompaktem Träger im Frequenz- [28] oder mit kompaktem Träger im Ortsbereich [40]. Eine der wichtigsten Eigenschaften kontinuierlicher Shearlets ist die Erkennung von Singularitäten, die nicht in einem Punkt, sondern entlang von Kanten in beliebiger Richtung verlaufen. Sowohl für den Fall des kompakten Trägers im Frequenzbereich [25, 30, 34, 39] als auch im Ortsbereich [41] konnte für verschiedene Arten von Singularitäten gezeigt werden, dass sich die Lage und Orientierung der Kanten, entlang derer die Unstetigkeiten einer Funktion verlaufen, exakt in dem Abklingverhalten der Shearlet-Koeffizienten widerspiegelt.

Diskrete Shearlets entstehen durch die geeignete Abtastung der Parameter der kontinuierlichen Shearlet-Transformation [37]. Die Resultate für kontinuierliche Shearlets wurden in [65] als theoretische Grundlage genutzt, um Kanten in Bildern mit diskreten Shearlets zu erkennen. In [31] wurde erstmals gezeigt, dass eine analoge Aussage zum kontinuierlichen Fall für die Erkennung von Singularitäten entlang von Kanten mit diskreten Shearlets angegeben werden kann. Dieselben Autoren konnten zuvor das Resultat aus [7] über die essentiell-optimale spärliche Approximation mit Curvelets auf den Fall diskreter Shearlets übertragen. Darüber hinaus wurde diese Eigenschaft beispielsweise für dreidimensionale [32] und zylindrische Shearlets [20] gezeigt. Wie bereits erwähnt, entstammen Shearlets aus der allgemeineren Theorie der zusammengesetzten Wavelets [35]. Aus dieser geht hervor, dass diskrete Shearlet-Systeme [28, 38] durch die Forderung gewisser Eigenschaften an die erzeugenden Funktionen einen Parseval-Frame des Hilbertraums  $L_2(\mathbb{R}^2)$  bilden.

Von vielen gemessenen Signalen ist bekannt, dass diese sich periodisch wiederholen. Im eindimensionalen Fall können diese Signale häufig als periodische Funktionen aufgefasst werden, die außer in Punktsingularitäten überall hinreichend glatt sind. Deshalb spielen die Informationen über die Lokalisierung und Ordnung von Singularitäten in zahlreichen Anwendungen der Signalverarbeitung eine zentrale Rolle. Das Problem der Bestimmung von Unstetigkeiten eindimensionaler periodischer Funktionen, deren Fourier-Koeffizienten bekannt sind, wurde von einer Reihe von Autoren behandelt und mit verschiedenen Ansätzen gelöst [2, 21, 22, 60, 64].

Basierend auf translationsinvarianten Räumen und periodischen Multiskalenanalysen wurden eindimensionale periodische Wavelets in [36, 52, 53, 55] konstruiert. Der große Vorteil im periodischen Fall ist, dass die resultierenden Zerlegungs- und Rekonstruktionsalgorithmen durch die schnelle Fourier-Transformation effektiv umgesetzt werden können. In [51]

---

konnte mit Wavelet-ähnlichen Konstruktionen gezeigt werden, dass Sprung-Unstetigkeiten in den Ableitungen höherer Ordnung eindimensionaler periodischer Funktionen detektiert werden können.

In [23, 24, 44] wurden eindimensionale periodische Wavelets mit analogen Konzepten auf den multivariaten Fall erweitert. Aufbauend auf diesen Arbeiten konstruierten die Autoren in [43] multivariate dyadische Dirichlet-Skalierungsfunktionen mit den dazugehörigen Dirichlet-Wavelets. In [4, 5] wurden diese zu dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen verallgemeinert. Diese Funktionen sind trigonometrische Polynome und die Allgemeinheit der Konstruktion erlaubt dabei die Fensterfunktionen im Frequenzbereich, durch deren Abtastung die Fourier-Koeffizienten der Skalierungs- und Waveletfunktionen entstehen, beliebig glatt zu wählen. Daraus resultiert eine verbesserte Lokalisierung der Funktionen im Ortsbereich im Vergleich zum Dirichlet-Fall aus [43]. Darüber hinaus ist es möglich, beliebige Matrizen mit Determinante 2, insbesondere Scherungsmatrizen, für die Zerlegung der Skalierungsräume im Rahmen einer periodischen Multiskalenanalyse zu verwenden. Dies ermöglicht eine Vielzahl verschiedener anisotroper Zerlegungen zur Untersuchung richtungsbezogener Eigenschaften von Funktionen.

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich wie folgt:

In [Kapitel 1](#) werden die wichtigsten Konzepte für den späteren Verlauf dieser Arbeit eingeführt. Dies umfasst in den ersten drei Abschnitten die Notation und einige spezielle Resultate über multivariate differenzierbare Funktionen, die Begriffe Muster und erzeugende Menge bezüglich einer Matrix sowie grundlegende Definitionen und Resultate der Fourier-Analyse. Dabei ist die diskrete Fourier-Transformation auf Mustern das zentrale Werkzeug, um die Waveletzerlegung einer Funktion mit einer dyadischen periodischen Multiskalenanalyse in [Abschnitt 1.4](#) zu beschreiben. Darüber hinaus ist die Poisson-Summationsformel in [Theorem 1.13](#) als Verbindung von Fourier-Reihen und Fourier-Transformation ein wichtiges Hilfsmittel für die Beweise von [Theorem 3.12](#), [Theorem 4.1](#) und [Theorem 4.2](#) im späteren Verlauf der Arbeit. Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels werden zwei wichtige Hilfsresultate für die Beweise in [Abschnitt 4.4](#) basierend auf dem Integralsatz von Gauß beziehungsweise Fresnel-Integralen bewiesen.

Die Konstruktion multipler dyadischer Waveletzerlegungen steht im Mittelpunkt von [Kapitel 2](#). Ausgangspunkt sind die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen aus [4], welche in [Abschnitt 2.1](#) mit einer Notation bezüglich mehrdimensionaler Indexmengen definiert werden. Damit können multiple dyadische Waveletzerlegungen in [Abschnitt 2.2](#) ähnlich zu den Betrachtungen in [56] kompakt angegeben und als Baumdiagramme visualisiert werden. In [Abschnitt 2.3](#) werden die Zerlegungen für eine spezielle Wahl der dyadischen Dilatationsmatrizen betrachtet. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Wahl des Zerlegungspfades und der geometrischen Ausrichtung der erzeugenden Mengen hergestellt, die den Fourier-Koeffizienten der jeweiligen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen entsprechen. Dies ermöglicht richtungsbezogene Zerlegungen einer Funktion, kontrolliert durch die Ausrichtung der erzeugenden Mengen im Frequenzbereich.

[Kapitel 3](#) befasst sich mit den namensgebenden Funktionen dieser Arbeit, den trigonometrischen Shearlets. Diese Funktionen sind trigonometrische Polynome, deren Koeffizienten aus

der Abtastung spezieller zweidimensionaler Fensterfunktionen hervorgehen. In [Abschnitt 3.1](#) wird neben der Konstruktion auch der Zusammenhang zwischen trigonometrischen Shearlets und den multiplen dyadischen Waveletzerlegung aus [Abschnitt 2.3](#) hergestellt. Im Anschluss werden Parallelen und Unterschiede zu den klassischen diskreten Kegel-Shearlets aufgezeigt. In [Abschnitt 3.2](#) wird die Form der Trägermengen der zweidimensionalen Fensterfunktionen untersucht und in [Lemma 3.7](#) exakt beschrieben. Das zentrale Resultat aus [Abschnitt 3.3](#) ist [Theorem 3.12](#), welches das Abklingverhalten der trigonometrischen Shearlets im Ortsbereich in Abhängigkeit von der Verschiebung auf den Musterpunkten und der Orientierung der Trägermengen im Frequenzbereich angibt. Zusammen zeigen die Resultate aus [Abschnitt 3.2](#) und [Abschnitt 3.3](#) die gute Orts-, Richtungs- und Frequenz-Lokalisierung der trigonometrischen Shearlets und bilden die Grundlage der Beweise im letzten Kapitel. Als weiteres wichtiges Resultat dieses Kapitels wird in [Theorem 3.17](#) mit einer Reihe von Hilfsresultaten gezeigt, dass Funktionensysteme trigonometrischer Shearlets einen Frame des Hilbertraums  $L_2(\mathbb{T}^2)$  bilden.

Das abschließende Kapitel dieser Arbeit widmet sich der Frage, ob trigonometrische Shearlets dazu in der Lage sind, Unstetigkeiten in den Richtungsableitungen höherer Ordnung von Cartoon-ähnlichen Funktionen zu detektieren. Für den Fall charakteristischer Funktionen wurde dies bereits in [\[57\]](#) bewiesen und anhand numerischer Beispiele visualisiert. Die beiden Hauptresultate aus [Abschnitt 4.1](#) geben entsprechende obere und untere Schranken für die inneren Produkte, genannt Shearlet-Koeffizienten, von Funktionen mit Sprung-Unstetigkeiten in Richtungsableitungen höherer Ordnung mit trigonometrischen Shearlets an. Die Resultate implizieren, dass die Shearlet-Koeffizienten genau dann hinreichend klein werden, wenn das jeweilige verschobene Shearlet nicht nah genug an der Kantenkurve lokalisiert ist oder nicht entlang der Kantenkurve orientiert ist. Im nachfolgenden [Abschnitt 4.2](#) werden wichtige Hilfsresultate für den Beweis von [Theorem 4.1](#) durch die Zerlegung einer Funktion auf dyadischen Quadraten hergeleitet. Dabei unterscheiden sich die Abschätzungen abhängig davon, ob die Kurve, entlang der die Singularität verläuft, das jeweilige Quadrat schneidet oder nicht. [Abschnitt 4.4](#) umfasst unter anderem die Beweise zweier Lokalisierungslemmata über die Größe gewisser Integrale in Abhängigkeit der Lokalisierung und Orientierung der trigonometrischen Shearlets. Mit diesen Resultaten kann schließlich die obere Schranke aus [Theorem 4.2](#) in [Abschnitt 4.5](#) bewiesen werden.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Jürgen Prestin, der es mir ermöglicht hat, diese Dissertation zu verfassen. Er nahm sich stets Zeit, um Fragen zu beantworten, wodurch viele der aufgetretenen Probleme gelöst werden konnten. Seine intensive Betreuung mit vielen Diskussionen und Denkanstößen haben maßgeblich zur Vollendung dieser Arbeit beigetragen. Des Weiteren danke ich meiner Familie, meiner Freundin Mira und Hugo für all die Geduld und Unterstützung während des Verfassens dieser Dissertation.

# 1

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Konzepte dieser Arbeit eingeführt und erläutert. [Abschnitt 1.1](#) befasst sich mit multivariaten differenzierbaren Funktionen. Neben den Notationen bezüglich partieller Differenzierbarkeit und Richtungsableitungen höherer Ordnung sowie der Einführung der entsprechenden Funktionenräume, werden wichtige Differentialoperatoren für den späteren Verlauf betrachtet. Zum Ende des Abschnitts werden sternförmige Mengen und darauf aufbauend die Funktionenklasse der sogenannten Cartoon-ähnlichen Funktionen eingeführt.

In [Abschnitt 1.2](#) werden die Begriffe Muster und erzeugende Menge ausgehend von multivariaten Restklassen eingeführt. Das Muster bezüglich einer Matrix verallgemeinert äquidistant verteilte Punkte in einem Intervall in das Mehrdimensionale, wohingegen die Elemente der entsprechenden erzeugenden Mengen im weiteren Verlauf der Arbeit als spezielle Punktemengen im Frequenzraum angesehen werden können. Im Vergleich zu den Betrachtungen aus [\[4, 43\]](#) wird in diesem Abschnitt auf die ausführliche Untersuchung der algebraischen Eigenschaften verzichtet und lediglich die für diese Arbeit relevantesten Ergebnisse angegeben. Insbesondere [Lemma 1.4](#), welches bereits in [\[43\]](#) bewiesen wurde, spielt für den weiteren Verlauf der Arbeit eine zentrale Rolle. Durch die Faktorisierung der zugrunde liegenden Matrix können Muster in Teilmuster zerlegt werden. Die Beobachtung, dass die zugehörigen erzeugenden Mengen für zwei identische Muster nicht übereinstimmen müssen, bildet die Grundlage anisotroper Waveletzerlegungen von Funktionen mit verschiedenen Richtungspräferenzen im Frequenzbereich.

Die für diese Arbeit wichtigsten Begriffe und Resultate der Fourier-Analyse werden in [Abschnitt 1.3](#) vorgestellt. Neben der Definition der Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihen zur Darstellung periodischer Funktionen wird die diskrete Fourier-Transformation auf Mustern eingeführt. Das Pendant zur Theorie der Fourier-Reihen für periodische Funktionen bildet die Fourier-Transformation für integrierbare Funktionen, die ihren Definitionsbereich auf der gesamten reellen Achse haben. Nach der Definition der Fourier-Transformation werden in [Lemma 1.9](#) und [Lemma 1.10](#) wichtige Eigenschaften im Orts- und Frequenzbereich angegeben. Der letzte Teil des Abschnitts widmet sich der Verknüpfung von Fourier-Reihen und Fourier-Transformation durch die Poisson-Summationsformel in [Theorem 1.13](#). Diese spielt eine zentrale Rolle und bildet jeweils den Ausgangspunkt der Beweise von [Theorem 3.12](#), [Theorem 4.1](#) und [Theorem 4.2](#) in den nachfolgenden Kapiteln.

Die Betrachtung translationsinvarianter Räume bezüglich der Musterpunkte einer Matrix bildet den Ausgangspunkt von [Abschnitt 1.4](#) und wurde in diesem Kontext bereits in [\[4](#),

43] untersucht. Durch die sukzessive Faktorisierung einer Matrix mit dyadischen Dilatationsmatrizen lässt sich eine Folge von verschachtelten Skalierungsräumen erzeugen, die in [Definition 1.16](#) als nichtstationäre anisotrope dyadische periodische Multiskalenanalyse bezeichnet wird. Jeder Skalierungsraum kann als direkte Summe des vorherigen Skalierungsraums mit einem weiteren Raum, genannt Waveletraum, geschrieben werden. Eine Konstruktionsmöglichkeit der zugehörigen Waveletfunktionen, welche den Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Skalierungsräumen beschreiben, wird in [Lemma 1.17](#) angegeben. Der restliche Teil des Abschnitts folgt den Betrachtungen aus [4, Abschnitt 1.5] und gibt konkrete Formeln der Wavelet-Synthese und Wavelet-Analyse einer Funktion basierend auf den diskreten Fourier-Koeffizienten der auftretenden Funktionen an.

Der abschließende [Abschnitt 1.5](#) befasst sich mit der Herleitung wichtiger Resultate für die Beweise in [Abschnitt 4.4](#). Ausgehend vom klassischen Integralsatz von Gauß wird eine explizite Formel für die Fourier-Transformation des Produkts eines bivariaten Polynoms vom Grad  $L$  mit einer charakteristischen Funktion in [Lemma 1.18](#) angegeben. Dabei stellt sich heraus, dass die Richtungsableitungen  $m \leq L$ -ter Ordnung des Polynoms in den entstehenden Integralen über den Rand der charakteristischen Funktion auftreten. Im zweiten Teil des Abschnitts werden Fresnel-Integrale eingeführt und wichtige Abschätzungen für den späteren Verlauf in [Lemma 1.19](#) angegeben und bewiesen.

Im Folgenden wird die Dimension, wenn nicht anders vermerkt, für den Rest der Arbeit auf  $d = 2$  festgelegt und zweidimensionale Vektoren mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  bezeichnet. Für den Fall, dass beide Einträge aus natürlichen Zahlen, natürlichen Zahlen einschließlich der Null, ganzen Zahlen oder reellen Zahlen bestehen, ist der Vektor  $\mathbf{x}$  ein Element des Raumes  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{N}_0^2$ ,  $\mathbb{Z}^2$  beziehungsweise  $\mathbb{R}^2$ . Darüber hinaus definieren wir zwei spezielle Vektoren durch  $\mathbf{0} := (0, 0)^T \in \mathbb{N}_0^2$  und  $\mathbf{1} := (1, 1)^T \in \mathbb{N}^2$ . Für zweidimensionale Vektornormen verwenden wir die Notation

$$|\mathbf{x}|_p := \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\}, & \text{falls } p = \infty, \end{cases} \quad (1.1)$$

und definieren das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  durch  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2$ . Für die Darstellung eines Vektors  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten schreiben wir im Folgenden  $\boldsymbol{\xi} = \rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)$  mit  $\rho := |\boldsymbol{\xi}|_2$  und  $\boldsymbol{\Theta}(\theta) := (\cos \theta, \sin \theta)^T$ . Bei binären Relationen und Exponenten von Vektoren wird die Notation  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ , falls  $x_1 \leq y_1$  und  $x_2 \leq y_2$  sowie  $\mathbf{x}^{\mathbf{y}} := x_1^{y_1} x_2^{y_2}$  und  $\mathbf{x}^\lambda := \mathbf{x}^{\lambda \mathbf{1}} = x_1^\lambda x_2^\lambda$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  verwendet. Des Weiteren nutzen wir für  $\mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}$  die Schreibweise  $\mathbf{k}! := k_1! k_2!$  sowie

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} := \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!(\mathbf{n} - \mathbf{k})!} = \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2}, \quad \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} := \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!}$$

mit dem üblichen eindimensionalen Binomialkoeffizienten und es gilt der binomische Lehrsatz

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k} = \sum_{|\mathbf{k}|_1=n} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}. \quad (1.2)$$

Für  $\varepsilon > 0$  definieren wir die  $\varepsilon$ -Umgebung um einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  durch

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_2 < \varepsilon\}$$

## 1.1 Räume differenzierbarer Funktionen

---

und bezeichnen die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion einer Menge  $T \subset \mathbb{R}^2$  mit

$$\chi_T(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{x} \in T, \\ 0, & \text{falls } \mathbf{x} \notin T. \end{cases}$$

Matrizen von der Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

werden ebenfalls fett gedruckt und zur Unterscheidung von Vektoren groß geschrieben. Falls sämtliche Einträge der Matrix  $\mathbf{M}$  aus natürlichen Zahlen, natürlichen Zahlen einschließlich der Null, ganzen Zahlen oder reellen Zahlen bestehen, schreiben wir  $\mathbf{M} \in \mathbb{N}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{N}_0^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  beziehungsweise  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Des Weiteren bezeichnet  $\det \mathbf{M}$  die Determinante von  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^{-1}$  die inverse Matrix,  $\mathbf{M}^T$  die transponierte Matrix und wir definieren  $\mathbf{M}^{-T} := (\mathbf{M}^{-1})^T = (\mathbf{M}^T)^{-1}$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  werden die Ausdrücke  $(\mathbf{M} + \lambda)$  und  $(\mathbf{M} \cdot \lambda)$  als komponentenweise Addition beziehungsweise Multiplikation aufgefasst und für  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist  $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  das übliche Matrixprodukt. Wir bezeichnen zudem für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  die Matrix

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

als Diagonalmatrix und  $\mathbf{I}_2 := \text{diag}(1, 1) \in \mathbb{N}^{2 \times 2}$  als Einheitsmatrix. Eine wichtige Rolle im Verlauf der Arbeit spielen Rotationsmatrizen

$$\mathbf{R}_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

mit  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

## 1.1 Räume differenzierbarer Funktionen

Für Lebesgue-messbare Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $1 \leq p < \infty$  sind die Räume der auf  $A$  in der  $p$ -ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen gegeben durch

$$L_p(A) := \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{A,p} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{A,p} := \left( \int_A |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Wie üblich sind die Elemente der jeweiligen Räume als Äquivalenzklassen von Funktionen zu identifizieren, die fast überall übereinstimmen. Mit dem Fall  $p = \infty$  identifizieren wir den Raum  $C(A)$  der stetigen Funktionen auf  $A$  und versehen diesen mit der Norm

$$\|f\|_{A,\infty} := \sup_{\mathbf{x} \in A} |f(\mathbf{x})|.$$

Im Fall  $p = 2$  ist der  $L_2(A)$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{A,2} := \int_A f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}.$$

Wir definieren den zweidimensionalen Torus als Faktorgruppe  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ . Dieser kann anschaulich als der um  $\frac{1}{2}$  verschobene und mit  $2\pi$  skalierte Einheitskubus  $[-\pi, \pi]^2$  mit identifizierten Rändern angesehen werden. Funktionen  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  werden im Folgenden als in jeder Variable auf der reellen Achse  $2\pi$ -periodische Funktionen angesehen. Eine Funktion  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar auf  $\mathbb{T}^2$ , falls die zugehörige in jeder Variablen  $2\pi$ -periodische Funktion integrierbar auf  $[-\pi, \pi]^2$  ist und wir schreiben in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{[-\pi, \pi]^2} f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}.$$

Für den Rest der Arbeit wird für  $p = 2$  die vereinfachte Notation

$$\langle f, g \rangle_2 := (2\pi)^{-2} \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}^2,2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

verwendet, um das Skalarprodukt bezüglich des Hilbertraums  $L_2(\mathbb{T}^2)$  auszudrücken. Darüber hinaus bezeichnet  $C(\mathbb{T}^2)$  den Raum der stetigen und in beiden Variablen  $2\pi$ -periodischen Funktionen.

Eine wichtige und bekannte Aussage über  $L_p$ -Räume auf Mengen mit endlichem Maß liefert die Hölder-Ungleichung.

**Satz 1.1.**

Es seien eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^2$  mit endlichem Maß sowie Funktionen  $f \in L_p(A)$  und  $g \in L_q(A)$  für  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gegeben. Dann ist  $fg \in L_1(A)$  und es gilt

$$\|fg\|_{A,1} \leq \|f\|_{A,p} \|g\|_{A,q}.$$

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^2$  mit endlichem Maß und  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  und eine Funktion  $f \in L_q(A)$  ergibt sich als Folgerung aus Satz 1.1, dass auch  $f \in L_p(A)$  gilt mit

$$\|f\|_{A,p} \leq |A|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{A,q}. \quad (1.4)$$

Für  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})^T \in \mathbb{R}^{n-k+1}$  mit  $k \leq n$  definieren wir die Bell-Polynome durch

$$B_{n,k}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{m}} \binom{n}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{n-k+1} \left( \frac{x_j}{j!} \right)^{m_j},$$

wobei die Summe über alle Vektoren  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n-k+1})^T \in \mathbb{N}_0^{n-k+1}$  mit den Eigenschaften  $\sum_{i=1}^{n-k+1} m_i = k$  und  $\sum_{i=1}^n i \cdot m_i = n$  läuft. Es gilt der Zusammenhang

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(1, 1, \dots, 1) = \sum_{k=0}^n \sum_{\mathbf{m}} \binom{n}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{n-k+1} (j!)^{-m_j} = B_n, \quad (1.5)$$

## 1.1 Räume differenzierbarer Funktionen

---

wobei  $B_n$  die  $n$ -te Bell-Zahl darstellt. Im eindimensionalen Fall ist die  $n$ -te Ableitung der Verkettung zweier hinreichend oft differenzierbarer Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die Formel von Faà di Bruno [54, Abschnitt 4.3]

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{\mathbf{k}} \binom{n}{\mathbf{k}} f^{(|\mathbf{k}|)}(g(x)) \prod_{j=1}^n \left( \frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{k_j} \quad (1.6)$$

$$= \sum_{k=1}^n f^{(k)}(g(x)) B_{n,k} \left( g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x) \right), \quad (1.7)$$

wobei die Summe in der oberen Zeile über alle Vektoren  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)^T \in \mathbb{N}_0^n$  mit der Eigenschaft  $\sum_{i=1}^n i \cdot k_i = n$  läuft.

Für ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt diese  $q$ -mal partiell differenzierbar in  $\mathbf{x} \in \Omega$ , falls

$$\frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} f(\mathbf{x})$$

für alle  $1 \leq r \leq q$  und  $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}$  existiert. Falls jede dieser Ableitungen zusätzlich stetig ist, heißt die Funktion  $q$ -mal stetig partiell differenzierbar und wir schreiben  $f \in C^q(\Omega)$ . In diesem Fall gilt der Satz von Schwarz, weshalb die Reihenfolge des partiellen Ableitungen keine Rolle spielt und wir deshalb im Folgenden für  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T \in \mathbb{N}_0^2$  die kompakte Notation

$$\partial^{\mathbf{r}} f(\mathbf{x}) := \partial^{\mathbf{r}} [f](\mathbf{x}) := \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} f(\mathbf{x})$$

für die  $\mathbf{r}$ -te partielle Ableitung im Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  verwenden. Mit dieser Notation können wir die Räume  $q$ -fach stetig partiell differenzierbarer Funktionen kompakt schreiben als

$$C^q(\Omega) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \partial^{\mathbf{r}} f \in C(\Omega) \text{ für alle } \mathbf{r} = (r_1, r_2)^T \in \mathbb{N}_0^2 \text{ mit } r_1 + r_2 \leq q \}$$

und wir versehen diese Räume mit der Norm

$$\|f\|_{C^q(\Omega)} := \max_{|\mathbf{r}|_1 \leq q} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial^{\mathbf{r}} f(\mathbf{x})|.$$

Für Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir die Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

als Träger von  $f$ . Damit lässt sich der Raum  $q$ -mal stetig differenzierbarer Funktionen mit kompaktem Träger durch

$$C_0^q(\Omega) := \{ f \in C^q(\Omega) : \text{supp } f \text{ ist kompakt} \}$$

mit der identischen Norm wie im Fall  $q$ -mal stetig differenzierbarer Funktionen definieren.

Für eine partiell differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Gradient im Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$  gegeben durch

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) := \text{grad}[f](\mathbf{x}) := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}) \right)^T$$

und für eine stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  können wir die Richtungsableitung in Richtung  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\mathbf{v}|_2 = 1$  im Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  schreiben als

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \partial_{\mathbf{v}}[f](\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \text{grad } f(\mathbf{x}).$$

Für  $f \in C^q(\Omega)$  mit  $q \geq m$  existieren insbesondere die Richtungsableitungen  $m$ -ter Ordnung in jede Richtung  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\mathbf{v}|_2 = 1$ , welche rekursiv definiert werden als  $\partial_{\mathbf{v}}^0 f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$  und

$$\partial_{\mathbf{v}}^m f(\mathbf{x}) := \partial_{\mathbf{v}}^m [f](\mathbf{x}) := \frac{\partial^m}{\partial \mathbf{v}^m} f(\mathbf{x}) := \partial_{\mathbf{v}} [\partial_{\mathbf{v}}^{m-1} f](\mathbf{x}).$$

Eine andere Darstellung für die Richtungsableitung  $m$ -ter Ordnung einer Funktion ist durch

$$\partial_{\mathbf{v}}^m f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \mathbf{v}^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} f(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

gegeben. Der Laplace-Operator ist für Funktionen  $f \in C^2(\Omega)$  und  $\mathbf{x} \in \Omega$  definiert durch

$$\Delta f(\mathbf{x}) := \Delta[f](\mathbf{x}) := \partial^{(2,0)} f(\mathbf{x}) + \partial^{(0,2)} f(\mathbf{x}).$$

Gilt darüber hinaus  $f \in C^{2q}(\Omega)$  für  $q \in \mathbb{N}_0$ , so folgt mittels partieller Integration

$$\Delta^q f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{r}|_1=q} \binom{q}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}} f(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Des Weiteren sei für  $\mathbf{x} \in \Omega$  durch  $Lf(\mathbf{x}) := L[f](\mathbf{x}) := (I + 2^j \Delta)[f](\mathbf{x})$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung definiert, welcher bereits für ähnliche Untersuchungen in [7, 33, 57] betrachtet wurde. Mit der Gleichung (1.9) folgt

$$L^q f(\mathbf{x}) = (I + 2^j \Delta)^q [f](\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \Delta^s f(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}} f(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

Für Funktionen  $f, g \in C^q(\Omega)$  und  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0$  mit  $|\mathbf{r}|_1 \leq q$  lässt sich durch vollständige Induktion mit der bekannten eindimensionalen Leibniz-Regel die multivariate Verallgemeinerung

$$\partial^{\mathbf{r}}(fg)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{r}} \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} \partial^{\mathbf{s}} f(\mathbf{x}) \partial^{\mathbf{r}-\mathbf{s}} g(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

zeigen. Für  $f \in C^{u+1}(\Omega)$  schreiben wir zweidimensionale Taylor-Polynome der Ordnung  $u \in \mathbb{N}_0$  als

$$T_u f(\mathbf{x}) := T_u f(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq u} \frac{\partial^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega,$$

und es gilt der Zusammenhang

$$|f(\mathbf{x}) - T_u f(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| = \mathcal{O}\left(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_2^{u+1}\right) \quad \text{für } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (1.12)$$

Zum Schluss dieses Abschnitts soll eine Klasse von Funktionen eingeführt werden, die sich als gängiges Modell für Funktionen mit Unstetigkeiten entlang von Kanten bewährt hat [7, 19, 33]. Der Ausgangspunkt sind sogenannte sternförmige Mengen, die als Trägermengen für charakteristische Funktionen dienen. Wir nennen eine Menge  $T \subset (-\pi, \pi)^2$  sternförmig, falls ein  $\mathbf{x}_0 \in T$ , genannt Ursprung, existiert, sodass für alle  $\mathbf{x} \in T$

$$\{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}_0 : \lambda \in [0, 1]\} \subset T$$

erfüllt ist. Wir schreiben in diesem Fall  $T \in \text{STAR}$ . In der nachstehenden Definition nutzen wir die Ideen aus [19, Abschnitt 8.2] und betrachten sternförmige Mengen mit glattem Rand  $\partial T$ , welcher mit einer parametrisierten Kurve in Polarkoordinaten beschrieben werden kann.

**Definition 1.2.**

Es sei  $r \in C^2([0, 2\pi))$  eine Funktion mit  $\|r\|_{C^2} \leq \tau$  und  $T \in \text{STAR}$  eine sternförmige Menge mit Ursprung  $\mathbf{x}_0$ , deren Rand  $\partial T$  in Polarkoordinaten durch eine Kurve  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \partial T$  mit der Parametrisierung

$$\gamma(x) = \mathbf{x}_0 + r(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (1.13)$$

beschrieben wird. Die Menge  $\text{STAR}^2(\tau)$  sei definiert als die Menge, welche alle  $T \in \text{STAR}$  enthält, deren Rand durch eine Kurve von der Form (1.13) beschrieben werden können.

Mit diesen Mengen lassen sich Cartoon-ähnliche Funktionen definieren.

**Definition 1.3.**

Für  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $u \in \mathbb{N}_0$  ist die Menge der Cartoon-ähnlichen Funktionen gegeben durch

$$\mathcal{E}^u(\tau) := \left\{ f = f_0 + f_1 \chi_T : f_0, f_1 \in C_0^u(\mathbb{R}^2) \text{ und } \text{supp } f_0 \subset (-\pi, \pi)^2 \right\}.$$

## 1.2 Muster und erzeugende Mengen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Musters und der eng damit verbundenen erzeugenden Menge ein. Diese werden im späteren Verlauf der Arbeit als Abtastpunkte beziehungsweise diskrete Frequenzen einer Funktion dienen. Zunächst wird das Konzept der Restklassen bezüglich einer Zahl modulo einer anderen Zahl auf den mehrdimensionalen Fall erweitert. Ausführliche Betrachtungen der Inhalte dieses Abschnitts finden sich beispielsweise in [4, 43].

Gegeben sei eine ganzzahlige Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $|\det \mathbf{M}| > 0$ . Zwei Vektoren  $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  heißen kongruent bezüglich der Matrix  $\mathbf{M}$ , geschrieben  $\mathbf{h} \equiv \mathbf{k} \pmod{\mathbf{M}}$ , falls ein  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$  existiert, sodass

$$\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{z}.$$

Analog zum Eindimensionalen seien die Mengen  $[\mathbf{k}]_{\mathbf{M}} := \{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{h} \equiv \mathbf{k} \pmod{\mathbf{M}}\}$  als Restklassen von  $\mathbf{k}$  bezüglich der Matrix  $\mathbf{M}$  bezeichnet. Passend dazu definieren wir die Kronecker-Symbole

$$\delta_{\mathbf{h},\mathbf{k}}^{\mathbf{M}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{h} \equiv \mathbf{k} \pmod{\mathbf{M}}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die erzeugende Gruppe einer Matrix  $\mathbf{M}$  enthält alle Kongruenzklassen von ganzzahligen Vektoren modulo der Matrix  $\mathbf{M}$  und wir schreiben

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) := \mathbb{Z}^2 / \mathbf{M}\mathbb{Z}^2.$$

Die erzeugende Menge  $\mathcal{G}(\mathbf{M}) \subset \mathbb{Z}^2$ , welche wir im Folgenden mit demselben Symbol bezeichnen, ist definiert als eine beliebige Menge von Repräsentanten der Äquivalenzklassen, für die

$$|[\mathbf{k}]_{\mathbf{M}} \cap \mathcal{G}(\mathbf{M})| = 1$$

gilt. Aus der Definition der erzeugenden Menge folgt, dass jedes  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  eindeutig dargestellt werden kann als

$$\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{z}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.14)$$

Das Gitter von  $\mathbf{M}$  ist gegeben durch die Menge

$$\Lambda(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{M}\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Für die Definition von Mustern  $\mathcal{P}(\mathbf{M}) \subset \Lambda(\mathbf{M})$  werden Äquivalenzklassen auf dem Gitter  $\Lambda(\mathbf{M})$  modulo der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_2$  betrachtet. Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer Matrix ist analog zu der Definition der erzeugenden Menge gegeben durch eine Menge von Restklassenrepräsentanten mit

$$|[\mathbf{y}]_{\mathbf{I}_2} \cap \mathcal{P}(\mathbf{M})| = 1.$$

Insbesondere ist durch

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \Lambda(\mathbf{M}) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$$

ein Muster definiert (vgl. [4, S.11]), welches wir in dieser Arbeit ausschließlich verwenden werden. Die Abbildung  $\mathbf{M} \circ$  ist linear und bijektiv, weshalb ausgehend von einem Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  durch

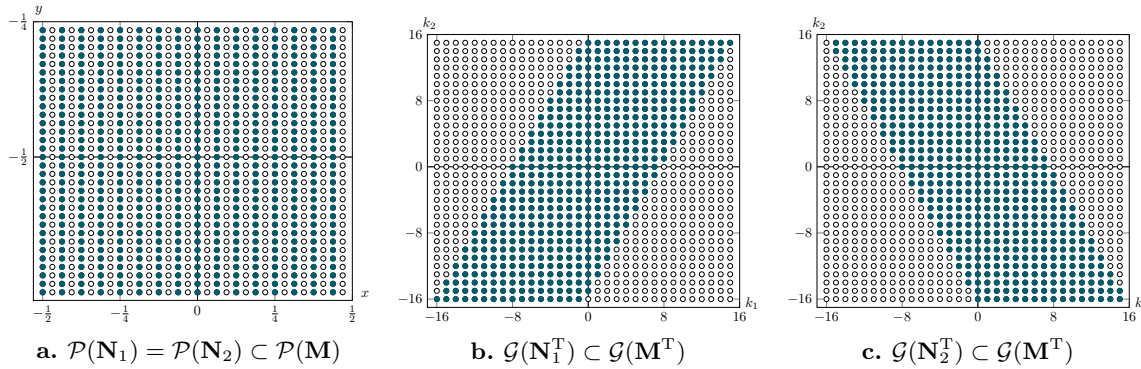
$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \mathbf{M} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2 \cap \mathbb{Z}^2 \quad (1.15)$$

die zugehörige erzeugende Menge gegeben ist. Mit [15, Lemma II.7] folgt für die Mächtigkeit der Mengen

$$|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\mathcal{G}(\mathbf{M})| = |\mathcal{P}(\mathbf{M}^T)| = |\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)| = |\det \mathbf{M}|.$$

Eine wichtige Eigenschaft für spätere Zwecke ist die Möglichkeit, ein gegebenes Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  durch die Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{M}$  in Teilmuster  $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$  zu zerlegen. Das folgende Lemma setzt sich aus [43, Lemma 2.4 und Lemma 2.7] zusammen.

## 1.2 Muster und erzeugende Mengen



**Abbildung 1.1.** Visualisierung der Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{N}_1) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_2) \subset \mathcal{P}(\mathbf{M})$  und erzeugenden Mengen  $\mathcal{G}(\mathbf{N}_1^T) \subset \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$  und  $\mathcal{G}(\mathbf{N}_2^T) \subset \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$  bei der Zerlegung der Matrix  $\mathbf{M}$  aus [Beispiel 1.5](#).

### Lemma 1.4.

Es seien zwei reguläre Matrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  gegeben. Es gilt  $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$  genau dann, wenn eine Matrix  $\mathbf{J} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  existiert, sodass  $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ . Gilt darüber hinaus  $|\det \mathbf{J}| = 1$ , so ist  $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = \mathcal{P}(\mathbf{M})$ .

Eine wichtige Folgerung aus dem vorhergehenden Lemma ist, dass zwei Matrizen zwar dasselbe Muster generieren können, die entsprechenden erzeugenden Mengen jedoch nicht zwangsläufig identisch sein müssen. Diese Beobachtung bildet die Grundlage der richtungsspezifischen multiplen Waveletzerlegungen aus [Abschnitt 2.3](#) und wird im nachstehenden Beispiel illustriert.

### Beispiel 1.5.

Die Matrizen

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 32 \end{pmatrix}$$

erfüllen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{N}_2,$$

weshalb nach dem ersten Teil von [Lemma 1.4](#) die Beziehungen  $\mathcal{P}(\mathbf{N}_1) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$  und  $\mathcal{P}(\mathbf{N}_2) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$  gelten. Darüber hinaus ist

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 32 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{N}_2$$

mit  $\det \mathbf{J} = 1$ , weshalb wiederum mit [Lemma 1.4](#) die Gleichheit  $\mathcal{P}(\mathbf{N}_1) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_2)$  folgt. Es wird deutlich, dass bei verschiedenen Zerlegungen einer Matrix  $\mathbf{M}$  die resultierenden Teilmuster übereinstimmen können. Wie bereits erwähnt, ist dies im Allgemeinen für die erzeugenden Mengen nicht der Fall, was in [Abbildung 1.1](#) passend zu diesem Beispiel verdeutlicht wird.

### 1.3 Fourier-Analysis

Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion  $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$  sind für  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  definiert durch

$$c_{\mathbf{k}}(f) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (1.16)$$

Für  $p = 2$  wird der Raum  $L_2(\mathbb{T}^2)$  mit dem Skalarprodukt in (1.3) ein Hilbertraum. Die Menge der trigonometrischen Polynome  $\{e^{i\mathbf{k}^T \circ} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$  bildet eine orthonormale Basis des  $L_2(\mathbb{T}^2)$ , weshalb sich jede Funktion  $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$  eindeutig durch ihre Fourier-Reihe

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}^T \circ}$$

darstellen lässt. Es gilt die Parseval-Gleichung

$$\langle f, g \rangle_2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}}(g)} \quad (1.17)$$

und damit insbesondere der Zusammenhang

$$\|f\|_2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2. \quad (1.18)$$

In der Praxis kommt es häufig vor, dass ein periodisches Signal nur an diskreten Stellen abgetastet werden kann. Für diesen Fall wird die diskrete Fourier-Transformation benötigt. Wir folgen den Betrachtungen aus [3, 5, 43] und definieren die mehrdimensionale diskrete Fourier-Transformation auf beliebigen Mustern  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ .

**Definition 1.6.**

Für eine reguläre Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  und einen Vektor  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$  heißt  $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}$  mit

$$\hat{a}_{\mathbf{h}} := \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T),$$

diskrete Fourier-Transformation von  $\mathbf{a}$  bezüglich  $\mathbf{M}$  und

$$a_{\mathbf{y}} := \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \hat{a}_{\mathbf{h}} e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}),$$

inverse diskrete Fourier-Transformation von  $\hat{\mathbf{a}}$  bezüglich  $\mathbf{M}$ .

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit der diskreten Fourier-Transformation ergibt sich mit der Fourier-Matrix  $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ .

**Definition 1.7.**

Für eine reguläre Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  ist die Fourier-Matrix  $\mathcal{F}(\mathbf{M})$  definiert durch

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{M}|}} \left( e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{|\det \mathbf{M}| \times |\det \mathbf{M}|}.$$

Mit dieser Definition gilt

$$\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{|\det \mathbf{M}|} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a}.$$

Häufig entsteht der Vektor  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$  durch die Abtastung einer periodischen Funktion auf den Musterpunkten, also  $a_{\mathbf{y}} = f(2\pi\mathbf{y})$  mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$  und wir erhalten  $\hat{a}_{\mathbf{h}} = |\det \mathbf{M}| c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f)$  mit den diskreten Fourier-Koeffizienten

$$c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f) := \frac{1}{|\det \mathbf{M}|} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} f(2\pi\mathbf{y}) e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T).$$

Unter Verwendung der Eigenschaft

$$\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} = |\det \mathbf{M}| \delta_{\mathbf{0}, \mathbf{k}}^{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2,$$

aus [61, Lemma 2.7] ergibt sich die Parseval-Gleichung

$$\frac{1}{|\det \mathbf{M}|} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} |a_{\mathbf{y}}|^2 = \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} |\hat{a}_{\mathbf{h}}|^2 \tag{1.19}$$

für die diskrete Fourier-Transformation.

Die große praktische Bedeutung der diskreten Fourier-Transformation entsteht durch die Möglichkeit, diese mit schnellen Algorithmen effizient berechnen zu können. Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) bildet dabei einen der wichtigsten Algorithmen in der Signalverarbeitung. In [3] wurde dieser Algorithmus auf den Fall der diskreten Fourier-Transformation auf Mustern  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  übertragen.

Das Analogon zu den Fourier-Reihen für periodische Funktionen bildet die Theorie der Fourier-Transformation für Funktionen, die auf der gesamten reellen Achse definiert sind.

**Definition 1.8.**

Die Fourier-Transformation einer Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  ist definiert durch

$$\mathcal{F}f(\mathbf{x}) := \mathcal{F}[f](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

und die sogenannte inverse Fourier-Transformation von  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  durch

$$\mathcal{F}^{-1}f(\mathbf{x}) := \mathcal{F}^{-1}[f](\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Die Eigenschaften der Fourier-Transformation im nachstehenden Lemma setzen wir als bekannt voraus (vgl. [63, Abschnitt 1.1]).

**Lemma 1.9.**

Es seien  $q \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $|\mathbf{r}|_1 \leq q$  gegeben. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

i) Für eine reguläre Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  und  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  ist

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{M}^{-1}(\circ - \mathbf{t}))](\boldsymbol{\xi}) = |\det \mathbf{M}| \mathcal{F}[f](\mathbf{M}^T \boldsymbol{\xi}) e^{-i \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{t}}. \quad (1.20)$$

ii) Falls  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  und  $(i \circ)^q f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ , so ist  $\mathcal{F}f \in C^q(\mathbb{R}^2)$  und

$$\partial^{\mathbf{r}} \mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}[(i \circ)^{\mathbf{r}} f](\boldsymbol{\xi}). \quad (1.21)$$

iii) Für  $f \in C^q(\mathbb{R}^2)$  und  $\partial^{\mathbf{r}} f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  gilt

$$\mathcal{F}[\partial^{\mathbf{r}} f](\boldsymbol{\xi}) = (i \boldsymbol{\xi})^{\mathbf{r}} \mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}). \quad (1.22)$$

iv) Für eine Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$  gilt die Formel von Plancherel

$$\|f\|_{\mathbb{R}^2, 2} = (2\pi)^2 \|\mathcal{F}f\|_{\mathbb{R}^2, 2}. \quad (1.23)$$

Aus dem vorherigen Lemma lässt sich mit (1.8) und (1.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\partial_{\mathbf{v}}^m f](\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \mathbf{v}^{\mathbf{r}} \mathcal{F}[\partial^{\mathbf{r}} f](\boldsymbol{\xi}) \\ &= i^m \mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \mathbf{v}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} \\ &= i^m (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\xi})^m \mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

für die Fourier-Transformation der  $m$ -ten Richtungsableitung von  $f$  entlang der Richtung  $\mathbf{v}$  mit  $|\mathbf{v}|_2 = 1$  folgern.

Das folgende Lemma stellt den wichtigen Zusammenhang zwischen der Glattheit einer Funktion im Ortsbereich und der daraus folgenden Lokalisierung im Frequenzbereich her. Obwohl die Aussage bekannt ist, wollen wir den Beweis hier aufgrund der speziellen Notation im mehrdimensionalen Fall dennoch angeben.

**Lemma 1.10.**

Für  $q \in \mathbb{N}_0$  sei eine Funktion  $f \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$  gegeben. Dann gilt für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$|\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq \frac{C_1(f, q)}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^q}, \quad |\mathcal{F}^{-1}f(\mathbf{x})| \leq \frac{C_2(f, q)}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^q}.$$

*Beweis.* Der Fall  $q = 0$  folgt aus der Beschränktheit der Fourier-Transformation, weil nach der Voraussetzung  $f \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$  auch  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  gilt.

Da die Funktion  $f$  einen kompakten Träger besitzt, ergibt sich für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  durch  $\mathbf{r}$ -fache partielle Integration

$$\mathcal{F}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(i \mathbf{x})^{\mathbf{r}}} \int_{\mathbb{R}^2} \partial^{\mathbf{r}} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-i \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi}. \quad (1.25)$$

Die Vektornormen  $|\cdot|_p$  aus (1.1) sind monoton fallend in  $p$ , weshalb mit dem binomischen Lehrsatz (1.2) und Gleichung (1.25) die Abschätzung

$$|\mathbf{x}|_2^q |\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}|_1^q |\mathcal{F}f(\mathbf{x})| = \sum_{|\mathbf{r}|_1=q} \binom{q}{\mathbf{r}} |\mathbf{x}|^{\mathbf{r}} |\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq 2^q \|\partial^{\mathbf{r}} f\|_{\text{supp } f,1} \quad (1.26)$$

folgt, wobei der letzte Ausdruck als Konstante  $C(f, q) > 0$  aufgefasst wird.

Für  $|\mathbf{x}|_2 < 1$  ist  $(1 + |\mathbf{x}|_2)^q < 2^q$  und wir erhalten

$$|\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq \|f\|_{\text{supp } f,1} < \frac{2^q \|f\|_{\text{supp } f,1}}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^q} \leq \frac{\tilde{C}(f, q)}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^q}.$$

Im Fall  $|\mathbf{x}|_2 \geq 1$  ist  $(1 + |\mathbf{x}|_2)^q \leq (2|\mathbf{x}|_2)^q$ , weshalb sich mit (1.26)

$$|\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq \frac{C(f, q)}{|\mathbf{x}|_2^q} \leq \frac{C(f, q) 2^q}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^q}$$

folgern lässt und die erste Behauptung bewiesen ist. Der zweite Teil des Lemmas ergibt sich direkt durch die Beziehung

$$\mathcal{F}^{-1}f(\mathbf{x}) = (2\pi)^2 \mathcal{F}f(-\mathbf{x}).$$

□

Im abschließenden Teil dieses Abschnitts stellen wir mit der Poisson-Summationsformel unter gewissen Voraussetzungen den Zusammenhang zwischen den Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation her. Zunächst benötigen wir den Begriff der  $2\pi$ -Periodisierung einer Funktion.

**Definition 1.11.**

Für eine Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  heißt

$$f^{2\pi} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} f(\circ + 2\pi\mathbf{n})$$

$2\pi$ -Periodisierung von  $f$ .

Die Diskussion und der Beweis der folgenden Resultate finden sich in [63, Theorem VII.2.4, Korollar VII.2.6].

**Lemma 1.12.**

Für  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  konvergiert die Reihe aus Definition 1.11 für fast alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2$ . Es gilt  $f^{2\pi} \in L_1(\mathbb{T}^2)$  und für die Fourier-Koeffizienten von  $f^{2\pi}$  ergibt sich

$$c_{\mathbf{k}}(f^{2\pi}) = \mathcal{F}f(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2.$$

**Theorem 1.13.**

Erfüllt eine Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$  für  $\varepsilon > 0$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  die Abschätzungen

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{C_1}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^{2+\varepsilon}}, \quad |\mathcal{F}f(\mathbf{x})| \leq \frac{C_2}{(1 + |\mathbf{x}|_2)^{2+\varepsilon}},$$

dann konvergieren die nachfolgenden Reihen gleichmäßig und es gilt die Poisson-Summationsformel

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} f(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{n}). \quad (1.27)$$

Eine direkte Folgerung aus den vorherigen Resultaten ist, dass eine Funktion  $f \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$  für  $q > 2$  wegen Lemma 1.10 den Voraussetzungen von Lemma 1.12 und Theorem 1.13 genügt und somit die Poisson-Summationsformel (1.27) in diesem Fall gilt.

## 1.4 Dyadische periodische Multiskalenanalyse

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundlagen für die Konstruktion multivariater trigonometrischer Wavelets eingeführt. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff der translationsinvarianten Räume bezüglich einer Matrix. Wir orientieren uns dabei an den Definitionen und Resultaten aus [4, 43]. Eine ähnliche Betrachtung für den eindimensionalen Fall findet sich beispielsweise in [59].

**Definition 1.14.**

Ein Vektorraum  $V \subset L_1(\mathbb{T}^2)$  heißt translationsinvariant bezüglich einer Matrix  $\mathbf{M}$  oder kurz  $\mathbf{M}$ -invariant, falls für alle  $f \in V$  und alle  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$  gilt, dass

$$\mathcal{T}_{\mathbf{y}} f := \mathcal{T}_{\mathbf{y}}[f] := f(\circ - 2\pi \mathbf{y}) \in V.$$

Des Weiteren bezeichnet

$$V_{\mathbf{M}}^f := \text{span}\{\mathcal{T}_{\mathbf{y}} f : \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$$

den Raum der Translate von  $f$  bezüglich des Musters  $\mathbf{M}$ .

Das folgende Lemma fasst die wichtigsten Eigenschaften translationsinvarianter Räume periodischer Funktionen zusammen. Der Beweis findet sich in [4, Lemma 1.23].

**Lemma 1.15.**

Es seien  $f, \varphi \in L_2(\mathbb{T}^2)$  und  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  eine reguläre Matrix. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- i) Der Raum  $V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$  ist  $\mathbf{M}$ -invariant.

ii) Es gilt  $f \in V_{\mathbf{M}}^\varphi$ , d. h.

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi$$

mit Koeffizienten  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$  genau dann, wenn für die diskrete Fourier-Transformation  $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}$  die Bedingung

$$c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\varphi) \quad (1.28)$$

für alle  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$  und  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$  erfüllt ist.

iii) Die Translate in  $V_{\mathbf{M}}^\varphi$  sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\varphi)|^2 > 0 \quad (1.29)$$

für alle  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ .

iv) Die Translate in  $V_{\mathbf{M}}^\varphi$  sind genau dann orthonormal, wenn

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\varphi)|^2 = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \quad (1.30)$$

für alle  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ .

In [4, Definition 1.24] wird eine Multiskalenanalyse formuliert, in der sich die Dilatationsmatrizen und Skalierungsfunktionen auf verschiedenen Leveln unterscheiden können. Diese Form der Nichtstationarität erlaubt die anisotrope Zerlegung von Funktionen auf verschiedenen Detailstufen, bei der durch die Wahl verschiedener Dilatationsmatrizen gewisse Richtungspräferenzen im Frequenzbereich entstehen können. Wie diese im Detail aussehen und gezielt erzeugt werden können, wird im zweiten Kapitel dieser Arbeit behandelt.

**Definition 1.16.**

Es seien eine Folge  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$  von Räumen  $V_j \subset L_2(\mathbb{T}^2)$  und eine Folge  $\{\mathbf{J}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  von Matrizen  $\mathbf{J}_l \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $\det \mathbf{J}_l = 2$  gegeben. Ferner seien Matrizen  $\mathbf{M}_j \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  rekursiv definiert durch  $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $\det \mathbf{M}_0 = 1$  und für  $j > 0$  durch

$$\mathbf{M}_j := \mathbf{J}_j \mathbf{M}_{j-1} = \left( \prod_{l=j}^1 \mathbf{J}_l \right) \mathbf{M}_0 = \mathbf{J}_j \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_1 \mathbf{M}_0.$$

Wir nennen das Tupel  $(\{\mathbf{J}_l\}_{l \in \mathbb{N}}, \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_0})$  eine nichtstationäre anisotrope dyadische periodische Multiskalenanalyse des  $L_2(\mathbb{T}^2)$ , kurz PMSA, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- i) Für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  existiert eine Skalierungsfunktion  $\varphi_j \in V_j$ , deren Translate  $\mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_j$  für  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$  eine Basis des Skalierungsraums  $V_j$  bilden.

ii) Für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt  $V_j \subset V_{j+1}$ .

iii) Die Vereinigung aller  $V_j$  liegt dicht in  $L_2(\mathbb{T}^2)$ .

Es sei eine PMSA wie in Definition 1.16 gegeben. In [43, Theorem 4.1] wurde gezeigt, dass sich der Raum  $V_{j+1}$  durch linear unabhängige Translate von Funktionen  $\mathcal{T}_{\mathbf{y}}\psi_j$  mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$  in die direkte Summe

$$V_{j+1} := V_{\mathbf{M}_{j+1}}^{\varphi_{j+1}} = V_{\mathbf{M}_j}^{\varphi_j} \oplus V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j} \quad (1.31)$$

zerlegen lässt. Die dort auftretenden Funktionen  $\psi_j$  werden Wavelets der Skale  $j$  zu den Waveleträumen

$$W_j := W_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j} := \text{span} \{ \mathcal{T}_{\mathbf{y}}\psi_j : \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j) \}$$

genannt. In [43, Theorem 4.3] beziehungsweise in [4, Theorem 1.34] für den Fall orthonormalen Basen wurde eine Konstruktionsmethode für die Fourier-Koeffizienten dyadischer Waveletfunktion angegeben.

**Lemma 1.17.**

Es sei eine dyadische PMSA  $(\{\mathbf{J}_l\}_{l \in \mathbb{N}}, \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_0})$  gegeben und es seien  $\varphi_j$  und  $\varphi_{j+1}$  Skalierungsfunktionen aufeinanderfolgender Level, sodass

$$c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_j) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{j+1}), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.32)$$

Dann ergibt sich für den durch die Translate  $\mathcal{T}_{\mathbf{y}}\psi_j$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$ , erzeugten  $\mathbf{M}_j$ -invarianten Raum  $V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j}$ , dass

$$V_{\mathbf{M}_{j+1}}^{\varphi_{j+1}} = V_{\mathbf{M}_j}^{\varphi_j} \oplus V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j}$$

genau dann gilt, wenn Koeffizienten  $\sigma_{\mathbf{h}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existieren, sodass die Bedingungen

$$\sigma_{\mathbf{k}} = -\sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}}, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{j+1}^T) \setminus \{0\}, \mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T), \quad |\sigma_{\mathbf{h}}| = 1, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T)$$

sowie

$$c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\psi_j) = \hat{b}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{j+1}), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2, \quad (1.33)$$

mit

$$\hat{b}_{\mathbf{h}} = \frac{\sigma_{\mathbf{h}} \overline{\hat{a}_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}}}}{\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}|^2}$$

erfüllt sind.

In der letzten Zeile des vorherigen Lemmas ist der Nenner wegen Eigenschaft i) einer PMSA und (1.29) größer Null. Im Folgenden sei eine dyadische PMSA  $(\{\mathbf{J}_l\}_{l \in \mathbb{N}}, \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_0})$  mit Skalierungsfunktionen  $\varphi_{j+1} \in V_{j+1} = V_{\mathbf{M}_{j+1}}^{\varphi_{j+1}}$ ,  $\varphi_j \in V_j = V_{\mathbf{M}_j}^{\varphi_j}$  und den Waveletfunktionen

## 1.5 Integraldarstellungen und Fresnel-Integrale

---

$\psi_j \in W_j = V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j}$  aus Lemma 1.17 für ein beliebiges  $j \in \mathbb{N}_0$  gegeben. Wegen Lemma 1.15 ii) lassen sich die Gleichungen (1.32) und (1.33) im Ortsbereich äquivalent schreiben als

$$\varphi_j = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} a_{j,\mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}, \quad \psi_j = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} b_{j,\mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}.$$

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, eine gegebene Funktion

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} d_{\mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1} \in V_{j+1}$$

als Summe der Skalierungs- und Waveletfunktionen  $\varphi_j$  beziehungsweise  $\psi_j$  auszudrücken. Bei der sogenannten Wavelet-Analyse der Funktion  $f$  sind Koeffizienten  $d_{j,\mathbf{x},0}, d_{j,\mathbf{x},1}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$  gesucht, sodass

$$f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)} (d_{j,\mathbf{x},0} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \varphi_j + d_{j,\mathbf{x},1} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \psi_j) \quad (1.34)$$

erfüllt ist. In [4, Abschnitt 1.5] wurde gezeigt, dass die gesuchten Koeffizienten durch inverse diskrete Fourier-Transformationen aus den Darstellungen

$$\hat{d}_{j,\mathbf{k},0} = \overline{\hat{a}_{j,\mathbf{k}}} \hat{d}_{\mathbf{k}} + \overline{\hat{a}_{j,\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}}} \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}}, \quad \hat{d}_{j,\mathbf{k},1} = \overline{\hat{b}_{j,\mathbf{k}}} \hat{d}_{\mathbf{k}} + \overline{\hat{b}_{j,\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}}} \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}} \quad (1.35)$$

mit  $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T)$  und  $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_j^T)$  erhalten werden können.

Für die Rückrichtung, genannt Wavelet-Synthese, wurde ebenfalls in [4, Abschnitt 1.5] eine konkrete Formel für die Bestimmung der Koeffizienten  $d_{\mathbf{y}}$  mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})$  aus den gegebenen Koeffizienten  $d_{j,\mathbf{x},0}, d_{j,\mathbf{x},1}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$  angegeben. Für  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T)$  und die eindeutige Zerlegung  $\mathbf{h} = \mathbf{k} + \mathbf{M}_j^T \mathbf{g}$  mit  $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T)$  und  $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_j^T)$  aus [4, Lemma 1.5] gilt

$$\hat{d}_{\mathbf{h}} = \hat{d}_{j,\mathbf{k},0} \hat{a}_{j,\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}} + \hat{d}_{j,\mathbf{k},1} \hat{b}_{j,\mathbf{k}+\mathbf{M}_j^T \mathbf{g}} \quad (1.36)$$

und erneut ergeben sich die gesuchten Koeffizienten in (1.34) durch inverse diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})$ .

Ein großer Vorteil bei der Waveletterlegung von Funktionen ist die Möglichkeit, die Analyse und Synthese mit effizienten und schnellen Algorithmen umsetzen zu können [45]. Für den Fall multivariater dyadischer Waveletterlegungen mit PMSA existieren ebenfalls schnelle Algorithmen [3] basierend auf der schnellen Fourier-Transformation.

## 1.5 Integraldarstellungen und Fresnel-Integrale

Es sei  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $p := p_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein bivariates Polynom der Ordnung  $u \in \mathbb{N}_0$ . In [29, Lemma 4.1] wurde mithilfe des Integralsatzes von Gauß gezeigt, dass für die Darstellung

der Fourier-Transformation der Funktion  $P_u := p \chi_T$  Konstanten  $C_0, \dots, C_u > 0$  existieren, sodass

$$\mathcal{F}P_u(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-2} \int_T p(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{|\boldsymbol{\xi}|_2^{m+2}} \int_{\partial T} p_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) e^{-i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \quad (1.37)$$

erfüllt ist, wobei  $p_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := p(\mathbf{x})$ ,  $p_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{\boldsymbol{\xi}^T}{|\boldsymbol{\xi}|_2} \text{grad}_{\mathbf{x}}[p_{m-1}](\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  und  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  der äußere Normaleneinheitsvektor zum Rand  $\partial T$  ist.

Im nachfolgenden Lemma zeigen wir, dass die Funktionen  $p_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  auch explizit angegeben werden können. Mit der Darstellung der Variablen  $\boldsymbol{\xi} = \rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)$  in Polarkoordinaten entsprechen die Funktionen  $p_m$  den Richtungsableitungen  $m$ -ter Ordnung des Polynoms  $p$  in die entsprechenden Richtungen  $\boldsymbol{\Theta}(\theta)$ . Wir erhalten dadurch eine neue Darstellung von (1.37) in Polarkoordinaten, mit deren Hilfe sich der wichtige Zusammenhang der Resultate in [Abschnitt 4.4](#) zu den Richtungsableitungen  $m$ -ter Ordnung herstellen lässt.

**Lemma 1.18.**

Es sei  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $p = p_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein bivariates Polynom der Ordnung  $u \in \mathbb{N}_0$ . Dann existieren Konstanten  $C_0, \dots, C_u > 0$ , mit denen sich die Fourier-Transformation der Funktion  $P_u = p \chi_T$  darstellen lässt als

$$\mathcal{F}P_u(\rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)) = \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{\rho^{m+1}} \int_{\partial T} \partial_{\boldsymbol{\Theta}(\theta)}^m [p](\mathbf{x}) e^{-i\rho \boldsymbol{\Theta}^T(\theta) \mathbf{x}} \boldsymbol{\Theta}^T(\theta) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}).$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir mit vollständiger Induktion über die Variable  $m$ , dass

$$p_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|_2^{-m} \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} [p](\mathbf{x}).$$

Im weiteren Verlauf des Beweises wird aus Gründen der Übersicht auf die Angabe des Arguments  $\mathbf{x}$  im Polynom  $p$  verzichtet. Für  $m = 0$  folgt wegen  $p_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = p$  der Induktionsanfang. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass ein  $m \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$p_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}^T}{|\boldsymbol{\xi}|_2} \text{grad}_{\mathbf{x}}[p_{m-1}](\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|_2^{-m} \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} p.$$

Für den Induktionsschritt von  $m$  auf  $m + 1$  nutzen wir die Induktionsvoraussetzung und (1.2) sowie die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des Polynoms  $p$  nach dem Satz von Schwarz, um

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi}|_2^{m+1} p_{m+1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{\xi}^T \text{grad}_{\mathbf{x}} \left[ \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} p \right] \\ &= \boldsymbol{\xi}^T \text{grad}_{\mathbf{x}} \left[ \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \xi_1^r \xi_2^{m-r} \partial^{(r,0)} \partial^{(0,m-r)} p \right] \end{aligned}$$

zu erhalten. Mit ähnlichen Ideen wie im Beweis des klassischen binomischen Lehrsatzes können wir die letzte Zeile weiter umformen in

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \xi_1^{r+1} \xi_2^{m-r} \partial^{(r+1,0)} \partial^{(0,m-r)} p + \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \xi_1^r \xi_2^{m-r+1} \partial^{(r,0)} \partial^{(0,m-r+1)} p \\
 &= \xi_1^{m+1} \partial^{(m+1,0)} p + \sum_{r=1}^m \left( \binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} \right) \xi_1^r \xi_2^{m+1-r} \partial^{(r,0)} \partial^{(0,m+1-r)} p + \xi_2^{m+1} \partial^{(0,m+1)} p \\
 &= \sum_{r=1}^{m+1} \binom{m+1}{r} \xi_1^r \xi_2^{m+1-r} \partial^{(r,0)} \partial^{(0,m+1-r)} p \\
 &= \sum_{|\mathbf{r}|_1=m+1} \binom{m+1}{\mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} p.
 \end{aligned}$$

Nutzen wir die Darstellung  $\boldsymbol{\xi} = \rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)$  mit  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|_2$  und  $\boldsymbol{\Theta}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$  in Polarkoordinaten, so ergibt sich wegen  $|\mathbf{r}|_1 = m$

$$|\boldsymbol{\xi}|_2^{-m} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{r}} = (\cos \theta)^{r_1} (\sin \theta)^{r_2} = (\boldsymbol{\Theta}(\theta))^{\mathbf{r}}$$

und deshalb mit (1.8)

$$p_m(\mathbf{x}, \rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)) = \sum_{|\mathbf{r}|_1=m} \binom{m}{\mathbf{r}} (\boldsymbol{\Theta}(\theta))^{\mathbf{r}} \partial^{\mathbf{r}} [p](\mathbf{x}) = \partial_{\boldsymbol{\Theta}(\theta)}^m [p](\mathbf{x}), \quad (1.38)$$

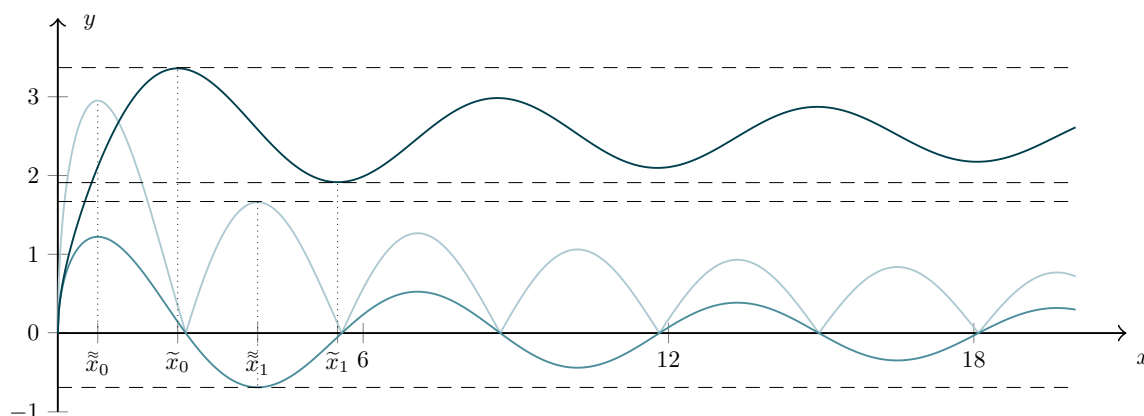
wobei  $\partial_{\boldsymbol{\Theta}(\theta)}^m [p]$  die Richtungsableitung  $m$ -ter Ordnung des Polynoms  $p$  in Richtung  $\boldsymbol{\Theta}(\theta)$  ist. Die Behauptung des Lemmas folgt durch die Darstellung von  $\boldsymbol{\xi}$  in Polarkoordinaten in (1.37) und das Einsetzen von (1.38).  $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir die sogenannten Fresnel-Integrale. Diese Funktionen spielen unter anderem in der Optik und Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Viele Eigenschaften dieser Funktionen sind in sehr viel ausführlicherer Form mit einer etwas anderen Definition beispielsweise in [1, Abschnitt 7.3] beschrieben.

Für  $x \in (0, \infty)$  definieren wir die Fresnel-Integrale in dieser Arbeit durch

$$F_c(x) := 2 \int_0^{\sqrt{x}} \cos(v^2) dv = \int_0^x \frac{\cos(v)}{\sqrt{v}} dv, \quad F_s(x) := 2 \int_0^{\sqrt{x}} \sin(v^2) dv = \int_0^x \frac{\sin(v)}{\sqrt{v}} dv.$$

Darüber hinaus definieren wir Summen und Differenzen von Fresnel-Integralen durch die Funktionen  $F^+(x) := F_c(x) + F_s(x)$  und  $F^-(x) := F_c(x) - F_s(x)$ , für die wir Abschätzungen im folgenden Lemma zeigen.



**Abbildung 1.2.** Darstellung der Funktionen  $F^+(x)$  (schwarz),  $F^-(x)$  (blau) und  $(1 + \sqrt{2}) |F^-(x)|$  (hellblau) für  $x \in [0, 20]$  zusammen mit den unteren und oberen Schranken der Funktionen (gestrichelte Linien) und den lokalen Extremstellen aus Lemma 1.19.

**Lemma 1.19.**

Es gelten die Abschätzungen

$$F^+(x) > F^-(x) > 0, \quad \text{falls } 0 < x < \frac{3\pi}{4},$$

$$F^+(x) > (1 + \sqrt{2}) |F^-(x)|, \quad \text{falls } x \geq \frac{3\pi}{4}.$$

*Beweis.* Aus der Definition der Fresnel-Integrale folgt, dass  $F_c(0) = F_s(0) = 0$  und für  $x > 0$  ist bekannt, dass  $F_c(x) > 0$  und  $F_s(x) > 0$  gelten. Damit erhalten wir

$$F^+(x) > F_c(x) > F^-(x). \quad (1.39)$$

Wir bestimmen zunächst die lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion  $F^+(x)$ . Für die Nullstellen der ersten Ableitung gilt

$$\frac{d}{dx} F^+(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{x}} = 0,$$

falls  $\tilde{x}_k := \frac{3\pi}{4} + k\pi$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  und für die zweite Ableitung folgt

$$\frac{d^2}{dx^2} F^+(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x + \sin x}{2(\sqrt{x})^3}.$$

Damit haben wir

$$\frac{\cos \tilde{x}_k - \sin \tilde{x}_k}{\sqrt{\tilde{x}_k}} - \frac{\cos \tilde{x}_k + \sin \tilde{x}_k}{2(\sqrt{\tilde{x}_k})^3} = \frac{\cos \tilde{x}_k - \sin \tilde{x}_k}{\sqrt{\tilde{x}_k}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{\tilde{x}_k}} < 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \sqrt{\frac{2}{\tilde{x}_k}} > 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

weshalb  $\tilde{x}_k$  die lokalen Maximalstellen der Funktion  $F^+$  für gerade  $k$  und die lokalen Minimalstellen für ungerade  $k$  sind. Um die globalen Extremstellen zu finden, definieren wir zunächst

$$I_0 := \int_0^{\tilde{x}_0} \frac{\cos v + \sin v}{\sqrt{v}} dv, \quad I_k := \int_{\tilde{x}_{k-1}}^{\tilde{x}_k} \frac{\cos v + \sin v}{\sqrt{v}} dv, \quad k \geq 1,$$

und sehen, dass  $F^+(\tilde{x}_k) = \sum_{j=0}^k I_j$ . Für  $v \in (\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k)$  gilt  $(\cos v + \sin v) > 0$ , falls  $k$  gerade ist und  $(\cos v + \sin v) < 0$ , falls  $k$  ungerade ist. Damit folgt  $I_k > 0$  für  $k$  gerade und  $I_k < 0$  für  $k$  ungerade. Zusätzlich gilt  $I_0 > 3.36 > 1.45 > |I_1|$  und da  $v^{-1/2}$  monoton wachsend ist, gilt  $|I_k| > |I_{k+1}|$  für  $k \geq 1$ .

Fassen wir diese Beobachtungen zusammen, folgt  $(I_k + I_{k+1}) < 0$  für  $k$  ungerade, weshalb wir für gerade  $k > 0$

$$F^+(\tilde{x}_k) = I_0 + \sum_{j=1}^k I_j < I_0 = F^+(\tilde{x}_0) < 3.37 \quad (1.40)$$

schließen können und  $\tilde{x}_0 = \frac{3\pi}{4}$  die globale Maximalstelle von  $F^+$  ist. Auf ähnliche Weise haben wir  $(I_k + I_{k+1}) > 0$  für gerade  $k$  und erhalten damit für ungerade  $k$

$$F^+(\tilde{x}_k) = I_0 + I_1 + \sum_{j=2}^k I_j > I_0 + I_1 = F^+(\tilde{x}_1) > 1.91, \quad (1.41)$$

weshalb das globale Minimum an der Stelle  $\tilde{x}_1 = \frac{7\pi}{4}$  angenommen wird und deshalb  $1.91 < F^+(x) < 3.37$  für  $x \geq \tilde{x}_0$  gilt. Für  $0 \leq x < \tilde{x}_0$  gilt offensichtlich  $0 \leq F^+(x) < 3.37$ .

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass  $\tilde{\tilde{x}}_k := \frac{\pi}{4} + k\pi$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  die lokalen Maximalstellen der Funktion  $F^-$  für gerade  $k$  und die lokalen Minimalstellen für ungerade  $k$  sind. Da  $\tilde{\tilde{x}}_0 < \frac{3\pi}{4} < \tilde{\tilde{x}}_1 = \frac{5\pi}{4}$  und  $F^-(\frac{3\pi}{4}) > 0.14 > 0$ , folgt  $F^-(x) > 0$  für  $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ , was zusammen mit (1.39) die erste Aussage des Lemmas beweist.

Mit ähnlichen Argumenten wie in (1.40) und (1.41) lässt sich zeigen, dass

$$-0.69 < F^-(\hat{x}_1) \leq F^-(x) \leq F^-(\hat{x}_2) < 0.53$$

für  $x \geq \frac{3\pi}{4}$  gilt. Da  $(1 + \sqrt{2})0.69 < 1.91$ , folgt mit (1.41), dass  $F^+(x) > (1 + \sqrt{2})|F^-(x)|$  für  $x \geq \frac{3\pi}{4}$ , womit der Beweis vollendet ist.  $\square$



# 2

## Richtungsabhängige trigonometrische Polynome

In diesem Kapitel wollen wir die Resultate aus [Abschnitt 1.4](#) aufgreifen. Dazu werden die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen aus [\[4, 5\]](#) in [Abschnitt 2.1](#) eingeführt. Wir verwenden jedoch eine abgeänderte Notation mittels mehrdimensionaler Indexmengen. Die Idee dafür entstammt [\[42, 56\]](#), wo neben der allgemeinen Theorie multipler Subdivisionsschemata insbesondere eine Shearlet-Multiskalenanalyse vorgestellt wurde. Nach der Einführung zulässiger Funktionen werden multivariate Indexmengen und Matrix-Vektoren betrachtet und anschließend für die Definition der dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen verwendet. Diese ist äquivalent zur Definition der Funktionen in [\[4, 5\]](#), weshalb sich auch die Eigenschaften in [Theorem 2.6](#) aus den genannten Quellen übertragen lassen.

Wir wenden die Theorie aus [Abschnitt 1.4](#) an, um multiple Waveletzerlegungen einer Funktion in [Abschnitt 2.2](#) mit den Indexmengen  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^k$  kompakt darzustellen. Ähnlich zu den Betrachtungen in [\[42, 56\]](#) ergibt sich daraus die Möglichkeit, verschiedene Zerlegungen einer Funktion mit de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen in Form eines Baumdiagramms in [Abbildung 2.2](#) übersichtlich darzustellen.

Der letzte Abschnitt des Kapitels widmet sich erneut den multiplen Waveletzerlegungen, in diesem Fall jedoch für eine spezielle Wahl der dyadischen Dilatationsmatrizen  $\mathbf{J}_j^{(i)}$  für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$ . Es stellt sich heraus, dass die erzeugenden Mengen, welche bei der Zerlegung einer quadratischen Matrix mit den durch die Indexmengen ausgewählten dyadischen Dilatationsmatrizen entstehen, in Parallelogrammen ausgerichtet entlang gewisser Richtungen enthalten sind. Es gibt demnach einen Zusammenhang zwischen der Wahl der multivariaten Indexmengen und der geometrischen Ausrichtung der dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen aus [Definition 2.5](#). Zum Abschluss des Kapitels werden erneut die Ergebnisse aus [Abschnitt 1.4](#) genutzt, um die Formeln für die Zerlegung einer Funktion in ihren Skalierungs- und Waveletanteil anzugeben. Dabei entstehen einige Vereinfachungen und das entsprechende Baumdiagramm der Zerlegungen ist in diesem Fall ein Binärbaum.

## 2.1 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition eindimensionaler zulässiger Funktionen, die auf ähnliche Weise bereits in [4, Abschnitt 4.5] verwendet wurden.

### Definition 2.1.

Eine nichtnegative gerade Funktion  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$  heißt zulässig, falls sie die Eigenschaften

$$\text{supp } g_\alpha = \left[-\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right], \quad g_\alpha(x) \text{ monoton fallend für } x \in \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right] \quad (2.1)$$

und

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha(x+z) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

erfüllt.

Der Beweis des folgenden Lemmas findet sich in [4, Lemma 4.21].

### Lemma 2.2.

Für eine zulässige Funktion gilt  $g_\alpha(x) = 1$  für alle  $x \in [-\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha]$ .

Die in Definition 2.1 geforderten Eigenschaften an eine Fensterfunktion erlauben die Konstruktion von zulässigen Funktionen mit beliebiger Glattheit, also insbesondere  $g_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R})$  für  $q \in \mathbb{N}_0$ . Wir wollen drei Beispiele für zulässige Funktionen mit verschiedener Glattheit geben.

### Beispiel 2.3.

i) Für  $\alpha = 0$  genügt die Funktion

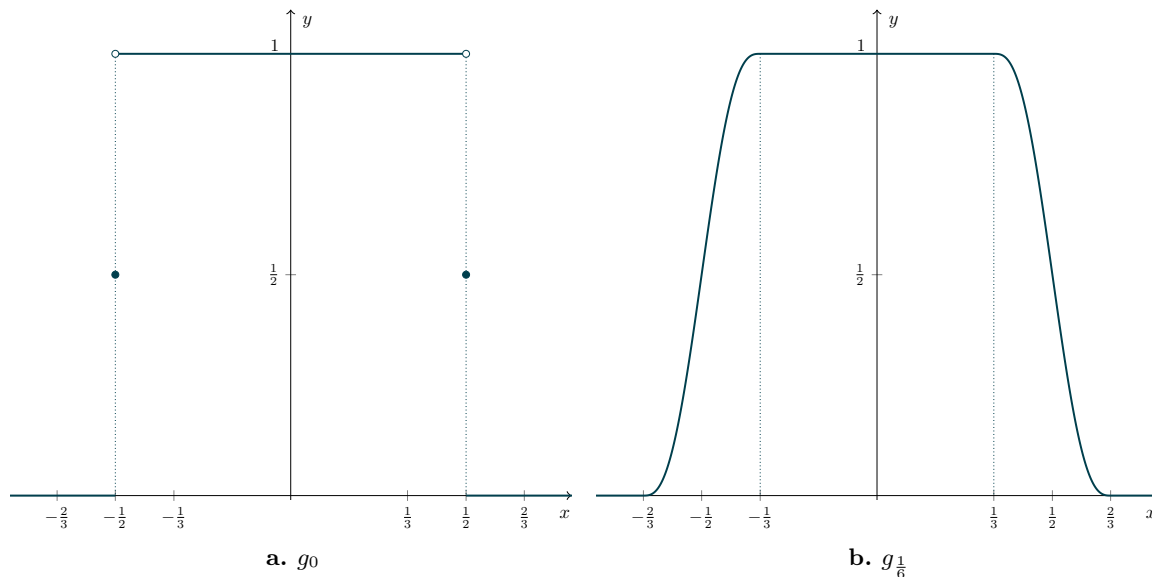
$$g_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{falls } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

den Eigenschaften aus Definition 2.1.

ii) Für  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  ist das stückweise definierte Polynom

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{2} - \alpha, \\ \frac{3}{16\alpha^3} \left(\frac{1}{2} - |x|\right)^5 - \frac{5}{8\alpha^3} \left(\frac{1}{2} - |x|\right)^3 + \frac{15}{16\alpha} \left(\frac{1}{2} - |x|\right) + \frac{1}{2}, & \text{falls } \frac{1}{2} - \alpha \leq |x| \leq \frac{1}{2} + \alpha, \\ 0, & \text{falls } |x| > \frac{1}{2} + \alpha, \end{cases}$$

welches in [16] konstruiert wurde, eine zulässige Funktion und es gilt  $g_\alpha \in C_0^2(\mathbb{R})$ .



**Abbildung 2.1.** Visualisierung der zulässigen Funktionen  $g_\alpha$  aus [Beispiel 2.3](#) i) und ii).

iii) Für  $b > 0$  und eine Funktion

$$r_b(x) = \begin{cases} e^{-b/x^2}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

definieren wir eine weitere Funktion  $s_{\alpha,b}(x) = r_b(\frac{1}{2} + \alpha + x) r_b(\frac{1}{2} + \alpha - x)$ . Dann ist

$$g_{\alpha,b}(x) = \frac{s_{\alpha,b}(x)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{\alpha,b}(x+k)} \quad (2.3)$$

eine zulässige Funktion mit  $g_{\alpha,b}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Für das weitere Vorgehen benötigen wir das Tensorprodukt zulässiger Funktionen. Dazu definieren wir zweidimensionale zulässige Funktionen  $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = g_\alpha(x_1) g_\alpha(x_2) \quad (2.4)$$

und bemerken, dass sich die Differenzierbarkeit der univariaten zulässigen Funktionen auf  $\Phi_\alpha$  vererbt, also  $\Phi_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$  gilt, falls  $g_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R})$ . Die Konstruktion der Fensterfunktionen als Tensorprodukt in (2.4) wurde bereits in [4, Abschnitt 4.5] verwendet und die Funktionen  $\Phi_0$  entsprechen dem Dirichlet-Fall aus [43]. Die Funktionen  $\Phi_\alpha$  werden in [Definition 2.5](#) in leicht modifizierter Form als Fensterfunktionen im Frequenzbereich dienen, durch deren Abtastung an ganzzahligen Punkten  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  die Fourier-Koeffizienten der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen entstehen.

Für  $l \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$  sei

$$\mathbb{Z}_{l,m} := \{l, l+1, \dots, l+m-1\} \quad (2.5)$$

sowie  $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}_{0,m} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ . In diesem Kapitel benötigen wir mehrdimensionale Indextmengen für die kompakte Notation von multiplen Waveletterlegungen. Dazu schreiben wir  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$ , falls  $e_j \in \mathbb{Z}_{l,m}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Für  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$  und  $1 \leq i \leq k \leq n$  sei  $\mathbf{e}_i^k := (e_i, \dots, e_k) \in \mathbb{Z}_{l,m}^{k-i}$  und wir definieren  $\mathbf{e}_i := \mathbf{e}_i^n = (e_i, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}_{l,m}^{n-i}$  sowie  $\mathbf{e}^k := \mathbf{e}_1^k = (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{Z}_{l,m}^k$  und  $\check{\mathbf{e}} := (e_n, \dots, e_1) \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$ .

Im Folgenden sei

$$\mathcal{J} := \mathcal{J}_{l,m} := (\mathbf{J}_j)_{j=l}^{l+m-1} = (\mathbf{J}_l, \mathbf{J}_{l+1}, \dots, \mathbf{J}_{l+m-1}) \quad (2.6)$$

mit Matrizen  $\mathbf{J}_j \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $\det \mathbf{J}_j = 2$  für  $j = l, \dots, l+m-1$  ein fest gewählter Vektor, der  $m$  dieser Matrizen enthält. Wir folgen den Betrachtungen aus [5, Abschnitt 4], jedoch mit einer etwas anderen Notation durch die mehrdimensionalen Indextmengen  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$ . Dazu definieren wir weitere Matrix-Vektoren durch

$$\mathcal{J}_{\mathbf{e}_i^k} := \begin{cases} (\mathbf{J}_{e_j})_{j=i}^k, & \text{falls } 1 \leq i \leq k \leq m, \\ \emptyset, & \text{sonst,} \end{cases}$$

in denen durch den Index  $\mathbf{e}$  festgelegt wird, welche Matrix aus  $\mathcal{J}$  an welcher Stelle des Matrix-Vektors  $\mathcal{J}_{\mathbf{e}_i^k}$  steht. Darüber hinaus verwenden wir die Notation

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}_i^k} := \mathbf{J}_{e_i} \mathbf{J}_{e_{i+1}} \cdots \mathbf{J}_{e_k}.$$

#### Beispiel 2.4.

Wir wollen die eingeführte Notation anhand eines Beispiels verdeutlichen. Dazu seien  $l = 0$ ,  $m = 6$  und somit  $\mathcal{J} = (\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_5)$ . Wir wählen  $n = 7$  und  $\mathbf{e} = (2, 4, 1, 2, 5, 3, 0) \in \mathbb{Z}_6^7$ . Dann ist

$$\mathcal{J}_{\mathbf{e}} = \mathcal{J}_{\mathbf{e}_1^7} = (\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_5, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_0)$$

und beispielsweise

$$\mathcal{J}_{\mathbf{e}_3^6} = (\mathbf{J}_5, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_4)$$

sowie

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}_3^6} = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_5 \mathbf{J}_3.$$

Es seien zwei Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sowie eine reguläre Matrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  gegeben. Der Operator  $\Theta_{\mathbf{Q}}$  ist definiert durch

$$\Theta_{\mathbf{Q}}(f_1, f_2) := \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} f_1(\circ + \mathbf{Q}^T \mathbf{z}) \right) f_2(\mathbf{Q}^{-T} \circ) \quad (2.7)$$

und wurde bereits in [4, Abschnitt 4.2] betrachtet. Im Folgenden sei eine zweidimensionale zulässige Funktion  $\Phi_\alpha \in C_0^q$  aus (2.4) für  $q \in \mathbb{N}_0$  fest gewählt. Ebenfalls basierend auf [4, Abschnitt 4.2] führen wir mit dem Matrix-Vektor  $\mathcal{J}_{\mathbf{e}_i^k}$  und den zweidimensionalen zulässigen Funktion  $\Phi \in C_0^q$  rekursiv die Funktionen

$$B_{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_i^k}} := B_{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_i^k}}^{\Phi_\alpha} := \begin{cases} \Theta_{\mathbf{J}_{e_i}} \left( \Phi_\alpha, B_{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{i+1}^k}} \right), & \text{falls } i \leq k, \\ \Phi_\alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein. Für die im dyadischen Fall eindeutigen Vektoren  $\mathbf{v}_{e_i} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{e_i}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{w}_{e_i} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{e_i}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  sind die Funktionen  $\tilde{B}_{\mathcal{J}_{e_i^k}}^{\Phi_\alpha}$  definiert durch

$$\tilde{B}_{\mathcal{J}_{e_i^k}} := \tilde{B}_{\mathcal{J}_{e_i^k}}^{\Phi_\alpha} := \exp(-2\pi i \circ^T \mathbf{w}_{e_i}) \Theta_{\mathbf{J}_{e_i}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}_{e_i}}{2\pi}} [\Phi_\alpha], B_{\mathcal{J}_{e_{i+1}^k}} \right). \quad (2.8)$$

Mit diesen Funktionen können wir die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen einführen. [Definition 2.5](#) ist dabei mit veränderter Notation äquivalent zu [[4](#), Definition 4.6 und Definition 4.11].

**Definition 2.5.**

Für  $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $|\det \mathbf{M}_0| = 1$  und  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$  definieren wir für  $j = 0, \dots, n$  die Matrizen

$$\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j} := \left( \prod_{i=1}^j \mathbf{J}_{e_{n-j+1}} \right) \mathbf{M}_0.$$

Die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen  $\varphi_j^{\mathbf{e}}$  sind gegeben durch

$$\varphi_j^{\mathbf{e}} := \varphi_{\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}}^{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}} := 2^{-j/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} B_{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}^{-T} \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T \circ}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Wavelets  $\psi_j^{\mathbf{e}}$  sind definiert durch

$$\psi_j^{\mathbf{e}} := \psi_{\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}}^{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}} := 2^{-j/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \tilde{B}_{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}^{-T} \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T \circ}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Eine Problematik an dieser Definition ist die Abhängigkeit des  $j$ -ten Levels von den Levels  $j+1, j+2, \dots, n$  in den Funktionen  $\varphi_j^{\mathbf{e}}$  und  $\psi_j^{\mathbf{e}}$ , sodass bei einer Multiskalenanalyse ein Skalierungs- beziehungsweise Waveletraum eventuell von unendlich vielen nachfolgenden Räumen abhängt. Dies macht die praktische Umsetzung der in [Definition 2.5](#) beschriebenen dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen selbst im Fall endlicher Waveletzerlegungen einer Funktion sehr schwierig. In [[4](#), Abschnitt 4.5] wurde untersucht, unter welchen Umständen diese Abhängigkeit aufgehoben werden kann. Im nächsten Kapitel kommen wir bei der Konstruktion trigonometrischer Shearlets auf dieses Thema zurück und können die besagte Abhängigkeit mit [Lemma 3.3](#) umgehen.

Die von den Translaten der einzelnen Funktionen aufgespannten Räume seien im Folgenden mit

$$V_j^{\mathbf{e}} := V_{\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}}^{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}} := \text{span}\{\mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_j^{\mathbf{e}} : \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j})\}$$

und

$$W_j^{\mathbf{e}} := V_{\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j}}^{\mathcal{J}_{\mathbf{e}_{j+1}}} := \text{span}\{\mathcal{T}_{\mathbf{y}} \psi_j^{\mathbf{e}} : \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^j})\}$$

bezeichnet. Das folgende Theorem liefert den Grund dafür, die Funktionen aus [Definition 2.5](#) de la Vallée Poussin-artige Skalierungs- und Waveletfunktionen zu nennen. Es sichert das Enthaltensein der Funktionen im nächsthöheren Skalierungsraum und die Zerlegungseigenschaft [\(1.31\)](#) aus [Abschnitt 1.4](#). Der Beweis setzt sich aus [[5](#), Theorem 4.3 und Theorem 4.6] zusammen und wird hier nicht aufgeführt.

**Theorem 2.6.**

Für  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^n$  und  $j \in \mathbb{N}$  seien die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen und die zugehörigen Wavelets aus [Definition 2.5](#) gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- i) Die Funktionen  $\varphi_j^{\mathbf{e}}$  und  $\psi_j^{\mathbf{e}}$  erfüllen die Beziehungen  $\varphi_j^{\mathbf{e}} \in V_{j+1}^{\mathbf{e}}$  und  $\psi_j^{\mathbf{e}} \in V_{j+1}^{\mathbf{e}}$ .
- ii) Die jeweiligen Translate  $\mathcal{T}_{\mathbf{y}}\varphi_j^{\mathbf{e}}$  beziehungsweise  $\mathcal{T}_{\mathbf{y}}\psi_j^{\mathbf{e}}$  mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}j})$  sind linear unabhängig.
- iii) Der Raum  $V_{j+1}^{\mathbf{e}}$  lässt sich zerlegen in  $V_{j+1}^{\mathbf{e}} = V_j^{\mathbf{e}} \oplus W_j^{\mathbf{e}}$ .

## 2.2 Multiple dyadische Waveletzerlegungen

Im Folgenden wollen wir die Resultate aus [Abschnitt 1.4](#) auf die dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen  $\varphi_j^{\mathbf{e}}$  und die zugehörigen Wavelets  $\psi_j^{\mathbf{e}}$  aus dem letzten Abschnitt anwenden, um eine gegebene Funktion in Abhängigkeit des mehrdimensionalen Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^k$  für  $k \leq j + 1$  zu zerlegen. Diese Notation wurde in ähnlicher Form bereits in [\[56, Abschnitt 4.2\]](#) verwendet, um die Theorie multipler Multiresolutionsanalysen mithilfe von Mehrfachfilterbänken umzusetzen. Die Zerlegung von translationsinvarianten Räumen periodischer Funktionen mit dyadischen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen weist daher konzeptuelle Parallelen zu den Betrachtungen in [\[56\]](#) auf.

Es sei  $\mathbf{M}_{j+1} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  eine reguläre Matrix und  $V_{j+1}^{\varphi_{j+1}} := V_{\mathbf{M}_{j+1}}^{\varphi_{j+1}} \subset L_2(\mathbb{T}^2)$  der durch die de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion  $\varphi_{j+1}$  aufgespannte  $\mathbf{M}_{j+1}$ -invariante Raum. Wegen [Lemma 1.15](#) gibt es Koeffizienten  $d_{\mathbf{y}}$  mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})$ , die für  $f \in V_{j+1}^{\varphi_{j+1}}$  die Darstellung

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} d_{\mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}}\varphi_{j+1} \tag{2.9}$$

ermöglichen. Wie im vorherigen Abschnitt sei

$$\mathcal{J} = (\mathbf{J}_j)_{j=l}^{l+m-1} = (\mathbf{J}_l, \mathbf{J}_{l+1}, \dots, \mathbf{J}_{l+m-1})$$

ein fest gewählter Matrix-Vektor, der  $m$  dyadische Dilatationsmatrizen enthalte. Für einen mehrdimensionalen Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^k$  sei  $\mathcal{J}_{\mathbf{e}_1^k} = (\mathbf{J}_{e_1}, \dots, \mathbf{J}_{e_k})$  der zugehörige Matrix-Vektor. Die Idee der multiplen Waveletzerlegungen entsteht aus den verschiedenen Möglichkeiten die Matrix  $\mathbf{M}_{j+1}$  mit den in  $\mathcal{J}_{\mathbf{e}_1^k}$  enthaltenen Dilatationsmatrizen zu zerlegen. Dazu definieren wir für  $1 \leq l \leq k$  Matrizen

$$\mathbf{M}_{\mathbf{e}l} := (\mathbf{J}_{\mathbf{e}l})^{-1} \mathbf{M}_{j+1} = (\mathbf{J}_{e_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_{e_l})^{-1} \mathbf{M}_{j+1} \tag{2.10}$$

und erhalten somit die Zerlegung

$$\mathbf{M}_{j+1} = \mathbf{J}_{\mathbf{e}l} \mathbf{M}_{\mathbf{e}l} = \mathbf{J}_{e_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_{e_l} \mathbf{M}_{\mathbf{e}l}, \tag{2.11}$$

also  $\mathbf{M}_{\mathbf{e}l-1} = \mathbf{J}_{e_l} \mathbf{M}_{\mathbf{e}l}$ . Wir wollen die Funktion  $f \in V_{j+1}^{\varphi_{j+1}}$  aus [\(2.9\)](#) analog zu [\(1.34\)](#) aus [Abschnitt 1.4](#) zerlegen, dieses Mal jedoch abhängig vom Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^k$ . Ein Vorteil der

## 2.2 Multiple dyadische Waveletzerlegungen

Notation ist, dass auf alle Zerlegungen mittels  $\mathbf{e}^i$ , also den ersten  $i$  Komponenten des mehrdimensionalen Index  $\mathbf{e}$  zugegriffen werden kann. Für das erste Level gilt  $\mathbf{e}^1 = e_1 \in \mathbb{Z}_{l,m}$ , weshalb sich  $m$  verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten ergeben. Nach [Theorem 2.6](#) gelten  $\varphi_j^{\mathbf{e}} = \varphi_{e_1} \in V_{j+1}^{\varphi_{j+1}}$ ,  $\psi_j^{\mathbf{e}} = \psi_{e_1} \in V_{j+1}^{\psi_{j+1}}$  und deshalb die Darstellungen

$$\varphi_{e_1} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} a_{e_1, \mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}, \quad \psi_{e_1} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} b_{e_1, \mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}. \quad (2.12)$$

Die Koeffizienten  $a_{e_1, \mathbf{y}}$  und  $b_{e_1, \mathbf{y}}$  sind gegeben durch ihre diskrete Fourier-Transformationen (vgl. [\[5, Abschnitt 4\]](#))

$$\hat{a}_{e_1, \mathbf{h}} := \sqrt{2} \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{M}_{e_1}^{-\mathbf{T}} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{e_1}^{\mathbf{T}} \mathbf{z}) \right), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^{\mathbf{T}}), \quad (2.13)$$

und

$$\hat{b}_{e_1, \mathbf{h}} := \sqrt{2} \exp(-2\pi i \mathbf{h}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{e_1}^{-1} \mathbf{w}_{e_1}) \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{M}_{e_1}^{-\mathbf{T}} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{e_1}^{\mathbf{T}} \mathbf{z} - \mathbf{v}_{e_1}) \right), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^{\mathbf{T}}), \quad (2.14)$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{v}_{e_1} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{e_1}^{\mathbf{T}}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{w}_{e_1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{e_1}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  im dyadischen Fall eindeutig bestimmt sind. Mit diesen Koeffizienten erhalten wir mit [\(1.35\)](#) die Zerlegung

$$f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{e_1})} \left( d_{e_1, \mathbf{x}, 0} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \varphi_{e_1} + d_{e_1, \mathbf{x}, 1} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \psi_{e_1} \right).$$

Wir wollen dieselbe Zerlegungs-idee auf den Skalierungsraum  $V_{\mathbf{M}_{e_1}}^{\varphi_{e_1}} = V_{e_1}$  anwenden und erhalten wiederum mit [Theorem 2.6](#) die Darstellungen

$$\varphi_{e_2} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{e_1})} a_{e_2, \mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{e_1} \in V_{e_1}, \quad \psi_{e_2} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{e_1})} b_{e_2, \mathbf{y}} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{e_1} \in V_{e_1}.$$

Die diskreten Fourier-Transformationen der gesuchten Koeffizienten sind analog zu [\(2.13\)](#) und [\(2.14\)](#) gegeben durch

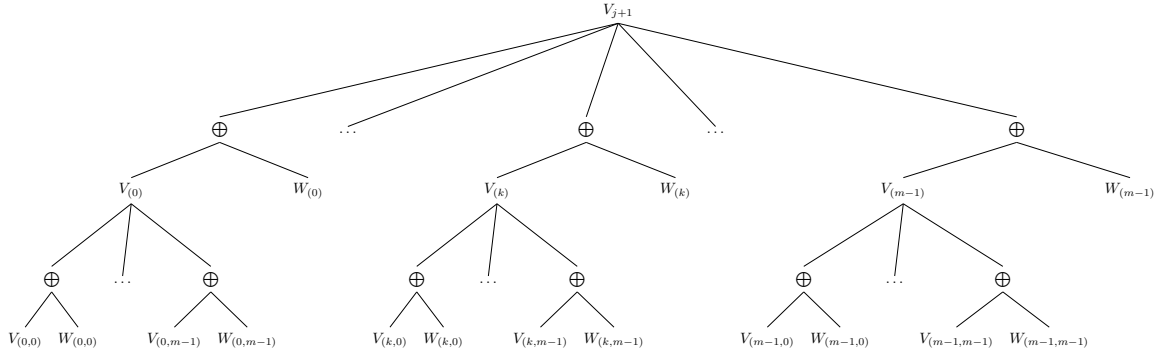
$$\hat{a}_{e_2, \mathbf{h}} := \sqrt{2} \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{M}_{e_2}^{-\mathbf{T}} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{e_2}^{\mathbf{T}} \mathbf{z}) \right), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{e_1}^{\mathbf{T}}),$$

und

$$\hat{b}_{e_2, \mathbf{h}} := \sqrt{2} \exp(-2\pi i \mathbf{h}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{e_2}^{-1} \mathbf{w}_{e_2}) \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{M}_{e_2}^{-\mathbf{T}} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{e_2}^{\mathbf{T}} \mathbf{z} - \mathbf{v}_{e_2}) \right), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{e_1}^{\mathbf{T}}).$$

Damit erhalten wir die Zerlegung

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{e_2})} \left( d_{e_2, \mathbf{y}, 0} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{e_2} + d_{e_2, \mathbf{y}, 1} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \psi_{e_2} \right) + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{e_1})} d_{e_1, \mathbf{y}, 1} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \psi_{e_1}.$$



**Abbildung 2.2.** Visualisierung einer multiplen Waveletzerlegung über zwei Level festgelegt durch den Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^2$  mithilfe eines Baumdiagramms. Der vollständige Baum enthält  $m^2$  Blätter, jedoch sind die ausgelassenen Zweige zur besseren Übersicht durch Punkte gekennzeichnet.

Wiederholen wir diesen Vorgang für insgesamt  $k$  Level, so ergeben sich insgesamt  $m^k$  verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten für eine Funktion  $f \in V_{j+1}$  und es gilt

$$f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^k})} d_{\mathbf{e}^k, \mathbf{x}, 0} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{e}^k} + \sum_{l=k}^1 \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^l})} d_{\mathbf{e}^l, \mathbf{x}, 1} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{e}^l}.$$

Eine kompakte Darstellung dieser multiplen Zerlegungen in Form eines Baumdiagramms für zwei Zerlegungsstufen findet sich in [Abbildung 2.2](#). Dabei bildet der Ausgangsraum  $V_{j+1}$  die Wurzel des Baums und die Blätter enthalten die Skalierungs- und Waveleträume  $V_{\mathbf{e}^2}$  und  $W_{\mathbf{e}^2}$  des zweiten Levels. Die Anzahl der Blätter hängt von der Mächtigkeit der Menge  $\mathcal{J}$  der dyadischen Dilatationsmatrizen, gegeben durch den Parameter  $m$ , ab.

Um eine Funktion  $f \in V_{j+1}$  aus einer Zerlegung über  $k$  Level zu rekonstruieren, startet man an einem der Blätter und über die direkten Summen

$$V_{j+1} = V_{\mathbf{e}^k} \oplus W_{\mathbf{e}^k} \oplus W_{\mathbf{e}^{k-1}} \oplus W_{\mathbf{e}^{k-2}} \oplus \dots \oplus W_{\mathbf{e}^1} = V_{\mathbf{e}^k} \oplus \bigoplus_{i=k}^1 W_{\mathbf{e}^i}$$

und der Wavelet-Synthese (1.36) kann die Funktion  $f$  Stück für Stück mithilfe der vorherigen Level rekonstruiert werden.

### 2.3 Richtungsspezifische Zerlegungspfade

In den letzten beiden Abschnitten wurde der Matrix-Vektor

$$\mathcal{J} = (\mathbf{J}_j)_{j=l}^{l+m-1} = (\mathbf{J}_l, \mathbf{J}_{l+1}, \dots, \mathbf{J}_{l+m-1})$$

beliebig aber fest gewählt. Dieser bestimmt, welche Matrizen durch den Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{l,m}^k$  für die multiplen Waveletzerlegungen ausgewählt werden. In diesem Abschnitt wählen wir den Matrix-Vektor  $\mathcal{J}$  auf eine spezielle Art und Weise und ergänzen und erweitern damit die Betrachtungen aus [4, Abschnitt 4.4], wo bereits der Zusammenhang zwischen der Wahl spezieller Dilatationsmatrizen und der Ausrichtung der Trägermengen im Frequenzbereich bemerkt wurde. Wie sich in diesem Abschnitt zeigen wird, ist es mit der Notation der mehrdimensionalen Indizes aus den letzten beiden Abschnitten möglich, jeden durch den Index  $\mathbf{e}$  festgelegten Zerlegungspfad einer multiplen Waveletzerlegung mit einer geometrischen Interpretation in Form der Ausrichtung der erzeugenden Mengen auf den einzelnen Levels zu versehen. Dabei entstehen große Parallelen zu den Betrachtungen aus [42, 56] über multiple Subdivisionsschemata und multiple Multiskalenanalysen.

Wir beginnen unsere Überlegungen mit der Definition spezieller dyadischer Dilatationsmatrizen, welche bereits in [4, Kapitel 4] genutzt wurden und gegeben sind durch

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^\pm := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^\pm := \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  betrachten wir im Folgenden die mehrdimensionalen Indexmengen

$$\mathbf{e} \in \{0, -1\}^k \cup \{0, 1\}^k = \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k,$$

wobei für die rechte Seite die Notation aus (2.5) genutzt wird. Wir betrachten die zugehörigen  $k$ -bit Binärdarstellungen

$$(\mathbf{e})_2 := \sum_{l=1}^k e_l 2^{l-1}. \quad (2.16)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Binärdarstellung (2.16) gibt es für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  mit  $|p| < 2^k$  genau ein  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$ , sodass  $(\mathbf{e})_2 = p$ . Im Folgenden sei  $\mathcal{J}^{(h)} := (\mathbf{J}_{-1}^{(h)}, \mathbf{J}_0^{(h)}, \mathbf{J}_1^{(h)})$  mit

$$\mathbf{J}_i^{(h)} = \begin{cases} \mathbf{Y}, & \text{falls } i = 0, \\ \mathbf{Y}^-, & \text{falls } i = -1, \\ \mathbf{Y}^+, & \text{falls } i = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Die Idee, dyadische Dilatationsmatrizen mit Binärdarstellungen zu identifizieren, wurde bereits in [4, Abschnitt 4.4] für die Annäherung von Richtungen in Waveleträumen diskutiert. Wir greifen dies hier auf und formulieren ein Lemma, in welchem erstmals die genaue Form des Produkts dyadischer Dilatationsmatrizen aus (2.15) in Abhängigkeit einer mehrdimensionalen Indexmenge  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$  angegeben wird.

**Lemma 2.7.**

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$ . Dann gilt

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}^k}^{(h)} = \mathbf{J}_{e_1}^{(h)} \mathbf{J}_{e_2}^{(h)} \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_{e_k}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & (\check{\mathbf{e}})_2 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über  $k \in \mathbb{N}$ . Für den Induktionsanfang  $k = 1$  gilt

$$\mathbf{J}_{e_1}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass

$$\mathbf{J}_{e^k}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & (\check{\mathbf{e}})_2 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{l=1}^k e_{k+1-l} 2^{l-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

für ein festes  $k \in \mathbb{N}$  gültig ist. Dann folgt für den Induktionsschritt

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{e^{k+1}}^{(h)} &= \mathbf{J}_{e^k}^{(h)} \mathbf{J}_{e^{k+1}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{l=1}^k e_{k+1-l} 2^{l-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_{k+1} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e_{k+1} + \sum_{l=1}^k e_{k+1-l} 2^l \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_{l=0}^k e_{k+1-l} 2^l \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{l=1}^{k+1} e_{k+2-l} 2^{l-1} \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wodurch der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.  $\square$

### Bemerkung 2.8.

Mit fast identischem Beweis wie in Lemma 2.7 lässt sich für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$  und  $\mathcal{J}^{(v)} := (\mathbf{J}_{-1}^{(v)}, \mathbf{J}_0^{(v)}, \mathbf{J}_1^{(v)})$  mit der Festlegung der Matrizen

$$\mathbf{J}_i^{(v)} = \begin{cases} \mathbf{X}, & \text{falls } i = 0, \\ \mathbf{X}^-, & \text{falls } i = -1, \\ \mathbf{X}^+, & \text{falls } i = 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

die Gleichung

$$\mathbf{J}_{e^k}^{(v)} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ (\check{\mathbf{e}})_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

zeigen.

Ausgehend von der Zerlegung (2.10) aus dem letzten Abschnitt betrachten wir für die dyadischen Dilatationsmatrizen aus (2.17) die Zerlegung einer Diagonalmatrix  $\mathbf{M}_j = \text{diag}(2^j, 2^j) \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  für  $j \in \mathbb{N}$  und  $k \leq j$  in das Produkt

$$\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)} := \left( \mathbf{J}_{e^k}^{(h)} \right)^{-1} \mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 1 & (\check{\mathbf{e}})_2 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^j & \ell 2^{j-k} \\ 0 & 2^{j-k} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

wobei  $\ell = -(\check{e})_2$ . Analog ergibt sich für die dyadischen Dilatationsmatrizen aus (2.20) die Zerlegung

$$\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \left(\mathbf{J}_{\mathbf{e}^k}^{(\mathfrak{v})}\right)^{-1} \mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ (\check{e})_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-k} & 0 \\ \ell 2^{j-k} & 2^j \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Des Weiteren sei  $\mathbf{N}_{j,k}^{(i)} := \mathbf{N}_{j,k,0}^{(i)}$  für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$ . Damit lässt sich die Matrix  $\mathbf{M}_j$  in Abhängigkeit von der Festlegung der dyadischen Dilatationsmatrizen zerlegen in

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\ell \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ -\ell & 1 \end{pmatrix} \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})}. \quad (2.24)$$

Der hochgestellte Index  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  wird im Folgenden stets dafür verwendet, zwischen den beiden möglichen Festlegungen der Matrix-Vektoren  $\mathcal{J}^{(i)}$  zu unterscheiden. Der Index  $\mathfrak{h}$  signalisiert dabei die Wahl der dyadischen Dilatationsmatrizen  $\mathbf{J}_l^{(\mathfrak{h})}$ ,  $l = 1, \dots, k$ , aus (2.17) und der Index  $\mathfrak{v}$  entsprechend die dyadischen Dilatationsmatrizen  $\mathbf{J}_l^{(\mathfrak{v})}$ ,  $l = 1, \dots, k$ , aus (2.20).

**Beispiel 2.9.**

Wir wählen  $j = 6$  und  $\mathbf{e} = (-1, 0, -1) \in \mathbb{Z}_{-1,2}^3$ , weshalb  $k = 3$  gilt. Dann folgt für die 3-Bit Binärdarstellung  $(\check{e})_2 = -1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 - 1 \cdot 2^2 = -5$ , weshalb die Matrix aus Lemma 2.7 von der Form

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(\mathfrak{h})} = \begin{pmatrix} 1 & (\check{e}) \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Angenommen, wir wählen die zugrunde liegenden dyadischen Dilatationsmatrizen wie in (2.20), dann ergibt sich

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(\mathfrak{v})} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ (\check{e}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

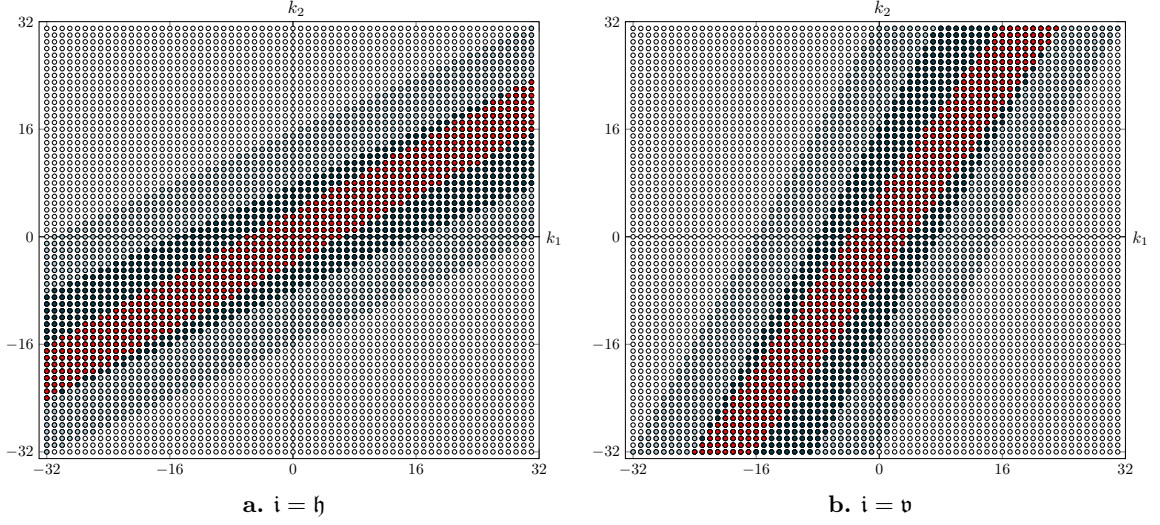
Mit  $\ell = -(\check{e})_2 = 5$  sind die Matrizen aus (2.22) und (2.23) von der Form

$$\mathbf{N}_{6,3,5}^{(\mathfrak{h})} = \begin{pmatrix} 2^6 & 5 \cdot 2^3 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 40 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{6,3,5}^{(\mathfrak{v})} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 5 \cdot 2^3 & 2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 40 & 64 \end{pmatrix}$$

und für die Zerlegung der Matrix  $\mathbf{M}_j$  in (2.24) ergibt sich

$$\mathbf{M}_6 = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 40 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 40 & 64 \end{pmatrix}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Muster, welche durch die Matrizen  $\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}$  erzeugt werden, eine vom Parameter  $\ell$  unabhängige einfache Tensorprodukt-Struktur aufweisen.



**Abbildung 2.3.** Die erzeugenden Mengen (von hell nach dunkel) bei einer sukzessiven Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{M}_6$  mit den dyadischen Dilatationsmatrizen aus [Beispiel 2.9](#). Die roten Punkte entsprechen den erzeugenden Mengen  $\mathcal{G}\left(\left(\mathbf{N}_{6,3,5}^{(i)}\right)^T\right)$ .

**Lemma 2.10.**

Für das Muster der Matrizen aus [\(2.22\)](#) und [\(2.23\)](#) gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)}) &= \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(h)}) \\ &= \left\{2^{-j} n_1 : n_1 = 0, \dots, 2^j - 1\right\} \times \left\{2^{k-j} n_2 : n_2 = 0, \dots, 2^{j-k} - 1\right\}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(v)}) &= \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(v)}) \\ &= \left\{2^{k-j} n_1 : n_1 = 0, \dots, 2^{j-k} - 1\right\} \times \left\{2^{-j} n_2 : n_2 = 0, \dots, 2^j - 1\right\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Matrix  $\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)}$  kann als Produkt

$$\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^{j-k} \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{N}_{j,k}^{(h)} \quad (2.25)$$

geschrieben werden, wobei  $\det \mathbf{Q} = 1$  gilt und die Diagonalmatrix  $\mathbf{N}_{j,k,0}^{(h)}$  das in der Behauptung angegebene Muster mit Tensorprodukt-Struktur erzeugt. Die erste Aussage des Lemmas folgt damit aus [Lemma 1.4](#). Der Beweis der zweiten Aussage verläuft analog mit vertauschten Koordinaten.  $\square$

Im nächsten Teil dieses Abschnitts sollen die verschiedenen Möglichkeiten der Zerlegung einer Diagonalmatrix  $\mathbf{M}_j$  mittels [\(2.24\)](#) mit einer geometrischen Interpretation in Form von

Richtungen in den auftretenden erzeugenden Mengen versehen werden. Um die Idee dahinter näher zu illustrieren, sind die erzeugenden Mengen nach jedem Zerlegungsschritt mit einer der Matrizen  $\mathbf{J}_{e_i}$  aus [Beispiel 2.9](#) in [Abbildung 2.3](#) verschiedenfarbig dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass die erzeugenden Mengen in länglichen Parallelogrammen enthalten sind, deren Ausrichtungen wir im Folgenden näher untersuchen wollen.

Durch die Faktorisierung in [\(2.25\)](#) sehen wir, dass die Abbildung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  durch die Matrizen  $(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)})^T$  mit  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  von der Form

$$(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})})^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ \ell 2^{j-k} & 2^{j-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^{j-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})})^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2^{j-k} & \ell 2^{j-k} \\ 0 & 2^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-k} & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

zunächst eine Scherung mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und dann eine Streckung mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 2^{j-k} & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}$  bewirkt. In [Abbildung 2.4](#) wird dies an einem Beispiel mit  $j = 2$  und  $k = \ell = 1$  verdeutlicht. Betrachten wir das Quadrat  $[0, \frac{1}{2}]^2$  (dunkle Fläche), so wird dieses zunächst mittels der Scherung auf das mittelhelle und von einer gestrichelten Linie umrandete Parallelogramm abgebildet. Die anschließende Multiplikation mit der Diagonalmatrix streckt das Parallelogramm entsprechend der Parameter  $j$  und  $k$  (hellste Fläche), sodass dieses durch die Vektoren

$$(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})})^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-1} \\ \ell 2^{j-k-1} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})})^T \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{j-k-1} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})})^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell 2^{j-k-1} \\ 2^{j-1} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})})^T \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-k-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

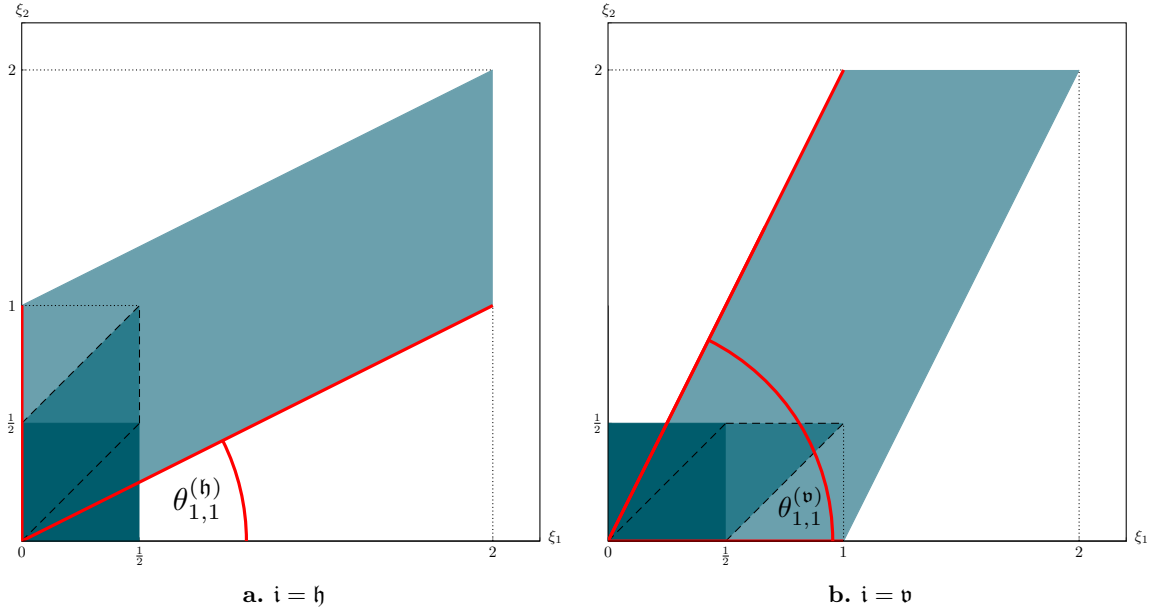
aufgespannt wird. Diese Vektoren sind in [Abbildung 2.4](#) als rote Linien dargestellt und wurden bereits in [\[4, Abschnitt 4.4\]](#) betrachtet, weshalb wir die dort getroffene Definition über Richtungen von Matrizen hier in ähnlicher Weise aufgreifen wollen.

**Definition 2.11.**

Für eine reguläre Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  seien Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\mathbf{v}_1 := \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es sei  $i_j, j = 1, 2$ , eine Sortierung der Indizes nach absteigender Größe der euklidischen Normen der beiden Vektoren, also  $|\mathbf{v}_{i_1}|_2 \geq |\mathbf{v}_{i_2}|_2$ . Dann nennen wir  $\mathbf{r}_{\mathbf{M}} := \mathbf{v}_{i_1}$  die Richtung der Matrix  $\mathbf{M}$  und  $|\mathbf{v}_{i_1}|_2$  die Länge der Richtung von  $\mathbf{M}$ .



**Abbildung 2.4.** Visualisierung des Quadrats  $[0, \frac{1}{2}]^2$  (dunkle Fläche) und des entstandenen Parallelogramms  $(\mathbf{N}_{2,1,1}^{(i)})^T [0, \frac{1}{2}]^2$  (helle Fläche) sowie des kleineren Parallelogramms (mittelhelle Fläche) nach der Abbildung mit der Scherungsmatrix.

Aus (2.26) und (2.27) wird deutlich, dass die Richtungen der Matrizen  $\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}$  mit  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  gegeben sind durch

$$\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} := \mathbf{r}_{\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}} = \begin{pmatrix} 2^{j-1} \\ \ell 2^{j-k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \mathbf{r}_{\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})}} = \begin{pmatrix} \ell 2^{j-k-1} \\ 2^{j-1} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Die zur Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}$  gehörige Gerade  $y = \ell 2^{-k} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , schließt mit der  $\xi_1$ -Achse einen Winkel ein, den wir im Folgenden mit

$$\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} := \arctan(\ell 2^{-k}) \quad (2.29)$$

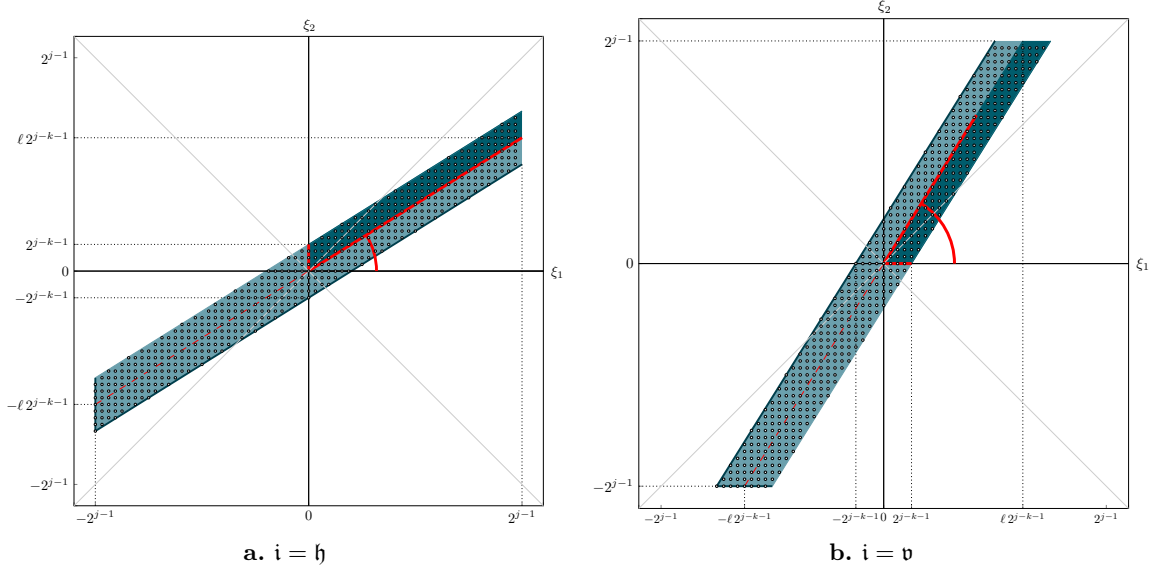
bezeichnen und der in [Abbildung 2.4](#) in rot eingezeichnet ist. Wegen  $k \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  gilt zudem für diesen Winkel  $|\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}| < \frac{\pi}{4}$ .

Analog schließt die zur Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})}$  gehörige Gerade  $y = \ell^{-1} 2^k x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , mit der  $\xi_1$ -Achse ebenfalls einen Winkel ein, für den wir

$$\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \operatorname{arccot}(\ell 2^{-k}) \quad (2.30)$$

schreiben, weshalb für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  die Abschätzung  $\frac{\pi}{4} < |\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})}| < \frac{3\pi}{4}$  erfüllt ist.

### 2.3 Richtungsspezifische Zerlegungspfade



**Abbildung 2.5.** Darstellung der Mengen  $\left(\mathbf{N}_{6,3,5}^{(i)}\right)^T \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$  (hell) und  $\left(\mathbf{N}_{6,3,5}^{(h)}\right)^T \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$  (dunkel) sowie deren Schnittmengen mit  $\mathbb{Z}^2$  nach der Zerlegung der Matrix  $\mathbf{M}_6$  mit den Dilatationsmatrizen aus [Beispiel 2.9](#) als helle Punkte. Die roten Linien entsprechen den Richtungen  $\mathbf{r}_{6,3,5}^{(i)}$  mit den entsprechenden Winkeln  $\theta_{3,5}^{(i)}$ .

Aus den vorherigen Betrachtungen lässt sich schließen, dass auf die Ausrichtung der Parallelogramme  $\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$  direkt über die Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  mit den zugehörigen Winkeln  $\theta_{k,\ell}^{(i)}$  geschlossen werden kann. Nehmen wir an, das Ausgangslevel  $j$  und die Anzahl der Zerlegungsschritte  $k$  seien vorgegeben. Dann lässt sich mit dem Parameter  $\ell$ , den wir im Folgenden häufig Orientierungsparameter nennen, die Ausrichtung der besagten Parallelogramme über die Richtungen  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  kontrollieren.

Kehren wir zu [Beispiel 2.9](#) und den zugehörigen erzeugenden Mengen aus [Abbildung 2.3](#) zurück. Nach der Definition der erzeugenden Mengen in [\(1.15\)](#) gilt

$$\mathcal{G}\left(\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T\right) = \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \cap \mathbb{Z}^2.$$

Deshalb ist

$$\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{G}\left(\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T\right)$$

und die Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  kann als Richtung der erzeugenden Menge bezeichnet werden. Diese verläuft genau in der Mitte und parallel zu den parallelen langen Seiten des Parallelogramms, in der die erzeugende Menge enthalten ist. Für die Parameter aus [Beispiel 2.9](#), gegeben durch  $j = 6$ ,  $k = 3$  und  $\ell = 5$ , ist dies in [Abbildung 2.5](#) dargestellt. Der entsprechende Winkel ist demnach durch  $\theta_{3,5}^{(i)}$  gegeben und jeweils in rot eingezeichnet.

Mithilfe der Richtungen  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  beziehungsweise der Winkel  $\theta_{k,\ell}^{(i)}$ ,  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$ , erhalten wir einen Zusammenhang zwischen der Wahl des Index  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2} \cup \mathbb{Z}_2$ , welcher den Zerlegungspfad der multiplen Waveletzerlegungen festlegt und der geometrischen Ausrichtung der Parallelogramme, die die erzeugenden Mengen  $\mathcal{G} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} \right)^T \right)$  enthalten.

Für ein gegebenes Startlevel  $j$  und  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$  mit  $0 \leq k \leq j$  ergeben sich wegen  $|\mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k| = 2^{k+1} - 1$  sowie  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  demnach

$$2 \cdot (2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 2 \quad (2.31)$$

Möglichkeiten für die Orientierungen der Parallelogramme, welche die erzeugenden Mengen  $\mathcal{G} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} \right)^T \right)$  enthalten. Um die in (2.17) und (2.20) eingeführten hochgestellten Indizes  $\mathfrak{h}, \mathfrak{v}$  ebenfalls mit einer geometrischen Deutung zu versehen, führen wir die Mengen

$$\mathcal{C}^{(\mathfrak{h})} := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \leq 1 \right\}, \quad \mathcal{C}^{(\mathfrak{v})} := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) : \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right| \leq 1 \right\} \quad (2.32)$$

ein und nennen diese horizontaler beziehungsweise vertikaler Kegel. In [Abbildung 2.5](#) sind die Grenzen der Kegel durch die durchgezogenen hellen Linien auf den Diagonalen gekennzeichnet. An dieser Stelle wird deutlich, weshalb wir den Index  $\mathfrak{h}$  mit horizontal identifizieren können, denn für die mit diesem Index assoziierten Winkel gilt  $|\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}| < \frac{\pi}{4}$ . Deshalb liegen alle Punkte auf der durch die Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}$  aufgespannten Geraden  $y = \ell 2^{-k} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , in  $\mathcal{C}^{(\mathfrak{h})}$ . Auf ähnliche Weise liegen alle Punkte auf der durch die Richtung  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})}$  aufgespannten Geraden  $y = \ell^{-1} 2^k x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , in  $\mathcal{C}^{(\mathfrak{v})}$ , denn es gilt  $\frac{\pi}{4} < |\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})}| < \frac{3\pi}{4}$ .

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir untersuchen, wie sich die Wahl der Indexmenge  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$  auf die multiplen Waveletzerlegungen aus [Abschnitt 2.2](#) auswirkt. Vergleichen wir (2.10) mit (2.22), so ist

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{e}^k} = \left( \mathbf{J}_{\mathbf{e}^k}^{(\mathfrak{h})} \right)^{-1} \mathbf{M}_j = \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}.$$

Wir greifen die Überlegungen aus [Beispiel 1.5](#) auf und können mit [Lemma 2.10](#) folgern, dass alle Muster auf einem Level unabhängig von der Richtung  $\mathbf{r}_{\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}}$  der erzeugenden Mengen sind, da die Punktmenge in [Lemma 2.10](#) nicht vom Orientierungsparameter  $\ell = -(\ddot{\mathbf{e}})_2$  abhängen. Es gilt somit

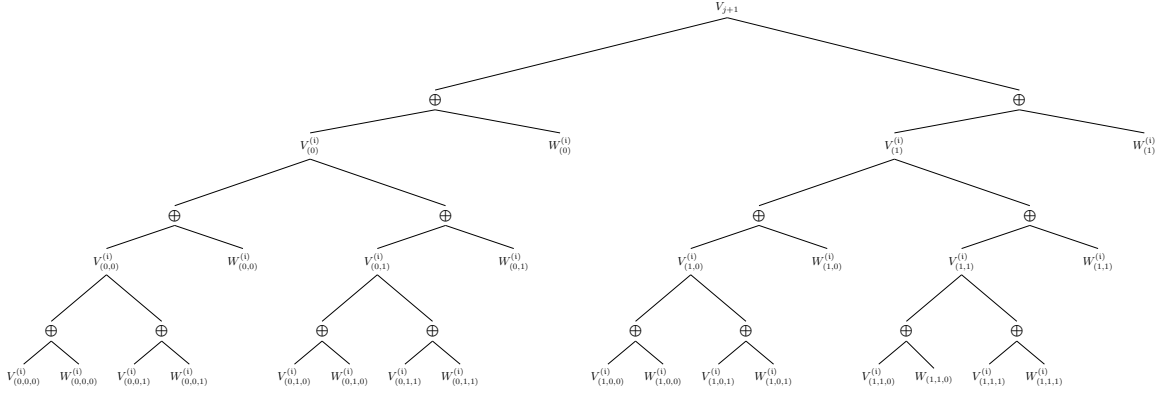
$$\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbf{e}^k}) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(i)}), \quad 0 \leq k \leq j,$$

weshalb alle auftretenden Muster auf einem Level für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  dieselbe Tensorprodukt-Struktur aufweisen.

Nehmen wir an, dass  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^k$  gilt. Da  $\mathbf{e}^1 = e_1 \in \mathbb{Z}_2$ , ergeben sich zwei verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten für das erste Level. Nach [Theorem 2.6](#) finden wir analog zu (2.12) die Darstellungen

$$\varphi_{e_1}^{(i)} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} a_{e_1, \mathbf{y}}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}, \quad \psi_{e_1}^{(i)} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} b_{e_1, \mathbf{y}}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1},$$

### 2.3 Richtungsspezifische Zerlegungspfade



**Abbildung 2.6.** Visualisierung einer dyadischen Waveletzerlegung mit  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^3$  in einem Binärbaum.

wobei die Koeffizienten  $a_{e_1, \mathbf{y}}^{(i)}$  und  $b_{e_1, \mathbf{y}}^{(i)}$  für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  wie in (2.13) und (2.14) berechnet werden können. Die Vektoren  $\mathbf{v}_{e_1} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{e_1}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{w}_{e_1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{e_1}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  vereinfachen sich in diesem Fall zu

$$\mathbf{v}_{e_k}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} = \begin{cases} (0, -1)^T, & \text{falls } \mathbf{i} = \mathfrak{h}, \\ (-1, 0)^T, & \text{falls } \mathbf{i} = \mathfrak{v}, \end{cases}$$

und

$$\mathbf{w}_{e_k}^{(i)} = \begin{cases} (0, -\frac{1}{2})^T, & \text{falls } \mathbf{i} = \mathfrak{h} \text{ und } e_k = 0, \\ (-\frac{1}{2}, 0)^T, & \text{falls } \mathbf{i} = \mathfrak{v} \text{ und } e_k = 0, \\ (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit diesen Koeffizienten erhalten wir mittels (1.35) nach einem Schritt die Zerlegung

$$f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,1}^{(i)})} \left( d_{e_1, \mathbf{x}, 0}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \varphi_{e_1}^{(i)} + d_{e_1, \mathbf{x}, 1}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \psi_{e_1}^{(i)} \right).$$

Wiederholen wir diesen Vorgang für  $k$  Level, so ergeben sich insgesamt  $2^k$  verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten für eine Funktion  $f \in V_{j+1}$ , falls  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^k$  und es gilt

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(i)})} d_{\mathbf{e}^k, \mathbf{y}, 0}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{e}^k}^{(i)} + \sum_{l=k}^1 \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,l}^{(i)})} d_{\mathbf{e}^l, \mathbf{x}, 1}^{(i)} \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{e}^l}^{(i)}.$$

Visualisieren wir die verschiedenen Zerlegungspfade ähnlich wie in [Abbildung 2.2](#), so ist der entstehende Baum ein Binärbaum in dem Sinne, dass sich jeder Skalierungsraum in genau zwei direkte Summen des nächsttieferen Levels aufspalten lässt.

In [Abbildung 2.6](#) ist ein solcher Binärbaum für  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^3$  dargestellt. Wie man sehen kann, enthält dieser Baum  $2^3 = 8$  Blätter, also 8 verschiedene direkte Summen aus Skalierungs- und Waveleträumen  $V_{\mathbf{e}^3}^{(i)}$  beziehungsweise  $W_{\mathbf{e}^3}^{(i)}$  des dritten Levels, deren direkte Summe die

Skalierungsräume  $V_{\mathbf{e}_2}^{(i)}$  des zweiten Levels bilden. Die Gesamtzahl aller möglichen Zerlegungen einer Funktion  $f \in V_{j+1}$  mittels  $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{-1,2}^k \cup \mathbb{Z}_2^k$  und  $i \in \{\mathbf{h}, \mathbf{v}\}$  entspricht  $2^{k+2} - 2$  und wurde in (2.31) angegeben. Diese entspricht der Anzahl aller möglichen Orientierungen der Parallelogramme, die die erzeugenden Mengen  $\mathcal{G} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} \right)^T \right)$  enthalten. Mit den Resultaten dieses Kapitels ist es demnach möglich, eine gegebene Funktion mit richtungsspezifischen Waveletzerlegungen, gesteuert durch den Index  $\mathbf{e}$ , zu analysieren. Die Fourier-Koeffizienten der entsprechenden Skalierungs- und Waveletfunktionen liegen in Parallelogrammen, deren Ausrichtungen mithilfe der Richtungen  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  beziehungsweise den entsprechenden Winkeln  $\theta_{k,\ell}^{(i)}$  exakt beschrieben werden können.

# 3

## Trigonometrische Shearlets

Das dritte Kapitel befasst sich mit den für diese Arbeit namensgebenen Funktionen, den trigonometrischen Shearlets. Zu Beginn von [Abschnitt 3.1](#) werden Funktionen  $\tilde{g}_\alpha$  basierend auf den zulässigen Funktionen des letzten Kapitels eingeführt und grundlegende Eigenschaften in [Lemma 3.1](#) bewiesen. Im Anschluss werden zweidimensionale Fensterfunktionen  $\Psi_\alpha^{(i)}$  ähnlich zu den Funktionen  $\Phi_\alpha^{(i)}$  aus [\(2.4\)](#) als Tensorprodukt definiert und in [Lemma 3.3](#) gezeigt, wie diese Funktionen mit der Konstruktion dyadischer de la Vallée Poussin-artiger Skalierungs- und Waveletfunktionen aus [Abschnitt 2.1](#) verknüpft sind. Nach der Definition der trigonometrischen Shearlets werden diese mit den klassischen kontinuierlichen und diskreten Kegel-Shearlets verglichen und Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede beleuchtet.

In den verbleibenden drei Abschnitten werden die wichtigsten Eigenschaften der zuvor eingeführten trigonometrischen Shearlets untersucht. [Abschnitt 3.2](#) legt dabei den Fokus auf die Lokalisierung im Frequenzbereich. Durch den Zusammenhang zu [Kapitel 2](#) bei der Konstruktion der trigonometrischen Shearlets, finden sich die Richtungen  $\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(i)}$  der Matrizen  $\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}$  aus [Definition 2.11](#) in [Abschnitt 2.3](#) in den Frequenzmengen  $\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  wieder. Aus der Abtastung dieser Mengen mit  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  entstehen die Fourier-Koeffizienten in [Definition 3.4](#).

[Abschnitt 3.3](#) befasst sich mit der Lokalisierung im Ortsbereich. Neben Abschätzungen der partiellen Ableitungen der Fensterfunktion  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  wird das Maximum und das anisotrope Abklingverhalten der trigonometrischen Shearlets  $\psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}$  in [Theorem 3.12](#) exakt beschrieben. Dabei bewirkt eine höhere Glattheit der Fensterfunktion im Frequenzbereich ein schnelleres Abklingverhalten der Shearlets im Ortsbereich. Wie schon bei den klassischen Shearlets führt die Anisotropie der Funktionen zusammen mit der guten Orts-, Richtungs- und Frequenz-Lokalisierung zu günstigen Approximationseigenschaften, die in [Kapitel 4](#) für die Erkennung von Singularitäten entlang von Richtungen genutzt werden.

Eine weitere hervorzuhebende Eigenschaft der klassischen diskreten Shearlet-Systeme ist, dass diese einen Parseval-Frame des  $L_2(\mathbb{R}^2)$  bilden ([\[28, 38\]](#)). Deshalb wollen wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen, ob trigonometrische Shearlet-Systeme einen Frame des  $L_2(\mathbb{T}^2)$  bilden. Dabei stellt sich heraus, dass die Parseval-Frame-Eigenschaft der klassischen Shearlets aufgrund der Tensorprodukt-Struktur und den speziellen Forderungen an die zweidimensionalen Fensterfunktionen  $\Psi_{j,\ell}^{(i)}$  zwar nicht erhalten bleibt, die auftretenden oberen und unteren Frame-Konstanten dennoch nicht zu weit auseinander liegen.

### 3.1 Konstruktion und Vergleich zu klassischen Shearlets

Ausgehend von einer zulässigen Funktion  $g_\alpha$  definieren wir für  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  weitere Funktionen  $\tilde{g}_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\tilde{g}_\alpha(x) := g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) - g_\alpha(x). \quad (3.1)$$

Die Idee für diese Funktionen entstammt den Betrachtungen eindimensionaler periodischer Wavelets in [59, Kapitel 4], welche in [4, Kapitel 4] auf den multivariaten Fall übertragen wurden. Wir zeigen einige Eigenschaften der Funktion  $\tilde{g}_\alpha$  in folgendem Lemma.

**Lemma 3.1.**

Für  $q \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  sei  $g_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R})$  eine zulässige Funktion. Dann ist  $\tilde{g}_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R})$  nichtnegativ, gerade und erfüllt die Eigenschaften

$$\text{supp } \tilde{g}_\alpha = \left[-1 - 2\alpha, -\frac{1}{2} + \alpha\right] \cup \left[\frac{1}{2} - \alpha, 1 + 2\alpha\right], \quad (3.2)$$

$$\tilde{g}_\alpha(x) \begin{cases} \text{ist monoton wachsend,} & \text{falls } x \in [\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha], \\ = 1, & \text{falls } x \in [\frac{1}{2} + \alpha, 1 - 2\alpha], \\ \text{ist monoton fallend,} & \text{falls } x \in [1 - 2\alpha, 1 + 2\alpha], \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_\alpha(x + z) = 1, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

und es gilt

$$\tilde{g}_\alpha(x) = \left(g_\alpha(x - 1) + g_\alpha(x + 1)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right). \quad (3.5)$$

*Beweis.* Dass die Funktion  $\tilde{g}_\alpha$  in  $C_0^q(\mathbb{R})$  liegt sowie nichtnegativ und gerade ist, folgt direkt aus der Definition in (3.1) und den Eigenschaften zulässiger Funktionen aus Definition 2.1. Wegen (2.1) gilt

$$\text{supp } g_\alpha\left(\frac{\circ}{2}\right) = [-1 - 2\alpha, 1 + 2\alpha],$$

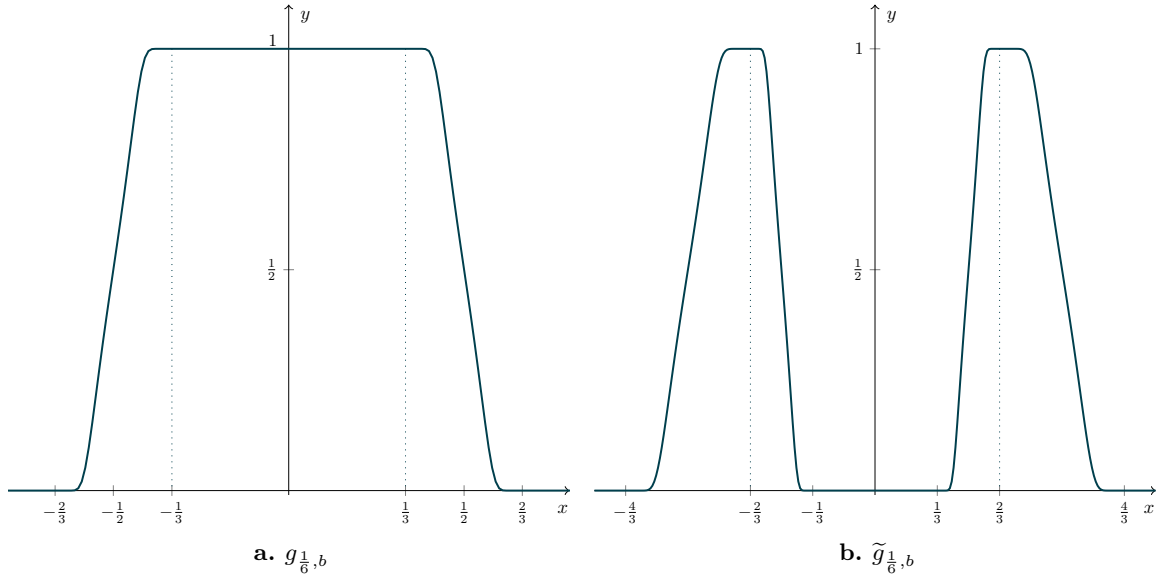
was wiederum mit der Definition von  $\tilde{g}_\alpha$  in (3.1) direkt zu (3.2) und (3.3) führt. Mit der Eigenschaft (2.2) folgt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha\left(\frac{x+z}{2}\right) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha\left(\frac{x}{2} + z\right) + \sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha\left(\frac{x-1}{2} + z\right) = 2,$$

weshalb

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_\alpha(x + z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha\left(\frac{x+z}{2}\right) - \sum_{z \in \mathbb{Z}} g_\alpha(x + z) = 1$$

erfüllt ist und somit auch die Funktion  $\tilde{g}_\alpha$  eine Zerlegung der 1 ermöglicht. Um (3.5) zu zeigen, beschränken wir uns aufgrund der Symmetrie von  $\tilde{g}_\alpha$  auf  $x > 0$  und unterscheiden verschiedene Fälle.



**Abbildung 3.1.** Darstellung der zulässigen Funktion  $g_{\frac{1}{6}, b}$  und der zugehörigen Funktion  $\tilde{g}_{\frac{1}{6}, b}$  aus [Beispiel 2.3 iii\)](#) für  $b = \frac{1}{40}$ .

Für  $x \in [0, \frac{1}{2} - \alpha]$  gilt wegen (2.1), dass  $g(x-1) = g(x+1) = 0$ , womit (3.5) erfüllt ist.

Für  $x \in [\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha]$  folgt erneut mit (2.1), dass  $g_\alpha(\frac{x}{2}) = 1$ , da  $\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha$  für  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$ . Unter Verwendung von (2.2) erhalten wir

$$\left(g_\alpha(x-1) + g_\alpha(x+1)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 - g_\alpha(x)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) - g_\alpha(x) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \tilde{g}_\alpha(x).$$

Für  $x \in [\frac{1}{2} + \alpha, 1 - 2\alpha]$  ist  $g(x-1) = 1$  und  $g_\alpha(\frac{x}{2}) = 1$ , also

$$\left(g_\alpha(x-1) + g_\alpha(x+1)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = 1 = \tilde{g}_\alpha(x).$$

Für  $x \in [1 - 2\alpha, 1 + 2\alpha]$  ist  $g_\alpha = 0$ , da  $\frac{1}{2} + \alpha \leq 1 - 2\alpha$  für  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$ , weshalb

$$\left(g_\alpha(x-1) + g_\alpha(x+1)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 - g_\alpha(x)\right) g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = g_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \tilde{g}_\alpha(x).$$

Für  $x > 1 + 2\alpha$  stimmen die beiden Seiten in (3.5) wegen (3.2) überein, womit alles gezeigt ist.  $\square$

Im Folgenden führen wir zweidimensionale Fensterfunktionen als das Tensorprodukt der zulässigen Funktion  $g_\alpha$  und  $\tilde{g}_\alpha$  ein.

**Definition 3.2.**

Es sei  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  und eine zulässige Funktion  $g_\alpha$  aus [Definition 2.1](#) gegeben. Für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  definieren wir zweidimensionale Funktionen  $\Psi_\alpha^{(i)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Psi_\alpha^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}) := \tilde{g}_\alpha(x_1) g_\alpha(x_2), \quad \Psi_\alpha^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{x}) := g_\alpha(x_1) \tilde{g}_\alpha(x_2).$$

Wir nennen diese horizontale beziehungsweise vertikale Fensterfunktionen und schreiben  $\Psi_\alpha^{(i)} \in \mathcal{W}$ . Falls für die zulässige Funktion  $g_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R})$  mit  $q \in \mathbb{N}$  gilt, schreiben wir  $\Psi_\alpha^{(i)} \in \mathcal{W}^q$ .

Aus den Eigenschaften (2.1) und (3.2) der Träger der Funktion  $g_\alpha$  und  $\tilde{g}_\alpha$  folgt

$$\begin{aligned} \text{supp } \Psi_\alpha^{(h)} &= \left( \left[ -1 - 2\alpha, -\frac{1}{2} + \alpha \right] \cup \left[ \frac{1}{2} - \alpha, 1 + 2\alpha \right] \right) \times \left[ -\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha \right], \\ \text{supp } \Psi_\alpha^{(v)} &= \left[ -\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha \right] \times \left( \left[ -1 - 2\alpha, -\frac{1}{2} + \alpha \right] \cup \left[ \frac{1}{2} - \alpha, 1 + 2\alpha \right] \right). \end{aligned}$$

Für die Matrizen

$$\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)} = \begin{pmatrix} 2^j & \ell 2^{j-k} \\ 0 & 2^{j-k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(v)} = \begin{pmatrix} 2^{j-k} & 0 \\ \ell 2^{j-k} & 2^j \end{pmatrix},$$

aus dem letzten Kapitel gilt

$$\det \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)} = \det \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(v)} = 2^{2j-k}. \quad (3.6)$$

Ausgehend von den Funktionen aus Definition 3.2 schreiben wir

$$\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} := \Psi_\alpha^{(i)} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} \right)^{-T} \circ \right), \quad i \in \{h, v\}, \quad (3.7)$$

und es folgt

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \left( \mathbf{x} + \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} \right)^T \mathbf{z} \right) = 1, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.8)$$

Wegen (3.6) gilt darüber hinaus für den Träger dieser Funktionen

$$\left| \text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \right| = \left| \text{supp } \Psi_\alpha^{(i)} \right| \det \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)} = (1 + 2\alpha)(1 + 6\alpha) 2^{2j-k} = C(\alpha) 2^{2j-k} \quad (3.9)$$

mit  $1 \leq C(\alpha) \leq \frac{8}{3}$ .

Das folgende Lemma erweitert das Resultat aus [5, Lemma 5.2] und ist ein wichtiges Hilfsmittel, um die in Abschnitt 2.1 beschriebene Abhängigkeit der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungs- und Waveletfunktionen aus Definition 2.5 von den nachfolgenden Levels in gewissen Fällen beseitigen zu können.

**Lemma 3.3.**

Es sei  $\mathbf{J} \in \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und eine zweidimensionale zulässige Funktion  $\Phi_\alpha \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$  aus (2.4) für  $q \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  gegeben. Dann gilt für den Operator aus (2.7)

$$\Theta_{\mathbf{J}}(\Phi_\alpha, \Phi_\alpha) = \Phi_\alpha \quad (3.10)$$

und für  $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{G}(\mathbf{X}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  beziehungsweise  $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{G}(\mathbf{Y}) \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\Theta_{\mathbf{X}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}_1}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) = \Psi_\alpha^{(h)}, \quad \Theta_{\mathbf{Y}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}_2}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) = \Psi_\alpha^{(v)}. \quad (3.11)$$

### 3.1 Konstruktion und Vergleich zu klassischen Shearlets

---

*Beweis.* Die Gleichung (3.10) wurde in [5, Lemma 5.2] bewiesen, in welchem die Bedingung  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  benötigt wurde. Die zweite Aussage (3.11) wurde in der genannten Quelle nicht behandelt, weshalb der Beweis mit ähnlichen Ideen hier geführt werden soll.

Es wird nur der Fall für die Matrix  $\mathbf{X}$  betrachtet, wobei der Beweis für die Matrix  $\mathbf{Y}$  mit vertauschten Koordinaten analog verläuft. Für  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist der Vektor  $\mathbf{v} = (1, 0)^T \in \mathcal{G}(\mathbf{X}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$  eindeutig bestimmt und mit der Definition des Operators aus (2.7) und den zweidimensionalen zulässigen Funktionen  $\Phi_\alpha$  aus (2.4) gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{X}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) (\mathbf{x}) &= \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{X}^T \mathbf{z}) \right) \Phi_\alpha(\mathbf{X}^{-T} \mathbf{x}) \\ &= \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} (g_\alpha(x_1 - 1 + 2z_1) g_\alpha(x_2 + z_2)) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Durch die Eigenschaft (2.1) des Trägers zulässiger Funktionen folgt

$$g_\alpha(x_1 - 1 + 2z_1) = 0, \quad \text{falls } x_1 \in \text{supp } g_\alpha\left(\frac{\circ}{2}\right) \text{ und } z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}. \quad (3.13)$$

Analog folgt für die zweite Komponente

$$g_\alpha(x_2 + z_2) = 0, \quad \text{falls } x_2 \in \left[-\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha\right] \text{ und } z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.14)$$

beziehungsweise

$$g_\alpha(x_2 + z_2) = 0, \quad \text{falls } x_2 \in \text{supp } g_\alpha \text{ und } z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}. \quad (3.15)$$

Für  $\mathbf{x} \in [-1 - 2\alpha, 1 + 2\alpha] \times [-\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha]$  bleiben nach (3.13) und (3.14) nur die Summanden für  $\mathbf{z} = (0, 0)$  und  $\mathbf{z} = (1, 0)$  in der Summe enthalten. Da  $x_2 \in [-\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha]$ , folgt mit Lemma 2.2, dass  $g_\alpha(x_2) = g_\alpha(x_2)^2 = 1$ , wodurch sich der Ausdruck in (3.12) weiter vereinfachen lässt zu

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{X}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) (\mathbf{x}) &= \left( g_\alpha(x_1 - 1) g_\alpha(x_2) + g_\alpha(x_1 + 1) g_\alpha(x_2) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2) \\ &= \left( g_\alpha(x_1 - 1) + g_\alpha(x_1 + 1) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2)^2 \\ &= \Psi_\alpha^{(h)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

und die letzte Gleichheit mit (3.5) folgt. Für  $\mathbf{x} \in \text{supp } \Phi_\alpha$  mit  $|x_2| > \frac{1}{2} - \alpha$  ist nach den vorherigen Überlegungen in (3.15) ein weiterer Wert für  $z_2$  in der Periodisierung enthalten,

entweder  $z_2 = 1$  für  $x_2 < -\frac{1}{2} + \alpha$  oder  $z_2 = -1$  für  $x_2 > \frac{1}{2} - \alpha$ . In beiden Fällen besteht die Summe aus den 4 Summanden bezüglich  $\mathbf{z} \in \{(0, 0), (0, \pm 1), (1, 0), (1, \pm 1)\}$  und es folgt

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{X}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) (\mathbf{x}) &= \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} (g_\alpha(x_1 - 1 + 2z_1) g_\alpha(x_2 + z_2)) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2) \\ &= \left( g_\alpha(x_1 - 1) g_\alpha(x_2) + g_\alpha(x_1 - 1) g_\alpha(x_2 \pm 1) + g_\alpha(x_1 + 1) g_\alpha(x_2) \right. \\ &\quad \left. + g_\alpha(x_1 + 1) g_\alpha(x_2 \pm 1) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2) \\ &= \left( g_\alpha(x_1 - 1)(g_\alpha(x_2) + g_\alpha(x_2 \pm 1)) + g_\alpha(x_1 + 1) \right. \\ &\quad \left. \times (g_\alpha(x_2) + g_\alpha(x_2 \pm 1)) \right) g_\alpha\left(\frac{x_1}{2}\right) g_\alpha(x_2) \\ &= \Psi_\alpha^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich mit (3.5), denn wegen der Eigenschaft (2.2) der zulässigen Funktion gilt  $(g_\alpha(x_2) + g_\alpha(x_2 \pm 1)) = 1$ .  $\square$

Wir wollen die trigonometrischen Shearlets einführen und den Zusammenhang zu den multiplen Waveletzerlegungen aus Abschnitt 2.3 herstellen. Dazu fixieren wir zunächst  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h}$ . Es gilt  $\mathbf{v} = (1, 0)^T \in \mathcal{G}(\mathbf{X}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$  sowie  $\mathbf{w} = (-\frac{1}{2}, 0)^T \in \mathcal{P}(\mathbf{X}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Wir nutzen Lemma 3.3 und erhalten für die Funktion  $\tilde{B}$  aus (2.8)

$$\tilde{B}_{(\mathbf{X})}(\mathbf{x}) = \exp(-2\pi i \mathbf{x}^T \mathbf{w}) \Theta_{\mathbf{X}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}}{2\pi}}[\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right) (\mathbf{x}) = e^{\pi i x_1} \Psi_\alpha^{(\mathfrak{h})} =: \tilde{\Psi}_\alpha^{(\mathfrak{h})} \quad (3.16)$$

beziehungsweise mit derselben Idee wie in (3.7)

$$\tilde{\Psi}_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}) := \tilde{\Psi}_\alpha^{(\mathfrak{h})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right)^{-T} \mathbf{x} \right) = e^{\pi i 2^{-j} x_1} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

da  $\left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right)^{-T} \mathbf{x} = (2^{-j} x_1, 2^{k-j} x_2 - 2^{-j} \ell x_1)^T$ . Auf ähnliche Weise haben wir für  $\mathfrak{i} = \mathfrak{v}$

$$\tilde{B}_{(\mathbf{Y})}(\mathbf{x}) = e^{\pi i x_2} \Psi_\alpha^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{x}) =: \tilde{\Psi}_\alpha^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

und

$$\tilde{\Psi}_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{x}) := \tilde{\Psi}_\alpha^{(\mathfrak{v})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})} \right)^{-T} \mathbf{x} \right) = e^{\pi i 2^{-j} x_2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{x}). \quad (3.19)$$

Mit den Funktionen aus (3.16) und (3.18) können wir die trigonometrischen Shearlets definieren.

#### Definition 3.4.

Es seien  $j, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq j$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  sowie eine Fensterfunktion  $\Psi_\alpha^{(\mathfrak{i})} \in \mathcal{W}^q$  für  $q \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathfrak{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  gegeben. Wir definieren trigonometrische Polynome

$$\psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{i})} := 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\Psi}_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{i})}(\mathbf{k}) e^{i \mathbf{k}^T \circ}$$

### 3.1 Konstruktion und Vergleich zu klassischen Shearlets

und nennen diese horizontale beziehungsweise vertikale trigonometrische Shearlets. Für die Translate dieser Funktionen auf den Musterpunkten  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(i)})$  verwenden wir die Notation

$$\begin{aligned} \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)} &:= \psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\circ - 2\pi\mathbf{y}) = 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\Psi}_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T(\circ - 2\pi\mathbf{y})} \\ &= 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T(\circ - 2\pi\tilde{\mathbf{y}})} \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{y}} := \begin{cases} \mathbf{y} - (2^{-j-1}, 0)^T, & \text{falls } \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(h)}), \\ \mathbf{y} - (0, 2^{-j-1})^T, & \text{falls } \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,k}^{(v)}). \end{cases} \quad (3.21)$$

Die in der vorherigen Definition eingeführten trigonometrischen Shearlets spannen die Waveleträume an den Blättern der zugehörigen Binärbäume in [Abbildung 2.6](#) aus [Abschnitt 2.3](#) auf.

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir die Unterschiede der zuvor konstruierten trigonometrischen Shearlets zu den klassischen Shearlets auf der reellen Achse beleuchten. Ausführliche Betrachtungen zu klassischen Kegel-Shearlets finden sich beispielsweise in [\[13, 28, 38\]](#). Wie in [Lemma 3.3](#) gezeigt wurde, entstehen die trigonometrischen Shearlets auf der letzten Stufe einer dyadischen anisotropen Waveletzerlegung mit de la Vallée Poussin-artigen Wavelets und geeigneten Dilatationsmatrizen. Bereits durch die Konstruktion sind die trigonometrischen Shearlets sowohl im Orts- als auch im Frequenzbereich diskret, ohne dass eine kontinuierliche Theorie wie bei den klassischen Shearlets als Ausgangspunkt dient. Dennoch weisen die Trägermengen im Frequenzbereich der beiden Funktionen Ähnlichkeiten auf, die wir im Folgenden erläutern wollen.

Für  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$  gilt nach der Definition der Matrix in [\(2.22\)](#)

$$\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)}\right)^{-T} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 2^{-j}\xi_1 \\ 2^{k-j}\xi_2 - \ell 2^{-j}\xi_1 \end{pmatrix},$$

weshalb die Funktionen aus [\(3.7\)](#) von der Form

$$\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(h)}(\boldsymbol{\xi}) = \Psi_{\alpha}^{(h)}\left(\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)}\right)^{-T} \boldsymbol{\xi}\right) = \tilde{g}_{\alpha}(2^{-j}\xi_1) g_{\alpha}\left(2^{-j+k}\xi_2 - \ell 2^{-j}\xi_1\right) \quad (3.22)$$

sind. Damit lassen sich die Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Shearlets aus [\(3.20\)](#) für  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{Z}^2$  schreiben als

$$c_{\mathbf{k}}\left(\psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(h)}\right) = 2^{k/2-j} \tilde{g}_{\alpha}(2^{-j}k_1) g_{\alpha}\left(2^{-j}k_1 \left(2^k \frac{k_2}{k_1} - \ell\right)\right) e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{y}}}$$

und wir sehen die Ähnlichkeit zu der Fourier-Transformierten der klassischen diskreten horizontalen Kegel-Shearlets aus [\[38, Theorem 5\]](#). Neben der unterschiedlichen Skalierung  $j$  im Vergleich zu  $2j$  bei den klassischen Shearlets, liegt der Hauptunterschied im Argument

der Funktionen  $v$  bzw  $g_\alpha$ . Der zusätzliche Faktor  $2^{-j}\xi_1$  tritt bei den klassischen Shearlets nicht auf, da in den Fensterfunktionen im Vergleich zu denen aus [Definition 3.2](#) keine Tensorprodukt-Struktur vorliegt. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, wirkt sich dieser Unterschied auf die Geometrie der zweidimensionalen Fensterfunktionen aus. Während der reine Tensorprodukt-Ansatz der trigonometrischen Shearlets zu gerichteten Parallelogrammen im Frequenzbereich führt, hat der Träger der Fourier-Transformation der diskreten Kegel-Shearlets die Form eines gerichteten Trapezoids, wie in [Abbildung 3.3](#) und [Abbildung 3.4](#) des nächsten Abschnitts zu sehen ist.

## 3.2 Frequenz-Lokalisierung

Zum besseren Verständnis wird in diesem Abschnitt, anders als zuvor, zwischen der Ortsvariablen  $\mathbf{x}$  und der Frequenzvariablen  $\boldsymbol{\xi}$  unterschieden. Falls nicht anders erwähnt, nehmen wir an, dass  $j \in 2\mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq j$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  gilt.

Durch die Abtastung der Fensterfunktionen  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  aus [\(3.7\)](#) an den Punkten  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  entstehen die Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Shearlets in [Definition 3.4](#). Dabei ist die Form und Ausrichtung des Trägers der Funktionen  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  von zentraler Bedeutung, denn durch diese wird festgelegt, welche Frequenzen in den trigonometrischen Polynomen  $\psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  vorkommen. Um dies im Folgenden näher zu untersuchen, führen wir die Mengen

$$\Omega^{(\mathfrak{h})} := \left( \left[ -1, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right) \times \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.23)$$

$$\Omega^{(\mathfrak{v})} := \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \left( \left[ -1, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right), \quad (3.24)$$

ein und zeigen das nachstehende Lemma.

### Lemma 3.5.

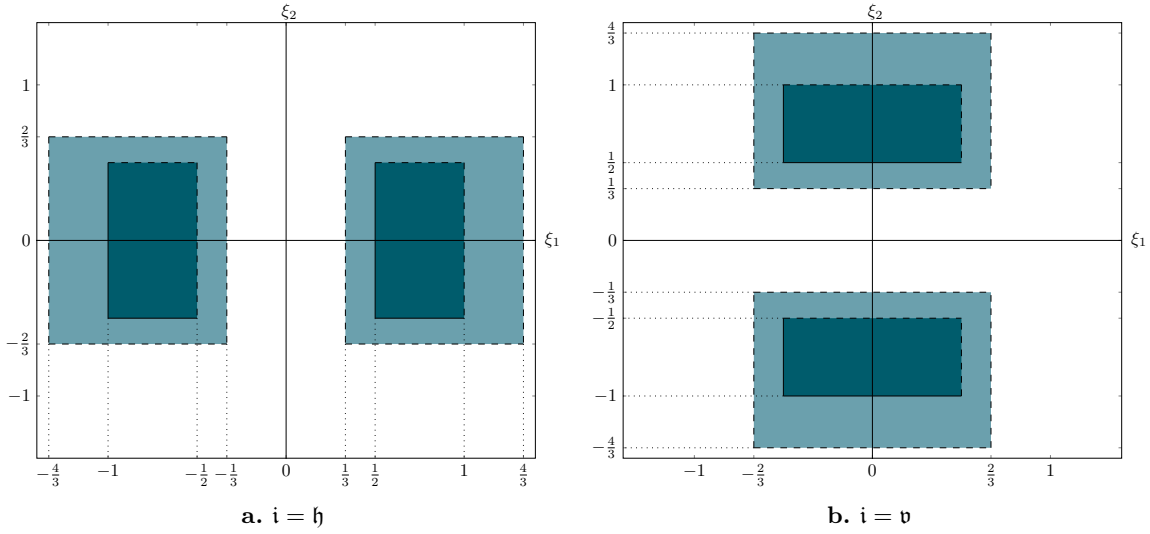
Für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$ ,  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei  $\Psi_\alpha^{(i)} \in \mathcal{W}^q$ . Dann existiert für alle  $\boldsymbol{\xi} \in \text{supp } \Psi_\alpha^{(i)}$  genau ein  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$ , sodass  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(i)}$ .

*Beweis.* Die Aussage wird nur für  $i = \mathfrak{h}$  gezeigt, da der Beweis für  $i = \mathfrak{v}$  mit vertauschten Koordinaten identisch verläuft. Falls  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega^{(\mathfrak{h})}$ , so ist offensichtlich  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(\mathfrak{h})}$  nur genau dann erfüllt, wenn  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Für  $\boldsymbol{\xi} \in \text{supp } \Psi_\alpha^{(i)} \setminus \Omega^{(\mathfrak{h})}$  können verschiedene Fälle auftreten.

Ist  $\xi_1 \in \left( \left[ -1, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right)$  und  $\xi_2 \notin \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , so gilt

$$\frac{1}{2} \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2} + \alpha \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2} - \alpha \leq \xi_2 < -\frac{1}{2},$$

sodass  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(\mathfrak{h})}$  nur genau dann erfüllt ist, wenn  $\mathbf{z} = (0, -1)$  im ersten Fall beziehungsweise  $\mathbf{z} = (0, 1)$  im zweiten Fall gewählt wird.



**Abbildung 3.2.** Schematische Darstellung der Mengen  $\text{supp } \Psi_{\frac{1}{6}}^{(i)}$  (helle Fläche) und  $\Omega^{(i)}$  (dunkle Fläche).

Für  $\xi_1 \notin \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  und  $\xi_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  gilt einerseits

$$\frac{1}{2} - \alpha \leq \xi_1 < \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2} \leq \xi_1 \leq -\frac{1}{2} + \alpha,$$

weshalb  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(h)}$  nur für  $\mathbf{z} = (-1, 0)$  beziehungsweise  $\mathbf{z} = (1, 0)$  erfüllt ist. Außerdem treten die Fälle

$$1 \leq \xi_1 \leq 1 + 2\alpha \quad \text{oder} \quad -1 - 2\alpha \leq \xi_1 < -1$$

auf, für die wiederum  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(h)}$  nur genau dann erfüllt ist, wenn  $\mathbf{z} = (-2, 0)$  beziehungsweise  $\mathbf{z} = (2, 0)$ .

Für  $\xi_1 \notin \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  und  $\xi_2 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  treten die 8 möglichen Kombinationen der vorherigen beiden Fälle auf, weshalb stets genau ein  $\mathbf{z} \in \{\pm 1, \pm 2\} \times \{\pm 1\}$  existiert, für das  $(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}) \in \Omega^{(h)}$  gilt und somit die Aussage für alle möglichen Fälle bewiesen ist.  $\square$

Basierend auf (3.23) und (3.24) definieren wir die Mengen

$$\Omega_{j,k,\ell}^{(h)} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(h)} \right)^{-T} \mathbf{x} \in \Omega^{(h)} \right\}, \quad \Omega_{j,k,\ell}^{(v)} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(v)} \right)^{-T} \mathbf{x} \in \Omega^{(v)} \right\}, \quad (3.25)$$

und zeigen das folgende Lemma.

**Lemma 3.6.**

Für  $i \in \{h, v\}$  gilt  $|\Omega_{j,k,\ell}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2| = 2^{2j-k}$ .

*Beweis.* Wir zeigen erneut nur den Fall  $i = \mathfrak{h}$ . Die Menge  $\Omega^{(\mathfrak{h})}$  besteht nach ihrer Definition in (3.23) aus der Vereinigung der disjunkten Mengen

$$\Omega^{(\mathfrak{h}),1} := \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \Omega^{(\mathfrak{h}),2} := \left[\frac{1}{2}, 1\right) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

was zur Idee führt, die Mengen

$$\Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),1} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}\right)^{-\mathsf{T}} \mathbf{x} \in \Omega^{(\mathfrak{h}),1} \right\}, \quad \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),2} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}\right)^{-\mathsf{T}} \mathbf{x} \in \Omega^{(\mathfrak{h}),2} \right\}$$

zu betrachten. Die Anwendung von [15, Lemma II.7] liefert für die Mächtigkeit

$$\left| \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),1} \cap \mathbb{Z}^2 \right| = \left| \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),2} \cap \mathbb{Z}^2 \right| = \frac{1}{2} \det \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} = 2^{2j-k-1},$$

woraus schließlich wegen der Disjunktheit der Mengen

$$\left| \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} \cap \mathbb{Z}^2 \right| = \left| \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),1} \cap \mathbb{Z}^2 \right| + \left| \Omega_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h}),2} \cap \mathbb{Z}^2 \right| = 2^{2j-k}$$

und somit die Behauptung folgt.  $\square$

Für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  bilden die Elemente der Mengen  $\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  aus (3.25) jeweils zwei am Ursprung gespiegelte Parallelogramme im  $\mathbb{R}^2$ . Für die genaue Ausrichtung dieser Parallelogramme greifen wir die Überlegungen aus Abschnitt 2.3 auf und sehen, dass im Fall  $i = \mathfrak{h}$  zwei der Seiten des Parallelogramms parallel zu der Richtung des Vektors

$$\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}\right)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell 2^{j-k-1} \end{pmatrix},$$

also der  $\xi_2$ -Achse sind. Die übrigen beiden Seiten sind parallel zu der Geraden  $y = \ell 2^{-k} x$  mit  $x \in \mathbb{R}$ , also der Richtung aus (2.28), gegeben durch

$$\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} = \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})}\right)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-1} \\ \ell 2^{j-k-1} \end{pmatrix}$$

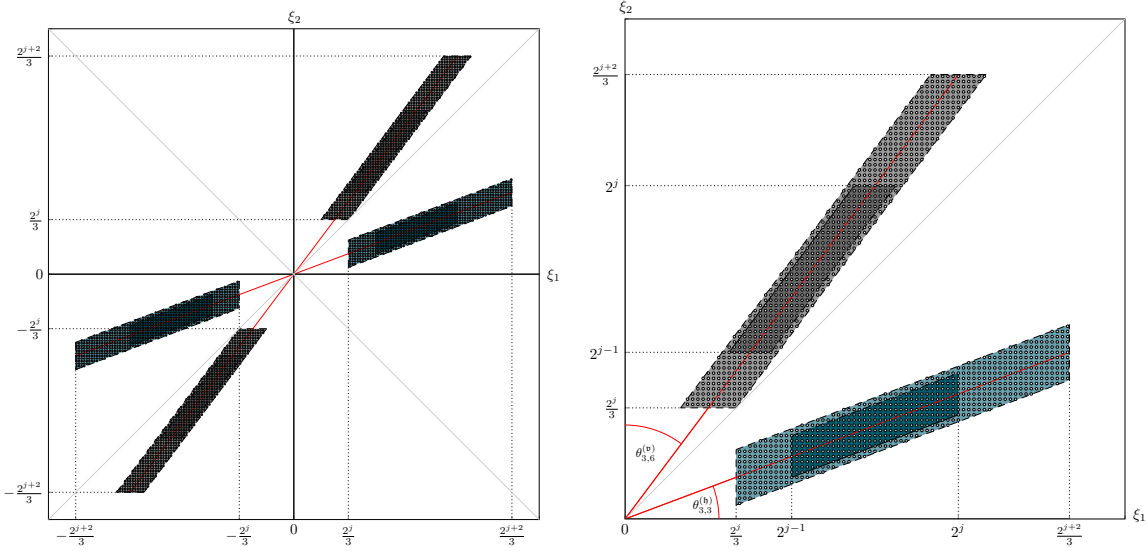
mit dem entsprechenden Winkel (vgl. Abbildung 3.3)

$$\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} = \arctan \left( \ell 2^{-k} \right).$$

Wegen  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  gilt  $\left| \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right| < \frac{\pi}{4}$ .

Für  $i = \mathfrak{v}$  sind jeweils zwei der Seiten wegen

$$\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})}\right)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{j-k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Abbildung 3.3.** Schematische Abbildungen der Mengen  $\text{supp } \Psi_{6,3,\ell,\frac{1}{6}}^{(i)}$  (hell) und  $\Omega_{6,3,\ell}^{(i)}$  (dunkel) sowie deren Schnittmengen mit  $\mathbb{Z}^2$  als helle Punkte für verschiedene Werte von  $\ell$  in der zweidimensionalen Ebene (links) und im ersten Quadranten (rechts). Die blauen Bereiche entsprechen dabei dem Fall  $\mathbf{i} = \mathbf{h}$  und die grauen Bereiche dem Fall  $\mathbf{i} = \mathbf{v}$ .

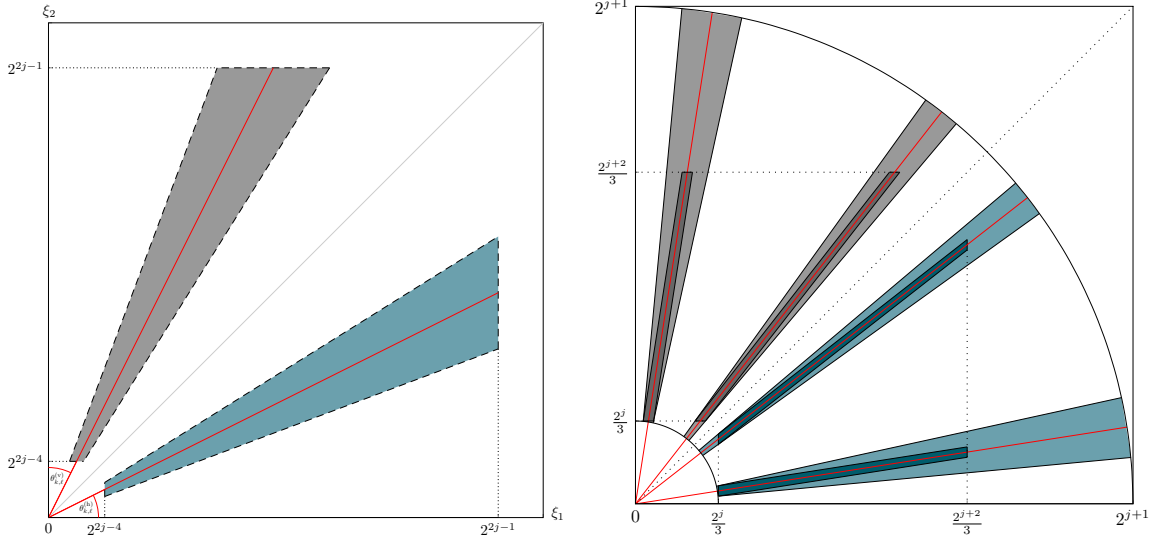
parallel zur  $\xi_1$ -Achse, beziehungsweise parallel zur Richtung

$$\mathbf{r}_{j,k,\ell}^{(v)} = \left( \mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(v)} \right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell 2^{j-k-1} \\ 2^{j-1} \end{pmatrix},$$

also der Geraden  $y = \ell^{-1} 2^k x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Diese schließt den Winkel

$$\theta_{k,\ell}^{(v)} = \text{arccot} \left( \ell 2^{-k} \right)$$

mit der  $\xi_1$ -Achse ein und in diesem Fall gilt wegen  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  die Abschätzung  $\frac{\pi}{4} < \left| \theta_{k,\ell}^{(v)} \right| < \frac{3\pi}{4}$ . Wie schon im letzten Abschnitt mit [Lemma 3.3](#) gezeigt wurde, entstehen die trigonometrischen Shearlets aus der Konstruktion der de la Vallée Poussin-artigen Waveletfunktionen. Der Zusammenhang lässt sich auch anhand der geometrischen Ausrichtung der Trägermengen  $\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\frac{1}{6}}^{(i)}$  in [Abbildung 3.3](#) im Vergleich zu denen in [Abbildung 2.5](#) erkennen. Wir betrachten die Darstellung der Operatoren  $\Theta_{\mathbf{J}} \left( \mathcal{T}_{\frac{\mathbf{v}_i}{2\pi}} [\Phi_\alpha], \Phi_\alpha \right)$  mit  $\mathbf{J} \in \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$  in [\(3.11\)](#), aus denen mittels [\(3.16\)](#)-[\(3.19\)](#) die Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Shearlets entstehen. Der Grund, weshalb die Mengen  $\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  nicht wie die in [Abbildung 2.5](#) durch den Ursprung verlaufen, liegt in der verschobenen Trägermenge der Funktion  $\tilde{g}$  im Vergleich zur Fensterfunktion  $g$ , was sich in [Abbildung 3.3](#) an der Trägermenge der Fensterfunktionen  $\Psi_\alpha^{(i)}$  erkennen lässt. Wir definieren die folgenden Mengen



**Abbildung 3.4.** Links: Schematische Darstellung der Trägermenge der klassischen diskreten Kegel-Shearlets aus [38, Abschnitt 5.2] im Frequenzbereich. Rechts: Darstellung der Mengen  $\text{supp } \Psi_{j,k,\ell}^{(i)}$  (dunkle Fläche) und  $W_{j,k,\ell}^{(i)}$  (helle Fläche) für  $j = 10$ ,  $k = 5$ ,  $\ell = 5, 25$  und  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$ . Die roten Linien formen mit der  $\xi_1$ -Achse die Winkel  $\theta_{k,\ell}^{(i)}$ . Die blauen Bereiche entsprechen dabei dem Fall  $i = \mathfrak{h}$  und die grauen Bereiche dem Fall  $i = \mathfrak{v}$ .

$$W_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{h})} := \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \frac{2^j}{3} < |\rho| < 2^{j+1}, \theta_{k,\ell-2}^{(\mathfrak{h})} < \theta < \theta_{k,\ell+2}^{(\mathfrak{h})} \right\},$$

$$W_{j,k,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] : \frac{2^j}{3} < |\rho| < 2^{j+1}, \theta_{k,\ell+2}^{(\mathfrak{v})} < \theta < \theta_{k,\ell-2}^{(\mathfrak{v})} \right\}$$

in Polarkoordinaten. Wir zeigen das nachstehende Lemma über den Zusammenhang des Trägers der Funktionen  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  mit den vorher eingeführten Mengen  $W_{j,k,\ell}^{(i)}$ . Die Idee entstammt dabei [33, Proposition 2.1]. Eine grafische Veranschaulichung anhand eines konkreten Beispiels findet sich in [Abbildung 3.4](#).

**Lemma 3.7.**

Für  $k \geq 5$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$ ,  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  gilt die Inklusion

$$\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \subset W_{j,k,\ell}^{(i)}.$$

*Beweis.* Wir betrachten erneut nur den Fall  $i = \mathfrak{h}$ . Wie in (3.22) gezeigt, sind die zweidimensionalen gescherten und skalierten Fensterfunktionen von der Form

$$\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\xi_1) g_\alpha\left(2^{-j}\xi_1 \left(2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} - \ell\right)\right).$$

### 3.2 Frequenz-Lokalisierung

Für  $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$  gilt

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq \frac{1}{2} + \alpha \leq \frac{2}{3} < 1 + 2\alpha \leq \frac{4}{3} \quad (3.26)$$

und mit der Trägereigenschaft (3.2) der Funktion  $\tilde{g}_\alpha$  folgt

$$\begin{aligned} \text{supp } \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\xi_1) &= \left\{ \xi_1 \in \mathbb{R} : 2^j \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) < |\xi_1| < 2^j (1 + 2\alpha) \right\} \\ &\subseteq \left\{ \xi_1 \in \mathbb{R} : \frac{2^j}{3} < |\xi_1| < \frac{2^{j+2}}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Falls  $\xi_1 \in \text{supp } \tilde{g}(2^{-j}\circ)$ , folgt erneut wegen (3.26)

$$\begin{aligned} &\text{supp } g_\alpha \left( 2^{-j}\xi_1 \left( 2^{j/2} \frac{\xi_2}{\xi_1} - \ell \right) \right) \\ &= \left\{ \xi_1 \in \text{supp } \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\circ), \xi_2 \in \mathbb{R} : \left| 2^{-j}\xi_1 \left( 2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} - \ell \right) \right| < \frac{1}{2} + \alpha \right\} \\ &\subseteq \left\{ \xi_1 \in \text{supp } \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\circ), \xi_2 \in \mathbb{R} : \left| 2^{-j}\xi_1 \left( 2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} - \ell \right) \right| < \frac{2}{3} \right\} \\ &= \left\{ \xi_1 \in \text{supp } \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\circ), \xi_2 \in \mathbb{R} : \left| \ell - 2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| < \frac{2^{j+1}}{3 |\xi_1|} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \xi_1 \in \text{supp } \tilde{g}_\alpha(2^{-j}\circ), \xi_2 \in \mathbb{R} : \left| \ell - 2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| < 2 \right\}. \end{aligned}$$

Durch die Betrachtung in Polarkoordinaten gegeben durch  $\boldsymbol{\xi} = \rho \boldsymbol{\Theta}(\theta)$ ,  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|_2$  und  $\boldsymbol{\Theta}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$  sowie der Verwendung der diskreten Winkel  $\theta_{k,\ell}^{(h)} = \arctan(\ell 2^{-k})$  aus (2.29) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{supp } g_\alpha \left( 2^{-j}\xi_1 \left( 2^k \frac{\xi_2}{\xi_1} - \ell \right) \right) &\subset \left\{ \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \left| \ell - 2^k \tan \theta \right| < 2 \right\} \\ &= \left\{ \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \theta_{k,\ell-2}^{(h)} < \theta < \theta_{k,\ell+2}^{(h)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Es gilt  $\rho^2 = \xi_1^2 (1 + \tan^2 \theta)$  und wegen  $|\ell| < 2^k$  lässt sich

$$|\rho| \leq \frac{2^{j+2}}{3} \left( 1 + 2^{-2k} (|\ell| + 2)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2^{j+2}}{3} \left( 2 + 2^{2-k} + 2^{2-2k} \right)^{1/2} < 2^{j+1}$$

folgern, wobei die letzte Ungleichung für  $k \geq 5$  wegen

$$\left( 2 + 2^{2-k} + 2^{2-2k} \right) \leq \frac{9}{4}$$

gilt. Die untere Schranke für den Radius  $\rho$  erhalten wir durch die Abschätzung

$$|\rho| \geq \frac{2^j}{3} \left( 1 + 2^{-2k} (|\ell| + 2)^2 \right)^{1/2} > \frac{2^j}{3},$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Zum Schluss dieses Abschnitts beweisen wir eine Abschätzung der Differenz der auftretenden Winkel  $\theta_{k,\ell}^{(i)}$ , welche im nächsten Kapitel häufiger gebraucht wird.

**Lemma 3.8.**

Für  $k \geq 2$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^k$  gilt

$$\theta_{k,\ell+2}^{(h)} - \theta_{k,\ell-2}^{(h)} = \theta_{k,\ell-2}^{(v)} - \theta_{k,\ell+2}^{(v)} \leq \frac{2^{4-k}}{3}.$$

*Beweis.* Wir nutzen die Identität  $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ , weshalb

$$\theta_{k,\ell+2}^{(h)} - \theta_{k,\ell-2}^{(h)} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{k,\ell-2}^{(h)}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{k,\ell+2}^{(h)}\right) = \theta_{k,\ell-2}^{(v)} - \theta_{k,\ell+2}^{(v)}$$

folgt. Des Weiteren gilt das Additionstheorem (vgl. [6, S.185])

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \quad \text{für } xy > -1 \quad (3.28)$$

und für  $k \geq 2$  gilt die Ungleichung  $1 - 2^{2(1-k)} \geq \frac{3}{4}$ , womit sich

$$\frac{2^{2-k}}{1 + 2^{-2k}(\ell^2 - 4)} \leq \frac{2^{2-k}}{1 - 2^{2(1-k)}} \leq \frac{2^{4-k}}{3} \quad (3.29)$$

schließen lässt. Da der Arkustangens monoton wachsend ist und  $\arctan(x) \leq x$  für alle  $x \geq 0$  gilt, folgt aus (3.28) und (3.29)

$$\theta_{k,\ell+2}^{(h)} - \theta_{k,\ell-2}^{(h)} = \arctan\left(\frac{2^{2-k}}{1 + 2^{-2k}(\ell^2 - 4)}\right) \leq \arctan\left(\frac{2^{-k+4}}{3}\right) \leq \frac{2^{4-k}}{3}.$$

□

### 3.3 Orts- und Richtungs-Lokalisierung

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Lemma, welches die Stelle und den Wert des Maximums der trigonometrischen Shearlets aus Definition 3.4 angibt.

**Lemma 3.9.**

Für die Funktionen  $\psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}$  aus Definition 3.4 gilt

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2} \left| \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}(\mathbf{x}) \right| = \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}(2\pi\tilde{\mathbf{y}}) = 2^{j-k/2}.$$

*Beweis.* Da die Funktion  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  wegen der Eigenschaften zulässiger Funktionen aus Definition 2.1 nichtnegativ ist, gilt für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2$

$$\left| \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}(\mathbf{x}) \right| \leq 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) = \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}(2\pi\tilde{\mathbf{y}}). \quad (3.30)$$

### 3.3 Orts- und Richtungs-Lokalisierung

Demnach ist  $2\pi\tilde{\mathbf{y}}$  die Maximalstelle und es bleibt zu zeigen, dass  $\psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(i)}(2\pi\tilde{\mathbf{y}}) = 2^{j-k/2}$ .

Es sei  $\mathbf{k} \in \left(\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)$  gegeben, was nach der Definition der Mengen in (3.7) äquivalent ist zu  $\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{-\text{T}} \mathbf{k} \in \text{supp } \Psi_{\alpha}^{(i)}$ . Wegen Lemma 3.5 existiert stets genau ein  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$  mit

$$\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{-\text{T}} \mathbf{k} + \mathbf{z} = \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{-\text{T}} \left(\mathbf{k} + \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{\text{T}} \mathbf{z}\right) \in \left(\Omega^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right),$$

was wiederum  $\mathbf{k} + \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{\text{T}} \mathbf{z} \in \left(\Omega_{j,k,\ell}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)$  impliziert.

Für  $\tilde{\mathbf{k}} \in \left(\Omega_{j,k,\ell}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)$  betrachten wir die Mengen

$$\Gamma_{\tilde{\mathbf{k}}} := \left\{ \mathbf{k} \in \left(\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right) : \left(\mathbf{k} + \left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^{\text{T}} \mathbf{z}\right) = \tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \right\},$$

welche nach der Existenz und Eindeutigkeit der Vektoren  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$  aus Lemma 3.5

$$\Gamma_{\tilde{\mathbf{k}}_1} \cap \Gamma_{\tilde{\mathbf{k}}_2} = \emptyset, \quad \bigcup_{\tilde{\mathbf{k}} \in \left(\Omega_{j,k,\ell}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)} \Gamma_{\tilde{\mathbf{k}}} = \text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2,$$

erfüllen. Schließlich folgt mit (3.8) und Lemma 3.6

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k} \in \left(\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) = \sum_{\tilde{\mathbf{k}} \in \left(\Omega_{j,k,\ell}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2\right)} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_{\tilde{\mathbf{k}}}} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) = 2^{2j-k}$$

und somit eingesetzt in (3.30) die Behauptung

$$\psi_{j,k,\ell,\mathbf{y}}^{(i)}(2\pi\tilde{\mathbf{y}}) = 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) = 2^{j-k/2}.$$

□

Die nachfolgenden zwei Lemmata enthalten Abschätzungen für die partiellen Ableitungen der Fensterfunktionen  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  in Polar- beziehungsweise kartesischen Koordinaten.

#### Lemma 3.10.

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei eine Funktion  $\Psi_{\alpha}^{(i)} \in \mathcal{W}^q$  aus Definition 3.2 gegeben. Dann gilt für alle  $r \leq q$

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial \rho^r} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \right] \right| \leq C_1(r), \quad \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \right] \right| \leq C_2(r) 2^{kr}.$$

*Beweis.* Wir beweisen nur den Fall  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$  und betrachten Polarkoordinaten  $\boldsymbol{\xi} = \rho \Theta(\theta)$  mit  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|_2$  und  $\Theta(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^{\text{T}}$ . Dann gilt mit der Darstellung aus (3.22)

$$\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) = \tilde{g}_{\alpha}(\rho \cos \theta) g_{\alpha}\left(\rho \cos \theta \left(2^k \tan \theta - \ell\right)\right)$$

und mit der Kettenregel folgt für alle  $s \leq r$

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} [\tilde{g}_\alpha(\rho \cos \theta)] \right| = |\cos \theta|^s \left| \tilde{g}_\alpha^{(s)}(\rho \cos \theta) \right| \leq \|\tilde{g}_\alpha\|_{C^s(\mathbb{R})} = C_1(s). \quad (3.31)$$

Wegen Lemma 3.7 gilt

$$\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \subset \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \frac{1}{3} < |\rho| < 2, \theta_{k,\ell-2}^{(h)} < \theta < \theta_{k,\ell+2}^{(h)} \right\},$$

was mit (3.27) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left[ g_\alpha(\rho \cos \theta (2^k \tan \theta - \ell)) \right] \right| &= |\cos \theta|^s \left| 2^k \tan \theta - \ell \right|^s \left| g_\alpha^{(s)}(\rho \cos \theta (2^k \tan \theta - \ell)) \right| \\ &\leq 2^s \|g_\alpha\|_{C^s(\mathbb{R})} \\ &\leq C_2(s) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ermöglicht. Mit der Leibniz-Produktregel und der Dreiecksungleichung folgt aus (3.31) und (3.32)

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^r}{\partial \rho^r} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \right] \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left| \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} [\tilde{g}_\alpha(\rho \cos \theta)] \right| \left| \frac{\partial^{r-s}}{\partial \rho^{r-s}} \left[ g_\alpha(\rho \cos \theta (2^k \tan \theta - \ell)) \right] \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} 2^{r-s} C_1(s) C_2(r-s) \\ &\leq 3^r C_3(r) = C_4(r). \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich für die Variable  $\theta$  wiederum mit der Kettenregel für alle  $s \leq r$

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} [\rho \cos \theta] \right| \leq |\rho|,$$

weshalb mit der Definition der Bell-Zahl  $B_s$  aus (1.5) und der Formel von Faà di Bruno aus (1.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} [\tilde{g}_\alpha(\rho \cos \theta)] \right| &\leq \sum_{t=1}^s \left| \tilde{g}_\alpha^{(t)}(\rho \cos \theta) \right| B_{s,t} \left( \left| \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho \cos \theta] \right|, \dots, \left| \frac{\partial^{s-t+1}}{\partial \theta^{s-t+1}} [\rho \cos \theta] \right| \right) \\ &\leq \|\tilde{g}_\alpha\|_{C^s(\mathbb{R})} \sum_{t=1}^s \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} \left( \frac{\left| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} [\rho \cos \theta] \right|}{j!} \right)^{m_j} \\ &\leq C(s) \sum_{t=1}^s |\rho|^t \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} (j!)^{-m_j} \\ &\leq C_2(s) 2^s \sum_{t=0}^s \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} (j!)^{-m_j} \\ &\leq C_3(s) B_s = C_4(s) \end{aligned} \quad (3.33)$$

folgt. Zudem haben wir für gerade  $s \in \mathbb{N}$  wegen  $\rho \leq 2$  und (3.27)

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \left[ \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right] \right| = |\rho| |\cos \theta| \left| 2^k \tan \theta - \ell \right| \leq 4$$

und für ungerade  $s \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \left[ \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right] \right| = |\rho| |\cos \theta| \left| 2^k + \ell \tan \theta \right| \leq C |\rho| 2^k,$$

da  $|\ell| < 2^k$ . Ähnlich zu den vorherigen Überlegungen ergibt sich erneut mit der Formel von Faà di Bruno aus (1.7)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \left[ g_\alpha \left( \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right) \right] \right| \\ & \leq \|g_\alpha\|_{C^s(\mathbb{R})} \sum_{t=1}^s B_{s,t} \left( \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right] \right|, \right. \\ & \quad \left. \dots, \left| \frac{\partial^{s-t+1}}{\partial \theta^{s-t+1}} \left[ \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right] \right| \right) \\ & \leq \|g_\alpha\|_{C^s(\mathbb{R})} \sum_{t=1}^s \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} \left( \frac{\left| \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \left[ \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right] \right|}{j!} \right)^{m_j} \\ & \leq C(s) \sum_{t=1}^s |\rho|^t 2^{kt} \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} (j!)^{-m_j} \\ & \leq C_2(s) 2^{ks} \sum_{t=0}^s \sum_{\mathbf{m}} \binom{s}{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{s-t+1} (j!)^{-m_j} \\ & \leq C_3(s) 2^{ks} B_s = C_4(s) 2^{ks}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Schließlich folgt erneut mit der Leibniz-Produktregel, der Dreiecksungleichung und den Abschätzungen (3.33) sowie (3.34)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(h)} \left( 2^j \rho \Theta(\theta) \right) \right] \right| & \leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \left[ \tilde{g}_\alpha(\rho \cos \theta) \right] \right| \\ & \quad \times \left| \frac{\partial^{r-s}}{\partial \theta^{r-s}} \left[ g_\alpha \left( \rho \cos \theta \left( 2^k \tan \theta - \ell \right) \right) \right] \right| \\ & \leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} C_3(s) B_s C_4(r-s) 2^{k(r-s)} B_{r-s} \\ & \leq C_5(r) B_r^2 2^{kr} = C_6(r) 2^{kr}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.11.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei eine Funktion  $\Psi_\alpha^{(\mathbf{i})} \in \mathcal{W}^q$  aus Definition 3.2 gegeben. Dann gilt für  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $|\mathbf{r}|_1 \leq q$ , einer Drehmatrix  $\mathbf{R}_\theta$  mit  $\theta \in [0, 2\pi)$  und  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \left| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathbf{i})}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) \right] \right| &\leq C(q, \alpha) 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathbf{i})} - \theta) \right| \right)^{r_1} \\ &\quad \times \left( 1 + 2^k \left| \cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathbf{i})} - \theta) \right| \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis wird hier für den Fall  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$  geführt und erfolgt für  $\mathbf{i} = \mathfrak{v}$  mit vertauschten Koordinaten und ähnlichen Argumenten, wie am Ende des Beweises erläutert wird.

Mit dem Vektor

$$\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \\ \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit (3.22)

$$\begin{aligned} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathbf{i})}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) &= \tilde{g}_\alpha \left( 2^{-j} (\xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta) \right) \\ &\quad \times g_\alpha \left( 2^{k-j} (\xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta) - \ell 2^{-j} (\xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta) \right). \end{aligned}$$

Wir verzichten in diesem Beweis auf die länglichen Argumente der Funktionen in der letzten Gleichung und schreiben deshalb im folgenden Beweis kurz  $g_\alpha$  und  $\tilde{g}_\alpha$ .

Die partiellen Ableitungen der beiden auftretenden Funktionen sind für  $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_0$  mit  $|\mathbf{m}|_1 \leq q$  jeweils nach der Kettenregel durch

$$\partial^{\mathbf{m}} \tilde{g}_\alpha = 2^{-j|\mathbf{m}|_1} (\cos \theta)^{m_1} (-\sin \theta)^{m_2} \tilde{g}_\alpha^{(|\mathbf{m}|_1)}$$

beziehungsweise mit der Darstellung  $\ell = 2^k \tan \left( \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right)$  aus (2.29) durch

$$\begin{aligned} \partial^{\mathbf{m}} g_\alpha &= \left( 2^{k-j} \sin \theta - \ell 2^{-j} \cos \theta \right)^{m_1} \left( 2^{k-j} \cos \theta + \ell 2^{-j} \sin \theta \right)^{m_2} g_\alpha^{(|\mathbf{m}|_1)} \\ &= 2^{-j|\mathbf{m}|_1} \left( 2^k \left( \frac{\sin(\theta - \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})}{\cos \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}} \right) \right)^{m_1} \left( 2^k \left( \frac{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta)}{\cos \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}} \right) \right)^{m_2} g_\alpha^{(|\mathbf{m}|_1)} \end{aligned}$$

gegeben. Die gesuchte partielle Ableitung lässt sich mit der Leibniz-Regel (1.11) und den partiellen Ableitungen der Funktionen  $\tilde{g}_\alpha$  und  $g_\alpha$  darstellen als

$$\begin{aligned} \partial^{\mathbf{r}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) \right] &= \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{r}} \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} \partial^{\mathbf{s}} \tilde{g}_\alpha \partial^{\mathbf{r}-\mathbf{s}} g_\alpha \\ &= 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \binom{r_1}{s_1} \binom{r_2}{s_2} (\cos \theta)^{s_1} \left( 2^k \left( \frac{\sin(\theta - \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})}{\cos \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}} \right) \right)^{r_1-s_1} \\ &\quad \times (-\sin \theta)^{s_2} \left( 2^k \left( \frac{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta)}{\cos \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}} \right) \right)^{r_2-s_2} \tilde{g}_\alpha^{(|s_1|)} g_\alpha^{(|\mathbf{r}|_1 - |s_1|)}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}$  ist nach Voraussetzung  $q$ -mal stetig partiell differenzierbar, weshalb die in [Lemma 3.11](#) auftretenden Ableitungen der Funktionen  $g_\alpha$  und  $\tilde{g}_\alpha$  mit ihrer jeweiligen  $C^q$ -Norm nach oben abgeschätzt werden können und

$$\begin{aligned} \left| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) \right] \right| &\leq C(q, \alpha) 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \sum_{s_1=0}^{r_1} \binom{r_1}{s_1} |\cos \theta|^{s_1} \left| 2^k \frac{\sin(\theta - \theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})}{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})} \right|^{r_1-s_1} \\ &\quad \times \sum_{s_2=0}^{r_2} \binom{r_2}{s_2} |\sin \theta|^{s_2} \left| 2^k \frac{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta)}{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})} \right|^{r_2-s_2} \end{aligned}$$

folgt. Mit zweimaliger Anwendung des binomischen Lehrsatzes lässt sich dieser Ausdruck weiter umformen zu

$$\begin{aligned} C(q, \alpha) 2^{-j|\mathbf{r}|_1} &\left( |\cos \theta| + 2^k \left| \frac{\sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta)}{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})} \right| \right)^{r_1} \left( |\sin \theta| + 2^k \left| \frac{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta)}{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})} \right| \right)^{r_2} \\ &\leq C_2(q, \alpha) 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta) \right| \right)^{r_1} \left( 1 + 2^k \left| \cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})} - \theta) \right| \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Ungleichung die Abschätzung  $|\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})}| \leq \frac{\pi}{4}$  und somit  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{h})})| \leq 1$  ausgenutzt. Im Fall  $\mathfrak{i} = \mathfrak{v}$  führt eine analoge Vorgehensweise zu

$$\begin{aligned} \left| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(\mathfrak{v})}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) \right] \right| &\leq C(q, \alpha) 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \left( |\sin \theta| + 2^k \left| \frac{\sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})} - \theta)}{\sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})})} \right| \right)^{r_1} \\ &\quad \times \left( |\cos \theta| + 2^k \left| \frac{\cos(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})} - \theta)}{\sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})})} \right| \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas folgt in diesem Fall mit der Abschätzung  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})})| \leq 1$ , da  $\frac{\pi}{4} < |\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{v})}| \leq \frac{3\pi}{4}$ .  $\square$

Für  $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^2$  und die verschobenen Musterpunkte  $\tilde{\mathbf{y}}$  aus [\(3.21\)](#) betrachten wir die Darstellung

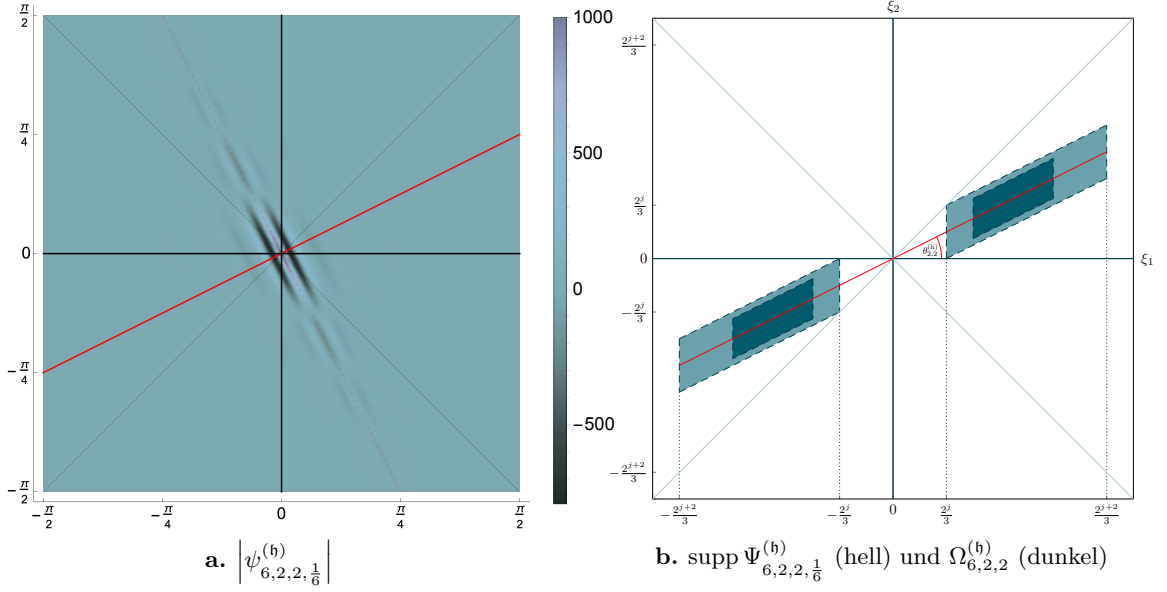
$$(\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}) = |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2 (\cos \theta, \sin \theta)^{\mathbf{T}}, \quad \theta := \theta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \in [0, 2\pi), \quad (3.35)$$

in Polarkoordinaten und können damit das folgende Theorem über die Orts-Lokalisierung der trigonometrischen Shearlets aus [Definition 3.4](#) zeigen.

**Theorem 3.12.**

Für  $\mathfrak{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \geq 2$  sei eine Funktion  $\Psi_\alpha^{(\mathfrak{i})} \in \mathcal{W}^{2q}$  aus [Definition 3.2](#) gegeben. Dann gilt für  $2k \leq j$  die Abschätzung

$$\left| \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y},\alpha}^{(\mathfrak{i})}(\mathbf{x}) \right| \leq 2^{j-k/2} \min \left\{ 1, \frac{C(q, \alpha) \left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(\mathfrak{i})} - \theta) \right| \right)^{2q}}{(2^j |2\pi\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|_2)^{2q}} \right\}.$$



**Abbildung 3.5.** Darstellung des trigonometrischen Shearlets  $|\psi_{6,2,2,\frac{1}{6}}^{(h)}|$  im Ortsbereich im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$  und der Mengen  $\text{supp } \Psi_{6,2,2,\frac{1}{6}}^{(h)}$  (hell) und  $\Omega_{6,2,2}^{(h)}$  (dunkel) im Frequenzbereich.

*Beweis.* Wenden wir [Lemma 1.10](#) auf die Funktion  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \in C_0^{2q}(\mathbb{R}^2)$  an, so erfüllt diese die Voraussetzungen von [Theorem 1.13](#), weshalb sich die trigonometrischen Shearlets aus [Definition 3.4](#) mit der Poisson-Sumationsformel [\(1.27\)](#) durch

$$\psi_{j,k,\ell,\gamma,\alpha}^{(i)}(\mathbf{x}) = 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T(\mathbf{x}-2\pi\tilde{\mathbf{y}})} = 2^{k/2-j} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} I(\mathbf{n}) \quad (3.36)$$

mit

$$I(\mathbf{n}) := \mathcal{F}^{-1} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)} \right] (\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})) = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}-2\pi(\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{n}))} d\boldsymbol{\xi}$$

ausdrücken lassen.

Wir betrachten zunächst den Fall  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Eine Substitution im Integral mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_\theta$  liefert

$$I(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{x}-2\pi\tilde{\mathbf{y}})} d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) e^{i\xi_1 |\mathbf{x}-2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2} d\boldsymbol{\xi},$$

wobei der Term in der Exponentialfunktion wegen der Darstellung [\(3.35\)](#) und

$$\mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}) = |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2 \mathbf{R}_\theta^T (\cos \theta, \sin \theta)^T = |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2 (1, 0)^T$$

nur noch von der Variablen  $\xi_1$  abhängt. Die Funktion  $\Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}$  besitzt einen kompakten Träger, weshalb sich das verbleibende Integral  $I(\mathbf{0})$  nach  $2q$ -facher partieller Integration bezüg-

lich der Variablen  $\xi_1$  mit Lemma 3.11 sowie den Eigenschaften (3.8) und (3.9) betragsmäßig durch

$$\begin{aligned}
 |I(\mathbf{0})| &\leq |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2^{-2q} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \xi_1^{2q}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\xi}) \right] \right| d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2^{-2q} \left\| \partial^{(2q,0)} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{R}_{\theta^\circ}) \right] \right\|_{\mathbb{R}^2, \infty} \int_{\text{supp } \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}} d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq \frac{C_1(q, \alpha) 2^{2j-k} \left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(i)} - \theta) \right| \right)^{2q}}{(2^j |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2)^{2q}} \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

abschätzen lässt.

Für die Integrale  $I(\mathbf{n})$  mit festem  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  nehmen wir eine ähnliche Substitution vor, und zwar mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{\theta_{\mathbf{n}}}$  um den Winkel  $\theta_{\mathbf{n}} := \theta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}} \in [0, 2\pi)$ , gegeben in Polarkoordination durch die Darstellung

$$\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n}) = |\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_2 (\cos \theta_{\mathbf{n}}, \sin \theta_{\mathbf{n}})^T.$$

Mit  $2q$ -facher partieller Integration bezüglich der ersten Variablen und der erneuten Verwendung von Lemma 3.11 sowie (3.8) und (3.9) ergibt sich auf ähnliche Weise wie in (3.37)

$$\begin{aligned}
 |I(\mathbf{n})| &\leq |\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_2^{-2q} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \xi_1^{2q}} \left[ \Psi_{j,k,\ell,\alpha}^{(i)}(\mathbf{R}_{\theta_{\mathbf{n}}} \boldsymbol{\xi}) \right] \right| d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq \frac{C_2(q, \alpha) 2^{-2jq} 2^{2j-k} \left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(i)} - \theta_{\mathbf{n}}) \right| \right)^{2q}}{|\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_2^{2q}}.
 \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt mit der Monotonie der endlichen Vektornormen und der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_2 \geq |\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_\infty \geq 2\pi |\mathbf{n}|_\infty - |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_\infty \geq \pi(2 |\mathbf{n}|_\infty - 1)$$

sowie

$$|\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{n}|_\infty = j, j \in \mathbb{N}\}| = 8j,$$

weshalb sich die folgende unendliche Reihe durch

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |I(\mathbf{n})| &\leq C_2(q, \alpha) 2^{-2jq} 2^{2j-k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\left( 1 + 2^k \left| \sin(\theta_{k,\ell}^{(i)} - \theta_{\mathbf{n}}) \right| \right)^{2q}}{|\mathbf{x} - 2\pi(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{n})|_2^{2q}} \\
 &\leq \frac{C_2(q, \alpha) 2^{2q(k-j)} 2^{2j-k}}{\pi^{2q}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\mathbf{n}|_\infty = j} (2 |\mathbf{n}|_\infty - 1)^{-2q} \\
 &= \frac{C_2(q, \alpha) 2^{2q(k-j)} 2^{2j-k}}{\pi^{2q}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8j}{(2j-1)^{2q}} \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

abschätzen lässt. Für  $q \geq 2$  konvergiert die unendliche Reihe in der letzten Zeile und mit der Abschätzung

$$\pi^{2q} \geq |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_{\infty}^{2q} \geq \frac{1}{2^q} |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2^{2q}$$

lässt sich mit (3.38)

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |I_{\mathbf{n}}| \leq \frac{C_2(q, \alpha) 2^{2q(k-j)} 2^{2j-k}}{\pi^{2q}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8j}{(2j-1)^{2q}} \leq \frac{C_3(q, \alpha) 2^{2j-k}}{(2^j |\mathbf{x} - 2\pi\tilde{\mathbf{y}}|_2)^{2q}} \quad (3.39)$$

zeigen, wobei in der letzten Abschätzung die Voraussetzung  $2k \leq j$  verwendet wurde. Die Behauptung des Theorems ergibt sich durch die betragsmäßige Abschätzung von (3.36) mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \psi_{j,k,\ell,\mathbf{y}}^{(i)}(\mathbf{x}) \right| \leq 2^{k/2-j} \left( |I(\mathbf{0})| + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |I(\mathbf{n})| \right)$$

und der Verwendung der Abschätzungen (3.37) und (3.39) sowie Lemma 3.9 über das Maximum der trigonometrischen Shearlets.  $\square$

### 3.4 Frame-Eigenschaften

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels fassen wir die in Abschnitt 3.1 definierten Funktionen zu trigonometrischen Shearlet-Systemen zusammen und untersuchen diese auf ihre Frame-Eigenschaften im Hilbertraum  $L_2(\mathbb{T}^2)$ . Für den Rest dieses Abschnitts sei  $\alpha = \frac{1}{6}$  und  $k = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  für  $j \in \mathbb{N}_0$  fest gewählt, weshalb bei allen von  $\alpha$  und  $k$  abhängigen Objekten dieses Abschnitts auf die Angabe dieser Parameter verzichtet wird. So schreiben wir beispielsweise für die Matrizen aus (2.22) und (2.23)

$$\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)} := \mathbf{N}_{j, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor, \ell}^{(h)} = \begin{pmatrix} 2^j & \ell 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor} \\ 0 & 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{j,\ell}^{(v)} := \mathbf{N}_{j, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor, \ell}^{(v)} = \begin{pmatrix} 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor} & 0 \\ \ell 2^{j-\lfloor j/2 \rfloor} & 2^j \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

weshalb für die Determinanten

$$\det \mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)} = \det \mathbf{N}_{j,\ell}^{(v)} = 2^{2j-\lfloor j/2 \rfloor}$$

gilt. Für den Beweis der Frame-Eigenschaft der trigonometrischen Shearlets benötigen wir eine zusätzliche Annahme an die zulässige Funktion  $g$  aus Definition 2.1. Es sei  $x^* \in \text{supp } g$  so gewählt, dass  $g(x^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , weshalb aus der Monotonie-Eigenschaft (2.1) zulässiger Funktionen die Ungleichung

$$\frac{1}{3} < x^* < \frac{1}{2} < 1 - x^* < \frac{2}{3}$$

folgt (vgl. Abbildung 3.6). Als zusätzliche Bedingung an die Funktion  $g$  fordern wir für den Rest dieses Abschnitts, dass

$$g(x+d)^2 + g(x-d)^2 \geq 2g(x)^2 \quad (3.41)$$

für alle  $x \in [x^*, 1 - x^*]$  und alle  $d \in \mathbb{R}$  mit  $x + d \in (0, \frac{2}{3})$  erfüllt ist.

Mit einer Fensterfunktion  $\Psi_{\frac{1}{6}}^{(i)}$  für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  aus [Definition 3.2](#), bestehend aus dem Tensorprodukt der eindimensionalen zulässigen Funktionen  $g$  und  $\tilde{g}$ , erhalten wir für [\(3.7\)](#) die Darstellungen

$$\begin{aligned}\Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(\boldsymbol{\xi}) &= \Psi^{(\mathfrak{h})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right)^{-\text{T}} \boldsymbol{\xi} \right) = \tilde{g}(2^{-j}\xi_1) g \left( 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor} \xi_2 - \ell 2^{-j} \xi_1 \right), \\ \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{v})}(\boldsymbol{\xi}) &= \Psi^{(\mathfrak{v})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{v})} \right)^{-\text{T}} \boldsymbol{\xi} \right) = \tilde{g}(2^{-j}\xi_2) g \left( 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor} \xi_1 - \ell 2^{-j} \xi_2 \right).\end{aligned}\tag{3.42}$$

Entsprechend verwenden wir für die Translate der trigonometrischen Shearlets aus [Definition 3.4](#) für  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  und  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  die Notation

$$\psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} := \left( \det \mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)} \right)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^{\text{T}}(\circ - 2\pi\tilde{\mathbf{y}})} = \left( \det \mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)} \right)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\Psi}_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^{\text{T}}(\circ - 2\pi\mathbf{y})}.$$

Für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  bezeichnen wir die horizontalen beziehungsweise vertikalen trigonometrischen Shearlet-Systeme mit

$$\mathcal{S}^{(i)} := \left\{ \left( \det \mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)} \right)^{-1/2} \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} : j \in \mathbb{N}_0, |\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)}) \right\}.\tag{3.43}$$

Der Begriff Frame wurde als Verallgemeinerung orthonormaler Basen in Vektorräumen eingeführt und erlaubt die Rekonstruktion von Funktionen mit redundanten Systemen. Ausführliche Betrachtungen über weite Gebiete der Frame-Theorie finden sich beispielsweise in den Monographien [\[10, 11\]](#). Wir wollen an dieser Stelle die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften von Frames für unsere Betrachtungen zusammenfassen und beginnen mit der Definition von Frames in Hilberträumen.

**Definition 3.13.**

Ein Funktionensystem  $(f_i)_{i \in I}$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  heißt Frame für  $\mathcal{H}$ , falls Konstanten  $0 < A \leq B < \infty$  existieren, sodass

$$A \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B \|f\|_{\mathcal{H}}^2\tag{3.44}$$

für alle  $f \in \mathcal{H}$  erfüllt ist. Dabei heißen  $A$  und  $B$  untere beziehungsweise obere Frame-Konstante. Der Frame heißt  $A$ -tight, falls  $A = B$  und wir nennen den Frame einen Parseval-Frame, falls  $A = B = 1$ .

Wir betrachten den Analyse-Operator

$$T : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(I), \quad f \mapsto (\langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}})_{i \in I},$$

der eine Funktion auf seine Koeffizientenfolge bezüglich des Skalarprodukts in  $\mathcal{H}$  mit  $f_i, i \in I$ , abbildet sowie den zu  $T$  adjungierten Synthese-Operator

$$T^* : \ell^2(I) \rightarrow \mathcal{H}, \quad (c_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} c_i f_i.$$

Der Frame-Operator  $S$  ist definiert durch

$$S := T^*T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad f \mapsto \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} f_i,$$

und ist ein positiver, selbstadjungierter und invertierbarer Operator in  $\mathcal{H}$ . Ein Element  $f \in \mathcal{H}$  kann durch die Formel

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} S^{-1} f_i = \sum_{i \in I} \langle f, S^{-1} f_i \rangle_{\mathcal{H}} f_i \quad (3.45)$$

rekonstruiert werden. Dabei bezeichnet  $S^{-1}$  den inversen Frame-Operator und das System  $(S^{-1} f_i)_{i \in I}$  bildet selbst wieder einen Frame in  $\mathcal{H}$  und heißt kanonischer Dual-Frame. Der Unterschied von Frames zu orthonormalen Basen in Hilberträumen besteht darin, dass die Darstellung (3.45) nicht zwangsläufig eindeutig sein muss und auch andere Koeffizientenfolgen die Zerlegung einer Funktion ermöglichen können. Ist der Frame  $(f_i)_{i \in I}$  sogar ein Parseval-Frame, so gilt  $S^{-1} = I_{\mathcal{H}}$  mit dem Identitätsoperator  $I_{\mathcal{H}}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und wir erhalten die von orthonormalen Basen bekannte Entwicklung

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} f_i.$$

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels bemerkt, bilden die klassischen diskreten Shearlet-Systeme auf dem Kegel einen Parseval-Frame des  $L_2(\mathbb{R}^2)$  ([28, 38]). Es wird sich zeigen, dass analoge Ausdrücke zu denen in [38, Theorem 5] von zentraler Bedeutung für den Beweis der Frame-Eigenschaften trigonometrischer Shearlet-Systeme im  $L_2(\mathbb{T}^2)$  sind. Dabei stellt sich heraus, dass es im Fall der trigonometrischen Shearlet-Systeme nicht möglich ist, die Gleichheit zu zeigen, sondern lediglich Abschätzungen nach oben und unten gelten und somit die Parseval-Frame Eigenschaft nicht erhalten bleibt. Der Grund darin liegt einerseits an den speziell geforderten Eigenschaften zulässiger Funktionen in Definition 2.1 und den daraus resultierenden Eigenschaften der Funktion  $\tilde{g}$  in (3.1) und andererseits an der Tensorprodukt-Struktur der zweidimensionalen Fensterfunktionen  $\Psi^{(i)}$ . Dennoch wollen wir auf diese Forderung an die zulässigen Funktionen nicht verzichten, um den Zusammenhang zu den multiplen richtungsbezogenen Waveletzerlegungen aus Abschnitt 2.3 zu erhalten.

Für die zentralen Hilfsresultate dieses Abschnitts betrachten wir erneut die horizontalen und vertikalen Kegel

$$\mathcal{C}^{(h)} := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \leq 1 \right\}, \quad \mathcal{C}^{(v)} := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) : \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right| \leq 1 \right\}$$

aus (2.32). Wir greifen einige Ideen aus [11, Abschnitt 11.2] und [12] auf. In letztgenannter Quelle wurden eindimensionale periodische Funktionensysteme auf ihre Frame-Eigenschaften untersucht. In den folgenden zwei Lemmata leiten wir Abschätzungen für Ausdrücke her, die in ähnlicher Form in [12, Theorem 2.1] für den eindimensionalen Fall betrachtet wurden. Diese zwei Hilfsresultate werden im Anschluss für den Beweis von Theorem 3.16 von zentraler Bedeutung sein.

**Lemma 3.14.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  sei die Funktion  $\Psi_{j,\ell}^{(\mathbf{i})}$  aus (3.42) gegeben. Dann gilt

$$\sup_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(\mathbf{i})} \cap \mathbb{Z}^2} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(\mathbf{i})}(\mathbf{k}) \right| \leq \frac{5}{2}.$$

*Beweis.* Der Beweis wird nur für  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$  geführt. Für ein festes  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathcal{C}^{(\mathfrak{h})} \cap \mathbb{Z}^2$  nehmen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit an, dass  $k_1 > 0$  gilt. Wir wählen  $j^* \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$  und somit  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  gilt. In diesem Beweis spielen die Eigenschaften (2.1), (2.2) sowie (3.1)-(3.5) zulässiger Funktionen eine zentrale Rolle. Aus der Eigenschaft (3.2) folgt

$$\tilde{g}(2^{-j} k_1) = 0 \quad \text{für alle } j \notin \{j^*, j^* + 1\} \quad (3.46)$$

und mit (3.1) lässt sich

$$\begin{aligned} \tilde{g}(2^{-j^*} k_1) + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) &= g(2^{-(j^*+1)} k_1) - g(2^{-j^*} k_1) + g(2^{-(j^*+2)} k_1) - g(2^{-(j^*+1)} k_1) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

schließen. Die zweite Gleichheit in (3.47) ergibt sich einerseits aus  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ , weshalb  $g(2^{-j^*} k_1) = 0$  folgt und andererseits aus Lemma 2.2, da  $2^{-(j^*+2)} k_1 \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ . Zur besseren Übersicht wird in diesem Beweis die Notation

$$s(j, \ell) := 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor} k_2 - \ell 2^{-j} k_1$$

verwendet. Da nach Voraussetzung des Lemmas  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathcal{C}^{(\mathfrak{h})} \cap \mathbb{Z}^2$  gilt, folgt  $|k_2| \leq k_1$ , weshalb wir stets ein  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$  finden, sodass

$$s(j^*, \ell^*) = 2^{-j^*+\lfloor j^*/2 \rfloor} k_2 - \ell^* 2^{-j^*} k_1 \in \left( -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \text{supp } g. \quad (3.48)$$

Wir greifen Definition 3.2 der zweidimensionalen Fensterfunktionen auf, um mit (3.7) und (3.40)

$$\Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{k}) = \Psi^{(\mathfrak{h})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right)^{-T} \mathbf{k} \right) = \tilde{g}(2^{-j} k_1) g(2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor} k_2 - \ell 2^{-j} k_1) = \tilde{g}(2^{-j} k_1) g(s(j, \ell))$$

zu erhalten. Dies führt zusammen mit (3.46) zu

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{k}) \right| = \sum_{j=j^*}^{j^*+1} \tilde{g}(2^{-j} k_1) \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell)). \quad (3.49)$$

Zur weiteren Untersuchung der Summen in (3.49) unterscheiden wir im Folgenden zwei Fälle:

1. Es sei  $2^{-j^*} k_1 \in [1, \frac{4}{3}]$ :  
Wir betrachten zunächst die innere Summe in (3.49) für  $j = j^*$ , für die  $\tilde{g}(2^{-j^*} k_1) \in (0, \frac{1}{2}]$  gilt. Es ergeben sich drei Unterfälle.

- i) Falls  $s(j^*, \ell^*) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  in (3.48) gilt, so existiert wegen der Annahme  $2^{-j^*} k_1 \geq 1$  kein weiteres  $\ell \neq \ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$ , sodass  $s(j^*, \ell) \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . Mit Lemma 2.2 kann deshalb

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell)) = g(s(j^*, \ell^*)) = 1$$

gefolgert werden.

- ii) Falls  $s(j^*, \ell^*) \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ , ist  $s(j^*, \ell^* - 1) > \frac{1}{3}$ . Da  $2^{-j^*} k_1 \geq 1$ , gilt  $s(j^*, \ell^* - 1) \geq s(j^*, \ell^*) + 1$  und wegen der fallenden Monotonie der Fensterfunktion  $g$  auf  $(\frac{1}{3}, \infty)$  folgt mit der Eigenschaft der Zerlegung der Eins aus (2.2)

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell)) = g(s(j^*, \ell^*)) + g(s(j^*, \ell^* - 1)) \leq g(s(j^*, \ell^*)) + g(s(j^*, \ell^*) + 1) = 1.$$

- iii) Falls  $s(j^*, \ell^*) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , folgt mit den Argumenten aus Fall ii) für  $\ell^* + 1$  und der steigenden Monotonie der zulässigen Funktion  $g$  auf  $(-\infty, -\frac{1}{3})$  analog

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell)) = g(s(j^*, \ell^*)) + g(s(j^*, \ell^* + 1)) \leq g(s(j^*, \ell^*)) + g(s(j^*, \ell^*) - 1) = 1.$$

Als nächstes untersuchen wir die innere Summe in (3.49) für  $j = j^* + 1$ . Nach der Bedingung des 1. Falls gilt  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ , also  $\tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \in (\frac{1}{2}, 1]$ . Wir wählen erneut  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}$ , sodass  $s(j^* + 1, \ell^*) \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  und unterscheiden zwei weitere Unterfälle.

- a) Für  $s(j^* + 1, \ell^*) \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$  gilt  $s(j^* + 1, \ell^* + 1) \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  sowie  $s(j^* + 1, \ell^* - 1) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  und wegen der Monotonie-Eigenschaften der zulässigen Funktionen aus (2.1) lässt sich demnach ähnlich wie zuvor in ii) und iii)

$$g(s(j^* + 1, \ell^* - 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^* + 1)) \leq g(s(j^* + 1, \ell^* - 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^* - 1) - 1) = 1$$

folgern. Deshalb gilt mit Lemma 2.2

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell)) = g(s(j^* + 1, \ell^* - 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^*)) + g(s(j^* + 1, \ell^* + 1)) \leq 2. \quad (3.50)$$

- b) Für  $s(j^* + 1, \ell^*) \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$  existiert höchstens ein  $\ell \neq \ell^*$ , sodass  $s(j^* + 1, \ell) \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  und zwar entweder, falls  $\ell = \ell^* + 1$  oder  $\ell = \ell^* - 1$ . Die Summe (3.50) besteht in diesem Fall aus höchstens zwei Summanden und da  $0 \leq g(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell)) \leq 2.$$

### 3.4 Frame-Eigenschaften

Zusammengefasst erhalten wir mit den vorherigen Betrachtungen und (3.47) eingesetzt in (3.49) für den Fall  $2^{-j^*} k_1 \in [1, \frac{4}{3})$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(b)}(\mathbf{k}) \right| &= \sum_{j=j^*}^{j^*+1} \tilde{g}(2^{-j} k_1) \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell)) \\ &\leq \tilde{g}(2^{-j^*} k_1) + 2\tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \\ &= 1 + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \leq 2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

da  $\tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

2. Es sei  $2^{-j^*} k_1 \in (\frac{2}{3}, 1)$ :

Wie bereits im ersten Fall wird zunächst die innere Summe in (3.49) für  $j = j^*$  untersucht. Für  $s(j^*, \ell^*) \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  gilt entweder  $s(j^*, \ell^* + 1) \notin (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  oder  $s(j^*, \ell^* - 1) \notin (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . Deshalb ist

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell)) = g(s(j^*, \ell^* - 1)) + g(s(j^*, \ell^*)) + g(s(j^*, \ell^* + 1)) \leq 2, \quad (3.52)$$

da mindestens einer der Summanden verschwindet und wegen Lemma 2.2  $0 \leq g(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Für  $j = j^* + 1$  ist nach Voraussetzung des 2. Falls  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , sodass die innere Summe in (3.49) aus maximal vier Summanden besteht. Es sei  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}$ , sodass

$$\begin{aligned} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell)) &= g(s(j^* + 1, \ell^* - 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^*)) \\ &\quad + g(s(j^* + 1, \ell^* + 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^* + 2)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nach Voraussetzung gilt  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , weshalb

$$s(j^* + 1, \ell^* - 1) - s(j^* + 1, \ell^* + 2) = 3 \cdot 2^{-(j^*+1)} k_1 \geq 1$$

und erneut mit der Eigenschaft der Zerlegung der Eins aus (2.2)

$$g(s(j^* + 1, \ell^* - 1)) + g(s(j^* + 1, \ell^* + 2)) \leq 1$$

folgt. Eingesetzt in (3.53) lässt sich schließlich

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell)) \leq 3 \quad (3.54)$$

folgern. Zusammengefasst erhalten wir erneut mit (3.47) und (3.52) sowie (3.54) eingesetzt in (3.49) im Fall  $2^{-j^*} k_1 \in (\frac{2}{3}, 1)$  die obere Schranke

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(b)}(\mathbf{k}) \right| \leq 2\tilde{g}(2^{-j^*} k_1) + 3\tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) = 2 + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \leq \frac{5}{2}, \quad (3.55)$$

da  $\tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \in (0, \frac{1}{2}]$ . Aus (3.55) und (3.51) folgt schließlich die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 3.15.**

Falls eine zulässige Funktion  $g$  die Eigenschaft (3.41) erfüllt, gilt für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$

$$\min_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) \right|^2 - \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k} + (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})^T \mathbf{z}) \right| \right) = \frac{1}{4}.$$

*Beweis.* Der Beweis wird erneut nur für  $i = \mathfrak{h}$  geführt. Für ein festes  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T \in \mathcal{C}^{(\mathfrak{h})} \cap \mathbb{Z}^2$  nehmen wir genau wie im Beweis von Lemma 3.14 ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit an, dass  $k_1 > 0$  gilt. Wir zeigen zunächst, dass

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{k}) \right|^2 \geq \frac{1}{2}. \quad (3.56)$$

Dazu wählen wir  $j^* \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$  und somit  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , weshalb Eigenschaft (3.47)

$$\tilde{g}(2^{-j^*} k_1) + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) = 1$$

erneut gilt. Damit lässt sich

$$\begin{aligned} \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 &= \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 + \left(1 - \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)\right)^2 \\ &= 2\tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 - 2\tilde{g}(2^{-j^*} k_1) + 1 \end{aligned}$$

zeigen, weshalb wegen  $0 \leq \tilde{g}(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 \leq 1 \quad (3.57)$$

folgt. Wir verwenden in diesem Beweis erneut die Notation

$$s(j, \ell) = 2^{-j+\lfloor j/2 \rfloor} k_2 - \ell 2^{-j} k_1$$

und erhalten ähnlich wie in (3.49) die Darstellung

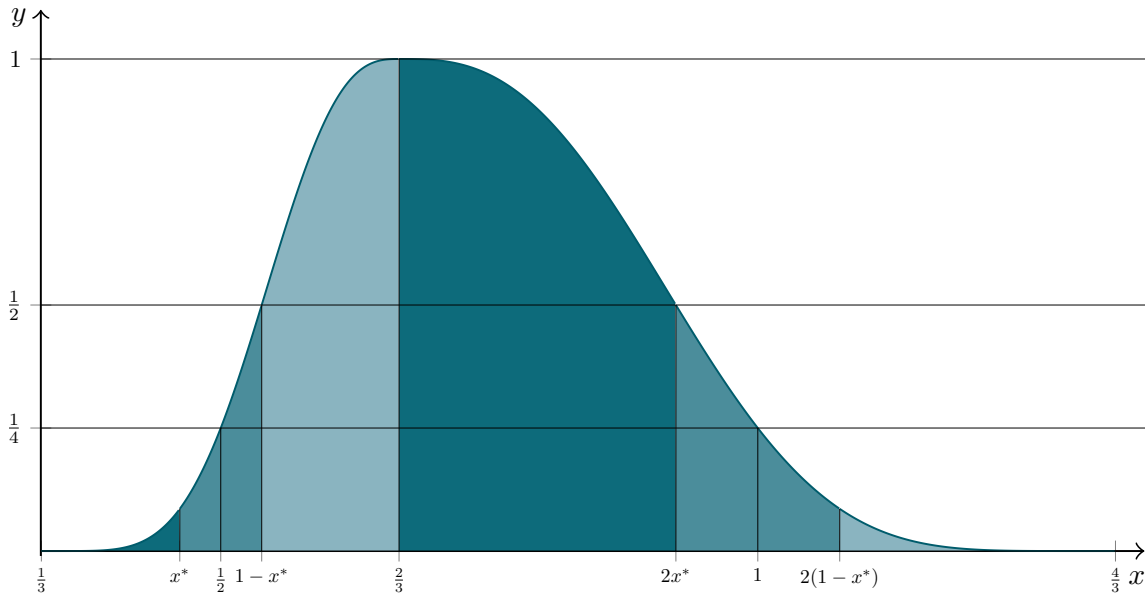
$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{k}) \right|^2 = \sum_{j=j^*}^{j^*+1} \tilde{g}(2^{-j} k_1)^2 \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell))^2. \quad (3.58)$$

Mit Lemma 2.2 haben wir  $g(x) = 1$  für  $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , kann wegen  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  auf

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^*+1, \ell)) \geq 1 \quad (3.59)$$

geschlossen werden. Im Folgenden sei  $x^* \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  so gewählt, dass  $g(x^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dann gilt wegen (3.2) und (2.1)

$$\tilde{g}(x^*) = g\left(\frac{x^*}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{g}(2x^*) = g(x^*) - g(2x^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.60)$$



**Abbildung 3.6.** Darstellung der Funktion  $\tilde{g}(x)$  für  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$  mit den verschiedenen Bereichen der Fallunterscheidungen im Beweis von [Lemma 3.15](#).

und mit (2.2)

$$\tilde{g}(1-x^*) = g\left(\frac{1-x^*}{2}\right) - g(1-x^*) = 1 - (1-g(x^*)) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.61)$$

Es gilt (vgl. [Abbildung 3.6](#))

$$\frac{1}{3} < x^* < \frac{1}{2} < 1-x^* < \frac{2}{3} < 2x^* < 1 < 2(1-x^*) < \frac{4}{3}$$

und wir unterscheiden drei verschiedene Fälle.

1. Es sei  $2^{-j^*} k_1 \in [2(1-x^*), \frac{4}{3}]$ :  
Dann ist  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [(1-x^*), \frac{2}{3}]$  (helle Bereiche in [Abbildung 3.6](#) und [Abbildung 3.7](#)).  
Da die Funktion  $\tilde{g}(x)^2$  in diesem Intervall monoton wachsend ist, folgt mit (3.61) die Abschätzung  $\frac{1}{2} \leq \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 \leq 1$ , woraus sich mit (3.59) eingesetzt in (3.58)

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k}) \right|^2 \geq \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^*+1, \ell)) \geq \frac{1}{2},$$

also (3.56) schließen lässt.

2. Es sei  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, 2x^*]$ :  
Wir zeigen

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell))^2 \geq 1 \quad (3.62)$$

und können anschließend erneut mit (3.58) auf (3.56) schließen.

Es sei  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$ , sodass  $s(j^*, \ell^*) = 2^{-j^* + \lfloor j^*/2 \rfloor} k_2 - \ell^* 2^{-j^*} k_1 \in (0, \frac{2}{3})$ . Wir wählen  $d \in \mathbb{R}$ , sodass

$$s(j^*, \ell^*) = \begin{cases} x^* - d, & \text{falls } s(j^*, \ell^*) \in (0, x^*), \\ x^* + d, & \text{falls } s(j^*, \ell^*) \in (x^*, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

Dann gilt aufgrund der wachsenden Monotonie der Funktion  $g(x)^2$  im Intervall  $(-\frac{2}{3}, 0)$  und mit der Voraussetzung in (3.41) der Reihe nach

$$\begin{aligned} g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^* + 1))^2 &= g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^*) - 2^{-j^*} k_1)^2 \\ &\geq g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^*) - 2x^*)^2 \\ &= g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(2x^* - s(j^*, \ell^*))^2 \\ &= g(x^* + d)^2 + g(x^* - d)^2 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Falls es  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$  gibt, sodass  $s(j^*, \ell^*) = 2^{-j^* + \lfloor j^*/2 \rfloor} k_2 - \ell^* 2^{-j^*} k_1 \in (-\frac{2}{3}, 0)$ , so lässt sich mit den identischen Ideen wie zuvor

$$g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^* - 1))^2 \geq 1$$

zeigen, was insgesamt auf

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell))^2 = g(s(j^*, \ell^* - 1))^2 + g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^* + 1))^2 \geq 1$$

führt. Die Voraussetzung dieses Falls ist  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, 2x^*]$  (dunkle Bereiche in [Abbildung 3.6](#) und [Abbildung 3.7](#)), weshalb mit (3.60) und der fallenden Monotonie der Funktion  $\tilde{g}(x)^2$  für  $x \in [\frac{2}{3}, 2x^*]$  die Abschätzung  $\frac{1}{2} \leq \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 \leq 1$  folgt. Mit (3.57) erhalten wir

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j, \ell}^{(h)}(\mathbf{k}) \right|^2 \geq \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)^2 \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell))^2 \geq \frac{1}{2}.$$

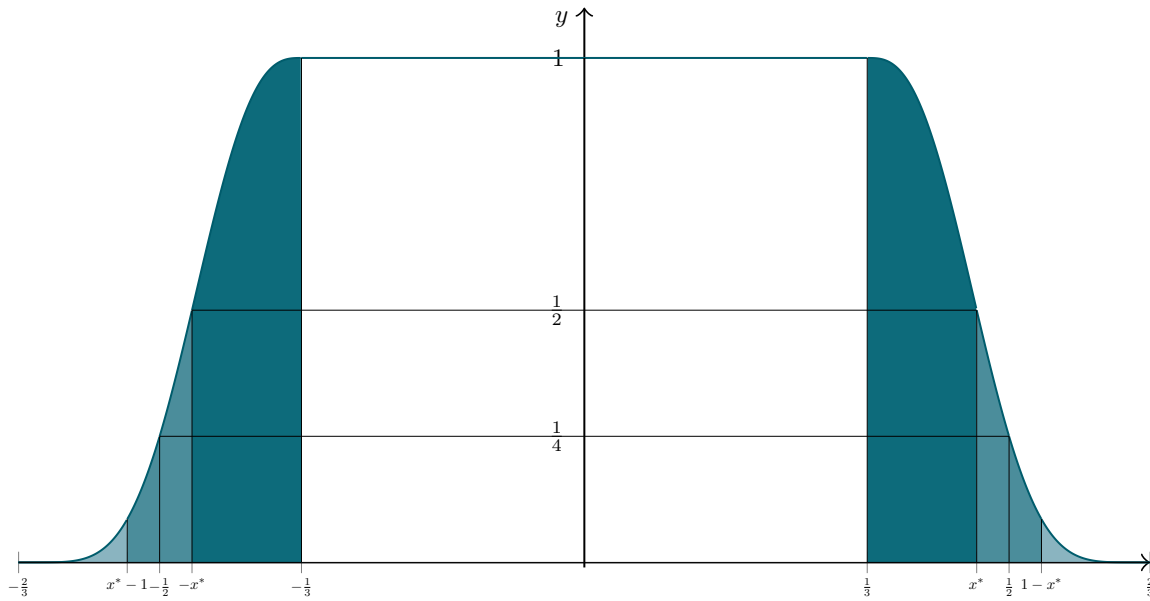
3. Es sei  $2^{-j^*} k_1 \in [2x^*, 2(1 - x^*)]$ :

Dann ist  $2^{-(j^*+1)} k_1 \in [x^*, 1 - x^*]$  (mittelhelle Bereiche in [Abbildung 3.6](#)) und deshalb folgt

$$2g(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 \leq 1.$$

Wir zeigen zunächst

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}} g(s(j^*, \ell))^2 \geq 2g(2^{-(j^*+1)} k_1)^2. \quad (3.63)$$



**Abbildung 3.7.** Darstellung der Funktion  $g(x)$  für  $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  mit den verschiedenen Bereichen der Fallunterscheidungen im Beweis von [Lemma 3.15](#).

Falls ein  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$  und  $s(j^*, \ell^*) \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  existiert, so gilt (3.63), denn

$$g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^* + 1))^2 \geq 1 \geq 2g(2^{-(j^*+1)}k_1)^2.$$

Im Folgenden sei deshalb  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$ , sodass  $s(j^*, \ell^*) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Es sei in diesem Fall

$$s(j^*, \ell^*) = 2^{-(j^*+1)}k_1 + \check{d}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} -s(j^*, \ell^* + 1) &= 2^{-(j^*+1)}k_1 - s(j^*, \ell^*) + 2^{-j^*}k_1 - 2^{-(j^*+1)}k_1 \\ &= 2^{-(j^*+1)}k_1 - s(j^*, \ell^*) + 2^{-(j^*+1)}k_1 \\ &= 2^{-(j^*+1)}k_1 - \check{d} \end{aligned} \tag{3.64}$$

und folglich wegen (3.41)

$$\begin{aligned} g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(s(j^*, \ell^* + 1))^2 &= g(s(j^*, \ell^*))^2 + g(-s(j^*, \ell^* + 1))^2 \\ &= g(2^{-(j^*+1)}k_1 + \check{d})^2 + g(2^{-(j^*+1)}k_1 - \check{d})^2 \\ &\geq 2g(2^{-(j^*+1)}k_1)^2, \end{aligned} \tag{3.65}$$

womit (3.63) erfüllt ist.

Als Nächstes zeigen wir

$$\sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell))^2 \geq 2g(2^{-(j^*+1)}k_1)^2 + 1 \tag{3.66}$$

und unterscheiden dabei, ob  $j^*$  gerade oder ungerade ist. Da sich beide Fälle stark ähneln, wird hier nur der Fall ungerader  $j^*$  ausgeführt.

Es sei  $j^*$  ungerade. Dann gilt

$$-(j^* + 1) + \left\lfloor \frac{j^* + 1}{2} \right\rfloor = -(j^* + 1) + \frac{j^* + 1}{2} = -\frac{j^* + 1}{2} = -j^* + \frac{j^* - 1}{2} = -j^* + \left\lfloor \frac{j^*}{2} \right\rfloor$$

und es ergeben sich zwei Unterfälle für  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

i) Es sei  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell^*| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$  ungerade:

Dann ist

$$s(j^* + 1, \ell - 1) = 2^{-\frac{j^*+1}{2}} k_2 - (\ell - 1)2^{-(j^*+1)} k_1 = s\left(j^*, \frac{\ell - 1}{2}\right)$$

und

$$s(j^* + 1, \ell + 1) = 2^{-\frac{j^*+1}{2}} k_2 - (\ell - 1 + 2)2^{-(j^*+1)} k_1 = s\left(j^*, \frac{\ell - 1}{2} + 1\right) = s\left(j^*, \frac{\ell + 1}{2}\right).$$

Falls  $s(j^* + 1, \ell^*) \in (-\frac{1}{3}, 0)$ , gilt  $s(j^*, \frac{\ell^*-1}{2}) \in (0, \frac{2}{3})$ . Mit derselben Idee wie in (3.65) erhalten wir mit  $s(j^*, \frac{\ell^*-1}{2}) = 2^{-(j^*+1)} k_1 + \tilde{d}$  und erneut mit Eigenschaft (3.41) die Abschätzung (3.66), denn

$$\begin{aligned} & \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^* + 1, \ell))^2 \\ &= g(s(j^* + 1, \ell^* - 1))^2 + g(s(j^* + 1, \ell^*))^2 + g(s(j^* + 1, \ell^* + 1))^2 \\ &= g\left(s\left(j^*, \frac{\ell^* - 1}{2}\right)\right)^2 + g\left(s\left(j^*, \frac{\ell^* + 1}{2}\right)\right)^2 + g(s(j^* + 1, \ell^*))^2 \\ &= g(2^{-(j^*+1)} k_1 + \tilde{d})^2 + g(2^{-(j^*+1)} k_1 - \tilde{d})^2 + g(s(j^* + 1, \ell^*))^2 \\ &\geq 2g(2^{-(j^*+1)} k_1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Im Fall  $s(j^* + 1, \ell^*) \in (0, \frac{1}{3})$  lässt sich die Ungleichung aufgrund der Symmetrie der zulässigen Funktion  $g$  analog zeigen.

ii) Falls  $\ell^* \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| \leq 2^{\lfloor j^*/2 \rfloor}$  gerade ist, so lässt sich mit  $s(j^* + 1, \ell^*) \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  und ähnlich wie zuvor mit

$$s(j^* + 1, \ell^* - 1) = 2^{-(j^*+1)} k_1 + \tilde{d}$$

sowie

$$\begin{aligned} -s(j^* + 1, \ell^* + 1) &= -2^{-\frac{j^*+1}{2}} k_2 + \ell^* 2^{-(j^*+1)} k_1 + 2^{-(j^*+1)} k_1 \\ &= 2^{-(j^*+1)} k_1 - s(j^* + 1, \ell^* - 1) + 2^{-(j^*+1)} k_1 \\ &= 2^{-(j^*+1)} k_1 - \tilde{d} \end{aligned}$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor (j^*+1)/2 \rfloor}} g(s(j^*+1, \ell))^2 &= g(s(j^*+1, \ell^*-1))^2 + g(s(j^*+1, \ell^*))^2 + g(s(j^*+1, \ell^*+1))^2 \\
 &= g(2^{-(j^*+1)}k_1 + \tilde{d})^2 + g(2^{-(j^*+1)}k_1 - \tilde{d})^2 + g(s(j^*+1, \ell^*))^2 \\
 &\geq 2g(2^{-(j^*+1)}k_1)^2 + 1
 \end{aligned}$$

zeigen.

Im Folgenden sei  $x = 2^{-(j^*+1)}k_1 \in [x^*, 1-x^*] \subset [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ . Mit (3.63) und (3.66) folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k}) \right|^2 &\geq 2\tilde{g}(2x)^2 g(x)^2 + \tilde{g}(x)^2 (2g(x)^2 + 1) \\
 &= 2[\tilde{g}(2x)^2 + \tilde{g}(x)^2] g(x)^2 + \tilde{g}(x)^2 \\
 &= 2[g(x)^2 + (1-g(x))^2] g(x)^2 + (1-g(x))^2 \\
 &= 4g(x)^4 - 4g(x)^3 + 3g(x)^2 - 2g(x) + 1.
 \end{aligned}$$

Fassen wir die letzte Zeile als Funktion  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(z) := 4z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1$  auf, so gilt  $h(z) \geq h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , womit auch in diesem Fall (3.56) bewiesen ist.

Im zweiten Teil des Beweises wird die Abschätzung

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k} + (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^T \mathbf{z}) \right| \leq \frac{1}{4} \quad (3.67)$$

gezeigt. Aufgrund des kompakten Trägers der Fensterfunktionen  $\Psi_{j,\ell}^{(h)}$  sind die Summen in (3.67) endlich und können vertauscht werden. Dazu schreiben wir zunächst

$$\begin{aligned}
 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k} + (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^T \mathbf{z}) &= \Psi^{(h)} \left( (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^{-T} (\mathbf{k} + (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^T \mathbf{z}) \right) \\
 &= \Psi^{(h)} \left( (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^{-T} \mathbf{k} + \mathbf{z} \right) \\
 &= \tilde{g}(2^{-j}k_1 + z_1) g(s(j, \ell) + z_2)
 \end{aligned}$$

und erhalten somit für (3.67) die Darstellung

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}^{(h)}(\mathbf{k} + (\mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)})^T \mathbf{z}) \right| \\
 &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} |\tilde{g}(2^{-j}k_1) \tilde{g}(2^{-j}k_1 + z_1) g(s(j, \ell)) g(s(j, \ell) + z_2)| \\
 &= \sum_{j=j^*}^{j^*+1} \tilde{g}(2^{-j}k_1) \sum_{z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{g}(2^{-j}k_1 + z_1) \sum_{z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell)) g(s(j, \ell) + z_2).
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Nach der Wahl von  $j^* \in \mathbb{N}_0$  gilt  $2^{-j^*} k_1 \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$  und da

$$\text{supp } \tilde{g} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

ist  $2^{-j^*} k_1 + z_1 \in \text{supp } \tilde{g}$  genau dann erfüllt, wenn  $z_1 = -2$ . Auf ähnliche Weise gilt  $2^{-(j^*+1)} k_1 + z_1 \in \text{supp } \tilde{g}$ , falls  $z_1 = -1$ . Darüber hinaus gilt mit (3.1) die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{g}(2^{-j^*} k_1 - 2) &= g(2^{-(j^*+1)} k_1 - 1) - g(2^{-j^*} k_1 - 2) \\ &= 1 - g(2^{-(j^*+1)} k_1) \\ &= 1 - \left(1 - \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1)\right) \\ &= \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \end{aligned} \tag{3.69}$$

und auf analoge Weise

$$\begin{aligned} \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1 - 1) &= g\left(2^{-(j^*+2)} k_1 - \frac{1}{2}\right) - g(2^{-(j^*+1)} k_1 - 1) \\ &= 1 - g(2^{-(j^*+1)} k_1 - 1) \\ &= g(2^{-(j^*+1)} k_1) \\ &= \tilde{g}(2^{-j^*} k_1). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Aus (3.69) und (3.70) folgt wegen (3.47)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=j^*}^{j^*+1} \tilde{g}(2^{-j} k_1) \sum_{z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{g}(2^{-j} k_1 + z_1) \\ &= \tilde{g}(2^{-j^*} k_1) \tilde{g}(2^{-j^*} k_1 - 2) + \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1 - 1) \\ &= 2 \tilde{g}(2^{-j^*} k_1) \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) \\ &= 2 \tilde{g}(2^{-j^*} k_1) \left(1 - \tilde{g}(2^{-j^*} k_1)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.71}$$

für den linken Teil von (3.68). Für  $s(j, \ell) \in \text{supp } g = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  können drei Fälle auftreten:

Falls  $s(j, \ell) \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , so ist  $g(s(j, \ell) + z_2) = 0$  für alle  $z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Andererseits gilt für  $s(j, \ell) \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ , dass  $g(s(j, \ell) + z_2) > 0$  genau dann erfüllt ist, wenn  $z_2 = 1$  und für  $s(j, \ell) \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , dass  $g(s(j, \ell) + z_2) > 0$ , falls  $z_2 = -1$ . Es sei  $\hat{z} \in \mathbb{Z}$  mit

$$\hat{z} = \begin{cases} 1, & \text{falls } s(j, \ell) \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Zerlegung der Eins aus (2.2) gilt für  $s(j, \ell) \in \text{supp } g$

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} g(s(j, \ell) + z) = g(s(j, \ell)) + g(s(j, \ell) + \hat{z}) = 1$$

und deshalb

$$g(s(j, \ell)) \sum_{z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} g(s(j, \ell) + z_2) = g(s(j, \ell)) g(s(j, \ell) + \hat{z}) = g(s(j, \ell)) - g(s(j, \ell))^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Da  $\frac{2}{3} \leq 2^{-(j^*+1)} k_1 < 2^{-j^*} k_1$ , besteht die Summe über  $|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}$  für  $j = j^*, j^* + 1$  aus maximal zwei Summanden, weshalb

$$\sum_{z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell)) g(s(j, \ell) + z_2) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.72)$$

Mit (3.71) und (3.72) eingesetzt in (3.68) folgt demnach (3.67).

Das Minimum über  $\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(h)} \cap \mathbb{Z}^2$  wird beispielsweise für  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T = (8, 2)^T$  angenommen. In diesem Fall ist  $j^* = 3$ , da  $2^{-j^*} k_1 = 1$  und somit  $\tilde{g}(2^{-j^*} k_1) = \tilde{g}(2^{-(j^*+1)} k_1) = g(2^{-(j^*+1)} k_1) = \frac{1}{2}$  sowie  $s(j^*, \ell) = s(3, \ell) = \frac{1}{2} - \ell$  und  $s(j^* + 1, \ell) = s(4, \ell) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ell$ . Damit vereinfacht sich (3.59) zu

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j, \ell}^{(h)}((8, 2)^T) \right|^2 \\ &= \sum_{j=3}^4 \tilde{g}(2^{-j} k_1)^2 \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell))^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( g\left(\frac{1}{2}\right)^2 + g\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left( g\left(\frac{1}{2}\right)^2 + g(0) + g\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analog erhält man für (3.60)

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j, \ell}^{(h)}((8, 2)^T) \Psi_{j, \ell}^{(h)}((8, 2)^T + (\mathbf{N}_{j, \ell}^{(h)})^T \mathbf{z}) \right| \\ &= \sum_{j=3}^4 \tilde{g}(2^{-j} k_1) \sum_{z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{g}(2^{-j} k_1 + z_1) \sum_{z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} g(s(j, \ell)) g(s(j, \ell) + z_2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 g\left(\frac{1}{2}\right) g\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 2 g\left(\frac{1}{2}\right) g\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(i)}((8,2)^T) \right|^2 - \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(i)}((8,2)^T) \Psi_{j,\ell}^{(i)}((8,2)^T) + \left( \mathbf{N}_{j,\ell}^{(h)} \right)^T \mathbf{z} \right| \\ & = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Wir betrachten im Folgenden Teilräume des  $L_2(\mathbb{T}^2)$ , die Funktionen genau dann enthalten, wenn die Träger der Folge ihrer Fourier-Koeffizienten im horizontalen beziehungsweise vertikalen Kegel liegen. Dazu definieren wir die Funktionenräume

$$\widehat{L}_2(\mathcal{C}^{(i)}) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}^2) : \text{supp}((c_{\mathbf{k}}(f))_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}) \subset \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2 \right\}$$

und wollen die vorherigen beiden Lemmata nutzen, um die Frame-Eigenschaft der Systeme  $\mathcal{S}^{(i)}$  aus (3.43) in den Teilräumen  $\widehat{L}_2(\mathcal{C}^{(i)})$  zu beweisen. Wir orientieren uns dabei erneut an den Ideen aus dem Beweis von [12, Theorem 2.1].

### Theorem 3.16.

Für  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  bildet das Funktionensystem  $\mathcal{S}^{(i)}$  aus (3.43) einen Frame des  $\widehat{L}_2(\mathcal{C}^{(i)})$  mit Frame-Konstanten  $A = \frac{1}{4}$  und  $B = \frac{5}{2}$ .

*Beweis.* Wir haben zu zeigen, dass für jedes  $f \in \widehat{L}_2(\mathcal{C}^{(i)})$  die Abschätzungen

$$\frac{1}{4} \|f\|_2^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \rangle_2 \right|^2 \leq \frac{5}{2} \|f\|_2^2$$

erfüllt sind. Für den Rest des Beweises fixieren wir  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und verzichten aus Gründen der Übersicht auf die Angabe des Parameters in den Formeln. Mit der für  $\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2$  eindeutigen Darstellung  $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}$  mit  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)$  und  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2$  aus (1.14) sowie der Parseval-Gleichung (1.17) folgt

$$\begin{aligned} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle_2 \right|^2 &= (\det \mathbf{N}_{j,\ell})^{-1} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{k})} e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} \right|^2 \\ &= (\det \mathbf{N}_{j,\ell})^{-1} \left| \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f) \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})} e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right|^2. \end{aligned}$$

Der Term in der Exponentialfunktion entsteht, da  $(\mathbf{N}_{j,\ell} \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^2$  für  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})$ , weshalb  $e^{2\pi i \mathbf{z}^T \mathbf{N}_{j,\ell} \mathbf{y}} = 1$  gilt. Der Term im Betrag kann als inverse diskrete Fourier-Transformation aus Definition 1.6 mit den diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\hat{a}_{\mathbf{h}} := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f) \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T), \quad (3.73)$$

aufgefasst werden. Wir verwenden die Parseval-Gleichung (1.19) für die diskrete Fourier-Transformation und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle_2 \right|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} (\det \mathbf{N}_{j,\ell})^{-1} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)} \hat{a}_{\mathbf{h}} e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)} |\hat{a}_{\mathbf{h}}|^2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Die diskreten Fourier-Koeffizienten  $\hat{a}_{\mathbf{h}}$  aus (3.73) sind  $\mathbf{N}_{j,\ell}^T$ -periodisch, da sie für alle  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)$  und  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  die Gleichung  $\hat{a}_{\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{s}} = \hat{a}_{\mathbf{h}}$  erfüllen [4, Lemma 1.17]. Wegen des kompakten Trägers der Fensterfunktionen  $\Psi_{j,\ell}$  sind die auftretenden Summen in (3.74) zudem stets endlich und können vertauscht werden. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)} |\hat{a}_{\mathbf{h}}|^2 &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}_{j,\ell}^T)} c_{\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{s}}(f) \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{s})} \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} \overline{c_{\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T (\mathbf{s} + \mathbf{z})}(f)} \widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{h} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T (\mathbf{s} + \mathbf{z})) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} \overline{c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f)} \widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Anschließend setzen wir (3.75) in (3.74) ein und vertauschen die Summe über  $j$  mit der Summe über  $\mathbf{z}$ , um zu der Darstellung

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle \right|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})|^2 + R \quad (3.76)$$

mit

$$R := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f)} \overline{\widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{k})} \widetilde{\Psi}_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})$$

zu gelangen. Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Summe über  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  liefert zunächst

$$\begin{aligned} |R| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} \left| c_{\mathbf{k}}(f) c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}) \right| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})| |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})| \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})| |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})| \right)^{1/2} \end{aligned}$$

und die erneute Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Summe über  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  ergibt

$$\begin{aligned}
 |R| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})| \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left( \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})| \right)^{1/2} \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})|. \tag{3.77}
 \end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzung (3.77) in (3.76) ein, so folgt mit (3.8)

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle_2 \right|^2 &\leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})| \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})| \\
 &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})|.
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.14 und der Parseval-Gleichung (1.17) erhalten wir schließlich

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle_2 \right|^2 \leq \frac{5}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 = \frac{5}{2} \|f\|_2^2. \tag{3.78}$$

Für den Beweis der Größe der unteren Frame-Konstanten definieren wir zunächst

$$A(\mathbf{k}) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})|^2 - \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}(\mathbf{k} + \mathbf{N}_{j,\ell}^T \mathbf{z})|$$

und wegen Lemma 3.15 gilt  $A := \inf_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} A(\mathbf{k}) = \frac{1}{4}$ . Um den Beweis zu beenden, betrachten wir (3.76) und erhalten mit (3.77) schließlich

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell})} \left| \langle f, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}} \rangle_2 \right|^2 &\geq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 |\Psi_{j,\ell}(\mathbf{k})|^2 - |R| \\
 &\geq \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 A(\mathbf{k}) \\
 &\geq \frac{1}{4} \|f\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

□

Um einen Frame des gesamten Hilbertraums  $L_2(\mathbb{T}^2)$  zu konstruieren, folgen wir der Idee aus dem Fall der klassischen diskreten Shearlets in [28] und definieren die Projektionen  $P_{\mathcal{C}^{(i)}}$  mit der Eigenschaft

$$c_{\mathbf{k}}(P_{\mathcal{C}^{(i)}}[f]) = c_{\mathbf{k}}(f) \chi_{\mathcal{C}^{(i)}}(\mathbf{k}).$$

Mit der konstanten Funktion  $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1$  und den Shearlet-Systemen  $\mathcal{S}^{(i)}$  aus (3.43) definieren wir das Funktionen-System

$$\mathcal{S} := \varphi_0 \cup P_{\mathcal{C}^{(h)}}[\mathcal{S}^{(h)}] \cup P_{\mathcal{C}^{(v)}}[\mathcal{S}^{(v)}]$$

und können zum Abschluss dieses Kapitels das folgende Theorem zeigen.

**Theorem 3.17.**

Das Funktionen-System  $\mathcal{S}$  bildet einen Frame des  $L_2(\mathbb{T}^2)$  mit Frame-Konstanten  $A = \frac{1}{4}$  und  $B = \frac{5}{2}$ .

*Beweis.* Wir haben zu zeigen, dass für jedes  $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$  die Ungleichungen

$$\frac{1}{4} \|f\|_2^2 \leq |\langle f, \varphi_0 \rangle_2|^2 + \sum_{i \in \{h, v\}} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j, \ell}^{(i)})} \left| \langle f, P_{\mathcal{C}^{(i)}}[\psi_{j, \ell, \mathbf{y}}^{(i)}] \rangle_2 \right|^2 \leq \frac{5}{2} \|f\|_2^2$$

erfüllt sind. Für die Fourier-Koeffizienten der konstanten Funktion  $\varphi_0$  gilt

$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

weshalb  $\left| \langle f, \varphi_0 \rangle_2 \right|^2 = |c_{\mathbf{0}}(f)|^2$  folgt. Für  $i \in \{h, v\}$  lassen sich mit identischen Argumenten, die zu (3.78) und (3.79) in Theorem 3.16 geführt haben, die Ungleichungen

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j, \ell}^{(i)})} \left| \langle f, P_{\mathcal{C}^{(i)}}[\psi_{j, \ell, \mathbf{y}}^{(i)}] \rangle_2 \right|^2 \leq \frac{5}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2$$

und

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\ell| \leq 2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j, \ell}^{(i)})} \left| \langle f, P_{\mathcal{C}^{(i)}}[\psi_{j, \ell, \mathbf{y}}^{(i)}] \rangle_2 \right|^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathbb{Z}^2} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2$$

zeigen. Die Behauptung des Theorems ergibt aus den vorherigen beiden Abschätzungen, da

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbf{0} \cup \left( \mathcal{C}^{(h)} \cup \mathcal{C}^{(v)} \right) \cap \mathbb{Z}^2.$$

□



# 4

## Detektion von Singularitäten

Zu Beginn des letzten Kapitels dieser Arbeit geben wir zunächst einen Überblick über bekannte Resultate und die entsprechende Literatur bezüglich der Detektion von Singularitäten mit klassischen Shearlets. Im Vergleich zu mehrdimensionalen Wavelets sind klassische Shearlets dazu in der Lage, Singularitäten entlang von Kantenkurven zu detektieren. Die ersten Resultate in diese Richtung wurden in [39] und aufbauend dazu in [25] durch die exakte Charakterisierung der Wellenfront einer Funktion mit der kontinuierlichen Shearlet-Transformation gezeigt.

Wir wollen zunächst die Resultate aus [30, 34] über die Charakterisierung von gerichteten Singularitäten stückweise konstanter Funktionen aufgreifen. Es sei eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  gegeben. Falls einerseits  $\mathbf{p} \notin \partial T$  oder falls die zu  $s = s_0$  gehörige Richtung nicht mit der Richtung der Normalen von  $\partial T$  im Punkt  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  übereinstimmt, dann klingen die Shearlet-Koeffizienten hinreichend schnell ab. Falls andererseits  $\mathbf{p} \in \partial T$  ein regulärer Punkt ist und die zu  $s = s_0$  gehörige Richtung mit der Richtung der Normalen von  $\partial T$  im Punkt  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  übereinstimmt, dann sind die Shearlet-Koeffizienten durch eine positive Konstante nach unten beschränkt. In [34, Theorem 1.2] wurden Abschätzungen für den Fall gezeigt, dass  $\mathbf{p}$  ein Eckpunkt auf dem Rand  $\partial T$  ist. Analoge Resultate wurden zudem in [41] für Shearlets mit kompaktem Träger im Ortsbereich bewiesen. In [29] verallgemeinerten die Autoren die Betrachtungen auf stückweise glatte Funktionen, deren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung auf dem Rand der Menge  $T$  verschwinden.

Wie in der Einleitung von [31] bemerkt, können ähnliche Resultate für den diskreten Fall nicht einfach aus den Abschätzungen für kontinuierliche Shearlets geschlossen werden. Basierend auf dem Ergebnis für Curvelets in [7], wurde in [33] gezeigt, dass diskrete Kegel-Shearlets die essentiell-optimale spärliche Approximation von Cartoon-ähnlichen Funktionen ermöglichen. Aus diesem Resultat lässt sich für die diskreten Shearlet-Koeffizienten die obere Schranke  $C 2^{-3j/2}$  mit einer Konstanten  $C > 0$ , die unabhängig vom Skalierungsparameter  $j$  ist, folgern. In [31] wurde zudem für charakteristische Funktionen  $\chi_T$  die Existenz einer unteren Schranke nachgewiesen, falls das klassische diskrete Shearlet hinreichend dicht an der Randkurve der Menge  $T$  lokalisiert und gleichzeitig entlang der Normalenrichtung des Randes der Menge orientiert ist. Die oberen und unteren Schranken implizieren, dass klassische diskrete Kegel-Shearlets dazu genutzt werden können, Sprung-Unstetigkeiten entlang des Randes von charakteristischen Funktionen zu detektieren. In [57] haben wir dieses Resultat bereits auf den Fall trigonometrischer Shearlets übertragen und ähnliche Abschät-

zungen bewiesen. Darüber hinaus wurden die Resultate in [57] mit numerischen Beispielen visualisiert

Der abschließende Teil dieser Arbeit widmet sich der Frage, inwiefern die trigonometrischen Shearlets aus dem vorherigen Kapitel dazu in der Lage sind, Unstetigkeiten in Richtungsableitungen höherer Ordnung von Cartoon-ähnlichen Funktionen zu erkennen. Damit können die Resultate aus [31, 57] analog zu denen aus [29] für klassische kontinuierliche Kegel-Shearlets erweitert werden. Das Ziel ist es, die örtliche Lokalisierung, Richtung und Ordnung der Sprungstellen in den Richtungsableitungen anhand der Größe gewisser Shearlet-Koeffizienten erkennen zu können.

In [Abschnitt 4.1](#) formulieren wir die wichtigsten Resultate dieses Kapitels, welche in den anschließenden Abschnitten bewiesen werden sollen. In [Theorem 4.1](#) und [Theorem 4.2](#) werden unsere Abschätzungen aus [57] verallgemeinert und bilden somit diskrete Analoga zu den Resultaten aus [29, Theorem 3.1]. Die beiden Theoreme implizieren, dass die Shearlet-Koeffizienten genau dann verschwindend klein werden, wenn das jeweilige verschobene Shearlet nicht hinreichend dicht an der Kantenkurve lokalisiert ist oder nicht entlang der Kantenkurve orientiert ist. Die Zerlegung von Funktionen auf dyadischen Quadraten wurde bereits in [7, 33] im Zusammenhang von essentiell-optimaler spärlicher Approximation Cartoon-ähnlicher Funktionen verwendet. In [Abschnitt 4.2](#) werden viele dieser Ideen aufgegriffen und in verschiedenen Lemmata zusammengetragen und verallgemeinert. Diese Hilfsresultate werden für den Beweis von [Theorem 4.1](#) in [Abschnitt 4.3](#) benötigt. [Abschnitt 4.4](#) beinhaltet verschiedene Lokalisierungslemmata über die Größe gewisser Integrale in Abhängigkeit von der Lokalisierung und Orientierung der trigonometrischen Shearlets. Im finalen [Abschnitt 4.5](#) wird schließlich die untere Schranke aus [Theorem 4.2](#) bewiesen.

## 4.1 Hauptresultate

Für den Rest des Kapitels sei  $j \in \mathbb{N}$  gerade und wir fixieren die Parameter  $k = \frac{j}{2}$  und  $\alpha = \frac{1}{6}$ . Dabei verzichten wir wie im vorherigen Kapitel bei allen von  $k$  und  $\alpha$  abhängigen Objekten im Folgenden auf die Angabe dieser Parameter. So schreiben wir für die Matrizen aus (2.22) und (2.23)

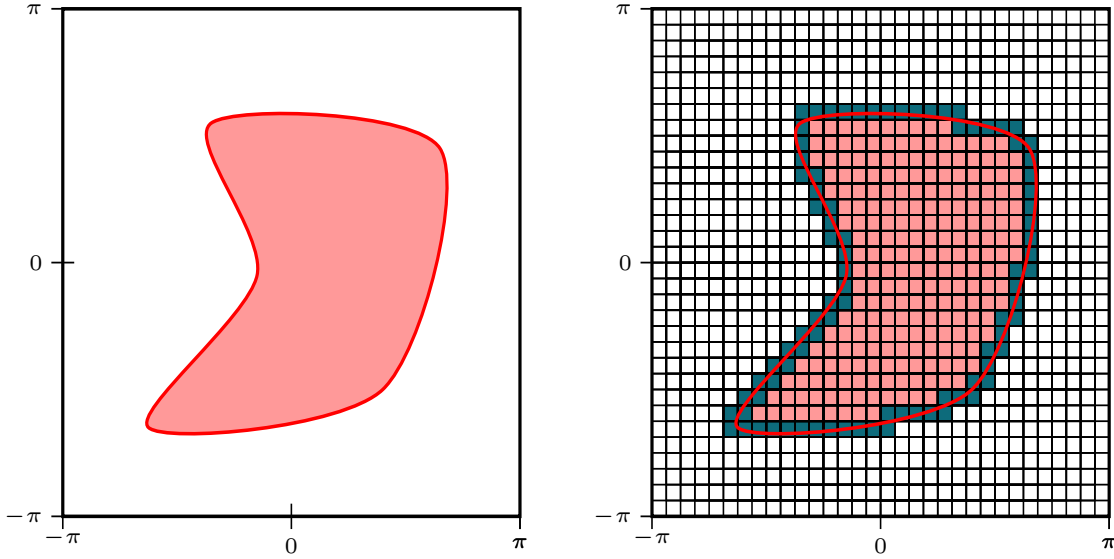
$$\mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} := \mathbf{N}_{j,\frac{j}{2},\ell}^{(\mathfrak{h})} = \begin{pmatrix} 2^j & \ell 2^{j/2} \\ 0 & 2^{j/2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \mathbf{N}_{j,\frac{j}{2},\ell}^{(\mathfrak{v})} = \begin{pmatrix} 2^{j/2} & 0 \\ \ell 2^{j/2} & 2^j \end{pmatrix},$$

und für die Funktionen aus (3.7) gilt

$$\Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{i})} := \Psi_{j,\frac{j}{2},\ell,\frac{1}{6}}^{(\mathfrak{i})} = \Psi_{\frac{1}{6}}^{(\mathfrak{i})} \left( \left( \mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathfrak{i})} \right)^{-\mathsf{T}} \circ \right), \quad \mathfrak{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\},$$

wobei  $\Psi_{\frac{1}{6}}^{(\mathfrak{i})}$  eine Fensterfunktion aus [Definition 3.2](#) ist. Für die auftretenden Winkel im Frequenzbereich definieren wir

$$\theta_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} := \arctan(\ell 2^{-j/2}), \quad \theta_{j,\ell}^{(\mathfrak{v})} := \operatorname{arccot}(\ell 2^{-j/2}). \quad (4.1)$$



**Abbildung 4.1.** Links: Eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau) \subset (-\pi, \pi)^2$  mit Rand  $\partial T$ . Rechts: Zerlegung von  $[-\pi, \pi)^2$  in dyadische Quadrate  $Q \in \mathcal{Q}_j$  für  $j = 10$ , wobei die Quadrate  $Q \in \mathcal{Q}_j^0$  weiß und die Quadrate  $Q \in \mathcal{Q}_j^1$  entlang des Randes  $\partial T$  dunkel eingefärbt sind.

Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir in diesem Kapitel auf die zusätzliche Verschiebung in den Musterpunkten  $\tilde{\mathbf{y}}$  aus (3.21) in Definition 3.4. Deshalb schreiben wir für die Translate der trigonometrischen Shearlets für gerades  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^{j/2}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  und  $i \in \{\mathbf{h}, \mathbf{v}\}$

$$\psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} := \psi_{j,\frac{j}{2},\ell,\tilde{\mathbf{y}},\frac{1}{6}}^{(i)} = 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T(\circ-2\pi\mathbf{y})}. \quad (4.2)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{y}} := \begin{cases} \mathbf{y} + (2^{-j-1}, 0)^T, & \text{falls } \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathbf{h})}), \\ \mathbf{y} + (0, 2^{-j-1})^T, & \text{falls } \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(\mathbf{v})}). \end{cases}$$

Es sei bemerkt, dass alle Resultate dieses Kapitels, insbesondere die Haupttheoreme, auch für Verschiebungen auf den Punkten  $\tilde{\mathbf{y}}$  formuliert und analog bewiesen werden können.

Die Analyse von Funktionen auf dyadischen Quadraten ist das zentrale Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 4.1. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  bezeichne  $\mathcal{Q}_j$  die Menge aller dyadischen Quadrate  $Q \subseteq [-\pi, \pi)^2$  von der Form

$$Q = \left[ 2\pi k_1 2^{-j/2} - \pi, 2\pi(k_1 + 1) 2^{-j/2} - \pi \right) \times \left[ 2\pi k_2 2^{-j/2} - \pi, 2\pi(k_2 + 1) 2^{-j/2} - \pi \right) \quad (4.3)$$

mit  $k_1, k_2 = 0, \dots, 2^{j/2} - 1$ . Für Funktionen  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit  $\text{supp } \phi \subset (-\pi, \pi)^2$  und  $Q \in \mathcal{Q}_j$  definieren wir

$$\phi_Q(\mathbf{x}) := \phi \left( 2^{j/2}(x_1 + \pi) - \pi(2k_1 - 1), 2^{j/2}(x_2 + \pi) - \pi(2k_2 - 1) \right) \quad (4.4)$$

und fordern, dass die Funktion  $\phi$  für alle  $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^2$  eine glatte Zerlegung der Eins

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \phi_Q(\mathbf{x}) = 1 \quad (4.5)$$

ermöglicht.

Es sei eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  gegeben. Die Menge  $\mathcal{Q}_j^1 \subset \mathcal{Q}_j$  enthalte alle dyadischen Quadrate, in denen der Rand  $\partial T$  den Träger von  $\phi_Q$  schneidet. Für die nicht geschnittenen Quadrate definieren wir die Menge  $\mathcal{Q}_j^0 := \mathcal{Q}_j \setminus \mathcal{Q}_j^1$ . Mit der glatten Zerlegung (4.5) durch die Funktionen  $\phi_Q$  aus (4.4) lässt sich jede Funktion  $f : [-\pi, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} f_Q = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} f_Q + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} f_Q \quad (4.6)$$

mit  $f_Q := f \phi_Q$  schreiben. Ein Beispiel für die Zerlegung einer Funktion auf dyadischen Quadraten ist in [Abbildung 4.1](#) dargestellt.

Der Rand  $\partial T$  sei beschrieben durch eine Kurve  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \partial T$  mit der Parametrisierung

$$\gamma(x) = \mathbf{x}_0 + \rho(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

aus (1.13). Für alle  $\mathbf{x} \in \partial T$  sei der Normaleneinheitsvektor von  $\partial T$  im Punkt  $\mathbf{x}$  gegeben durch  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (\cos(\vartheta_{\mathbf{x}}), \sin(\vartheta_{\mathbf{x}}))^T$  mit  $\vartheta_{\mathbf{x}} \in [0, 2\pi)$ .

Für die zwei Hauptresultate dieses Kapitels benötigen wir Cartoon-ähnliche Funktionen aus [Definition 1.3](#), gegeben durch

$$\mathbf{f} = f_0 + f_1 \chi_T \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$$

mit  $u > 4$  und ihre  $2\pi$ -Periodisierung  $\mathbf{f}^{2\pi}$  aus [Definition 1.11](#). Ausgehend von einer Fensterfunktion  $\Psi^{(i)} \in \mathcal{W}^{2q}$  mit  $2q \geq u$  und  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  aus [Definition 3.2](#) sei ein trigonometrisches Shearlet  $\psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)}$  aus (4.2) gegeben. Damit können wir die Hauptresultate dieses Kapitels für die Funktionen  $\mathbf{f}^{2\pi}$  und  $\psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)}$  formulieren.

### Theorem 4.1.

Es seien ein hinreichend großes und gerades  $j \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^{j/2}$  sowie  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  gegeben. Für jedes  $Q \in \mathcal{Q}_j^1$  sei  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}_0(Q) \in \partial T \cap Q$  beliebig gewählt. Ferner sei  $n := n(Q) \in \mathbb{N}_0$  mit  $n < u$ , sodass

$$\begin{aligned} \partial_{\Theta^{(\vartheta)}}^m [f_1](\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{und} \quad \partial_{\Theta^{(\vartheta)}}^n [f_1](\mathbf{x}) \neq 0, \quad \text{falls } 0 \leq m < n, \\ f_1(\mathbf{x}) &\neq 0, \quad \text{falls } n = 0, \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{x} \in \partial T \cap Q$  und alle  $\vartheta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(i)}, \theta_{j,\ell+2}^{(i)})$  erfüllt ist. Dann gibt es eine Konstante  $C_1 > 0$ , sodass

$$\left| \left\langle \mathbf{f}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \leq C_1 2^{-3j/4} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \frac{\left(1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta_{\mathbf{x}_0}) \right| \right)^{-5/2}}{2^{jn} \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^q},$$

## 4.2 Zerlegung von Funktionen auf dyadischen Quadraten

---

wobei  $C_1 = C_1(\mathfrak{f}, \Psi^{(i)}, T)$  nicht von  $j, \ell$  und  $\mathbf{y}$  abhängt.

Für  $\varepsilon > 0$ , eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  benötigen wir im Folgenden die Umgebung

$$U_\varepsilon(\mathbf{y}) := U_{\varepsilon,T}(\mathbf{y}) := \partial T \cap B_\varepsilon(2\pi\mathbf{y}). \quad (4.7)$$

### Theorem 4.2.

Es seien  $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ , ein hinreichend großes und gerades  $j \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $|\ell| < 2^{j/2}$  sowie  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  gegeben. Zudem seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

i) Für  $\varepsilon = \varepsilon_0 2^{-j/2}$  existiere  $\mathbf{x}_0 \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$  mit  $\vartheta_{\mathbf{x}_0} \in \left( \theta_{j,\ell-2}^{(i)}, \theta_{j,\ell+2}^{(i)} \right)$ .

ii) Für  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $4(n+1) < u$  gelte

$$\begin{aligned} \partial_{\Theta(\vartheta)}^m [f_1](\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_{\Theta(\vartheta)}^n [f_1](\mathbf{x}) \neq 0, \quad \text{falls } 0 \leq m < n, \\ f_1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \text{falls } n = 0, \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$  und alle  $\vartheta \in \left( \theta_{j,\ell-2}^{(i)}, \theta_{j,\ell+2}^{(i)} \right)$ .

Dann gibt es eine Konstante  $C_2 > 0$ , sodass

$$\left| \left\langle \mathfrak{f}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \geq C_2 2^{-j(3/4+n)},$$

wobei  $C_2 = C_2(\mathfrak{f}, \Psi^{(i)}, T, \varepsilon_0)$  nicht von  $j, \ell$  und  $\mathbf{y}$  abhängt.

### Bemerkung 4.3.

Die beiden Hauptresultate aus [57, Abschnitt 3] finden sich als Spezialfälle in den obigen beiden Theoremen wieder. In Theorem 4.1 ist dies der Fall für  $n = 0$  und in Theorem 4.2, falls  $\mathfrak{f} = \chi_T$  aus Definition 1.3 als charakteristische Funktion mit  $f_0 = 0$  und  $f_1 = 1$  gewählt wird. Die oberen und unteren Schranken in den Theoremen wurden zudem in [57, Abschnitt 4] mit numerischen Beispielen visualisiert.

## 4.2 Zerlegung von Funktionen auf dyadischen Quadraten

Die Hilfsresultate in diesem Abschnitt bilden die Grundlage für den Beweis von Theorem 4.1. Die Abhängigkeit der auftretenden Konstanten im vorherigen Abschnitt beschreiben wir durch die zu den jeweiligen Funktionen gehörigen Parameter, sodass beispielsweise für die Konstante  $C(\mathfrak{f}, \Psi^{(i)})$  im Folgenden  $C(u, q)$  geschrieben wird. Für den Rest des Kapitels sei die Funktion  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit  $\text{supp } \phi \subset (-\pi, \pi)^2$  fest gewählt, sodass die Abhängigkeit aller auftretenden Konstanten von  $\phi$  nicht weiter erwähnt wird. Für die Resultate dieses Abschnitts benötigen wir zudem die Funktionen

$$\phi_j(\mathbf{x}) := \phi\left(2^{j/2}\mathbf{x}\right). \quad (4.8)$$

Die Beweisideen für das nachstehende Lemma finden sich in [7, 33].

**Lemma 4.4.**

Es sei eine Fensterfunktion  $\Psi^{(i)} \in \mathcal{W}^q$  für ein beliebiges  $q \in \mathbb{N}_0$  und  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  gegeben. Dann gilt für Funktionen der Form  $f_j = f \phi_j$  mit  $f \in C^u(\mathbb{R}^2)$  für  $u \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  die Abschätzung

$$\int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\partial^{\mathbf{r}} [\mathcal{F}f_j](\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C(u, \mathbf{r}) 2^{-j(2u+1+|\mathbf{r}|_1)}.$$

*Beweis.* Nach der Definition in (4.8) ist  $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  und mit der Voraussetzung  $f \in C^u(\mathbb{R}^2)$  folgt  $f_j \in C_0^u(\mathbb{R}^2)$ . Wegen des kompakten Trägers ist zudem  $(i\mathbf{x})^{|\mathbf{r}|_1} f_j \in L_1(\mathbb{R}^2)$ , weshalb sich mit Lemma 1.9 i)  $\mathcal{F}f_j \in C^{|\mathbf{r}|_1}(\mathbb{R}^2)$  ergibt. Mit der multivariaten Leibniz-Regel (1.11) folgt

$$\partial^{(u,0)} f_j = \sum_{s=0}^u \binom{u}{s} \partial^{(s,0)} \phi_j \partial^{(u-s,0)} f = \sum_{s=0}^u \eta_s,$$

wobei  $\eta_s := \binom{u}{s} \partial^{(s,0)} \phi_j \partial^{(u-s,0)} f$ . Die Funktion  $\eta_s$  ist  $s$ -mal stetig differenzierbar bezüglich der Variablen  $\xi_1$ . Für  $0 \leq t \leq s$  haben wir

$$\left\| \partial^{(s+t,0)} \phi_j \right\|_{\mathbb{R}^2, \infty} = \left\| 2^{j(s+t)/2} \frac{\partial^{s+t} \phi}{\partial \xi_1^{s+t}} \left( 2^{j/2} \circ \right) \right\|_{\mathbb{R}^2, \infty} \leq C_1 2^{j(s+t)/2} \leq C_1 2^{js},$$

was sich verwenden lässt, um

$$\left\| \partial^{(s,0)} \eta_s \right\|_{\mathbb{R}^2, \infty} = \left\| \binom{u}{s} \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \partial^{(s+t,0)} \phi_j \partial^{(u-t,0)} f \right\|_{\mathbb{R}^2, \infty} \leq C_2(u) 2^{js}$$

zu zeigen. Aus der Definition der Funktion  $\phi_j$  in (4.8) folgt für ihren Träger  $|\text{supp } \phi_j| \leq C 2^{-j}$  und mit der Eigenschaft (1.22) der Fourier-Transformation und der Formel von Plancherel in (1.23) erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(2\pi)(i\xi_1)^s \mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \partial^{(s,0)} \eta_s(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \leq C_2(u) 2^{j(2s-1)}.$$

Wegen Lemma 3.7 gilt für die Variable  $\xi_1 \in \text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}$  die Abschätzung  $\frac{2^j}{3} \leq \xi_1 \leq 2^{j+1}$ , welche zu

$$\left( 2\pi \left( \frac{2^j}{3} \right)^s \right)^2 \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |(2\pi)(i\xi_1)^s \mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C_2(u) 2^{j(2s-1)}$$

führt und

$$\int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C_3(u) 2^{-j} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq u \quad (4.9)$$

impliziert. Mit der Linearität der Fourier-Transformation und der erneuten Verwendung der Eigenschaft (1.22) erhalten wir

$$(i\xi_1)^u \mathcal{F}f_j = \mathcal{F} \left[ \partial^{(u,0)} f_j \right] = \sum_{s=0}^u \mathcal{F}\eta_s.$$

Zusammen mit (4.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\mathcal{F}f_j(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &\leq C_4(u) 2^{-2ju} \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |(i\xi_1)^u \mathcal{F}f_j(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
 &= C_4(u) 2^{-2ju} \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} \left| \sum_{s=0}^u \mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq C_4(u) 2^{-2ju} \sum_{s=0}^u \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\mathcal{F}\eta_s(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq C_5(u) 2^{-j(2u+1)}, \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

wobei die zweite Abschätzung durch die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung entsteht.

Im Folgenden nutzen wir eine Idee aus dem Beweis von [7, Korollar 6.6] und betrachten die Funktion

$$\mathbf{x}^{\mathbf{r}} f_j(\mathbf{x}) = 2^{-j|\mathbf{r}|_1/2} f(\mathbf{x}) 2^{j|\mathbf{r}|_1/2} \mathbf{x}^{\mathbf{r}} \phi_j(\mathbf{x}) = 2^{-j|\mathbf{r}|_1/2} f(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\mathbf{x}), \tag{4.11}$$

wobei  $\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{x})$ . Wir sehen, dass  $\phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\circ) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit  $|\text{supp } \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\circ)| \leq 2^{-j}$  erfüllt ist. Deshalb genügt die Fourier-Transformation der Funktion  $f(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\mathbf{x})$  der Ungleichung (4.10) mit einer Konstanten  $C_6(u, \mathbf{r})$ . Wir verwenden erneut Eigenschaft (1.22) der Fourier-Transformation, um

$$\partial^{\mathbf{r}} \mathcal{F}f_j(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}[(i\circ)^{\mathbf{r}} f_j(\circ)](\boldsymbol{\xi}) = i^{\mathbf{r}} 2^{-j|\mathbf{r}|_1/2} \mathcal{F}\left[f(\circ) \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\circ)\right](\boldsymbol{\xi}) \tag{4.12}$$

zu folgern und schlussendlich

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\partial^{\mathbf{r}} \mathcal{F}f_j(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &= 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} \left| \mathcal{F}\left[f(\circ) \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2}\circ)\right](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
 &\leq C_6(u, \mathbf{r}) 2^{-j(2u+1+|\mathbf{r}|_1)}
 \end{aligned}$$

zu erhalten. □

Mit dem vorherigen Lemma lässt sich die folgende Abschätzung zeigen.

**Lemma 4.5.**

Es sei eine Fensterfunktion  $\Psi^{(i)} \in \mathcal{W}^q$  mit  $q \in \mathbb{N}$  und  $i \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  gegeben. Dann gilt für Funktionen der Form  $f_j = f \phi_j$  mit  $f \in C^u(\mathbb{R}^2)$  für  $u \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $|\mathbf{r}|_1 \leq q$  die Abschätzung

$$\left\| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \mathcal{F}[f_j] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2}^2 \leq C(u, q) 2^{-j(2u+1+|\mathbf{r}|_1)}.$$

*Beweis.* Für die partielle Ableitung des Produkts in der Norm nutzen wir die multivariate Leibniz-Regel (1.11) und erhalten

$$\left\| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \mathcal{F}[f_j] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2}^2 \leq \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{r}} \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \partial^{\mathbf{s}} [\mathcal{F}f_j](\boldsymbol{\xi}) \partial^{\mathbf{r}-\mathbf{s}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}.$$

Lemma 3.11 impliziert, dass für alle  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$  die Ungleichung

$$\left| \partial^{\mathbf{r}-\mathbf{s}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 \leq C_1(q) 2^{-j(|\mathbf{r}|_1 - |\mathbf{s}|_1)}$$

unabhängig vom Orientierungsparameter  $\ell$  gilt. Zusammen mit Lemma 4.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\| \partial^{\mathbf{r}} \left( \mathcal{F}[f_j] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right) \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2}^2 &\leq \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{r}} \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2} \left| \partial^{\mathbf{r}-\mathbf{s}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 \int_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}} \left| \partial^{\mathbf{s}} [\mathcal{F}f_j](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{r}} \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} C_2(u, q) 2^{-j(|\mathbf{r}|_1 - |\mathbf{s}|_1)} 2^{-j(2u+1+|\mathbf{s}|_1)} \\ &= C_3(u, q) 2^{-j(2u+1+|\mathbf{r}|_1)}, \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.  $\square$

Wir greifen die Überlegungen aus [7, Abschnitt 6.1] auf und nehmen im Folgenden an, dass der Rand  $\partial T$  für  $j \geq j_0$  auf dem Träger der Funktion  $\phi_Q$  mit  $Q \in \mathcal{Q}_j^1$  entweder als Graph  $(x_1, t(x_1))^{\text{T}}$  oder als Graph  $(t(x_2), x_2)^{\text{T}}$  parametrisiert werden kann. Dies führt zur Definition von sogenannten Standard-Kantenstücken.

**Definition 4.6.**

Für  $x_2 \in [-2^{-j/2}, 2^{-j/2}]$  sei  $(t(x_2), x_2)^{\text{T}}$  eine Parametrisierung von  $\partial T$  mit  $t(0) = t'(0) = 0$ . Für  $f \in C^u(\mathbb{R}^2)$  nennen wir

$$\mathcal{K}_j := f \phi_j \chi_{\{\mathbf{x} : x_1 \geq t(x_2)\}}$$

Standard-Kantenstück.

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}_{j, \mathbf{x}_0, \vartheta}$  ein beliebiges Kantenstück, dessen Tangente im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial T$  in die Richtung  $\Theta(\vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^{\text{T}}$  mit  $\vartheta := \vartheta_{\mathbf{x}_0} \in [0, 2\pi)$  zeigt. Dann ist  $\mathcal{K}_j = \mathcal{K}_{j, \mathbf{0}, 0}$  ein Standard-Kantenstück. In [7, Korollar 6.7] wurde begründet, dass ein beliebiges Kantenstück  $\mathcal{K}_{j, \mathbf{x}_0, \vartheta}$  nicht durch Rotation und Translation aus einem Standard-Kantenstück erhalten werden kann. Dennoch gibt es den Zusammenhang der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}\mathcal{K}_{j, \mathbf{x}_0, \vartheta}(\boldsymbol{\xi}) = e^{-i \mathbf{x}_0^{\text{T}} \boldsymbol{\xi}} \mathcal{F}\mathcal{K}_j(\mathbf{R}_{\vartheta}^{\text{T}} \boldsymbol{\xi}), \quad (4.13)$$

wobei  $\mathbf{R}_{\vartheta}$  eine Rotationsmatrix um den Winkel  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  ist. Wir können das folgende Lemma herleiten, welches [57, Lemma 6] verallgemeinert und dessen Beweisidee auf [33, Proposition 2.1] beruht.

**Lemma 4.7.**

Für  $\mathfrak{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei  $\Psi^{(\mathfrak{i})} \in \mathcal{W}^q$  gegeben. Außerdem sei  $\mathcal{K}_{j, \mathbf{0}, \vartheta}$  mit  $\vartheta \in (\theta_{j, \ell-2}^{(\mathfrak{i})}, \theta_{j, \ell+2}^{(\mathfrak{i})})$  ein beliebiges Kantenstück und  $f_j = f \phi_j$  eine Funktion, für die  $\partial_{\Theta(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})})}^n f_j = \mathcal{K}_{j, \mathbf{0}, \vartheta}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte. Dann haben wir für  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  die Abschätzung

$$\int_{\text{supp} \Psi_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}} |\partial^{\mathbf{r}} [\mathcal{F} f_j](\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq C(n, \mathbf{r}) 2^{-j(3/2+2n+|\mathbf{r}|_1)} \left(1 + 2^{j/2} |\sin(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})} - \vartheta)|\right)^{-5}.$$

*Beweis.* Wir nutzen die Idee aus (4.11) im Beweis von Lemma 4.4 und betrachten

$$\mathbf{x}^{\mathbf{r}} f_j(\mathbf{x}) = 2^{-j|\mathbf{r}|_1/2} f(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2} \mathbf{x}) = 2^{-j|\mathbf{r}|_1/2} f_{j, \mathbf{r}}(\mathbf{x})$$

mit  $f_{j, \mathbf{r}} := f \phi_{\mathbf{r}}(2^{j/2} \circ)$ . Für die Funktion  $f_{j, \mathbf{r}}$  gilt ebenfalls  $\partial_{\Theta(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})})}^n f_{j, \mathbf{r}} = \mathcal{K}_{j, \mathbf{0}, \vartheta}$  und mit (4.12) und (1.24) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp} \Psi_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}} |\partial^{\mathbf{r}} [\mathcal{F} f_j](\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &= 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \int_{\text{supp} \Psi_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}} |\mathcal{F} f_{j, \mathbf{r}}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \int_{\text{supp} \Psi_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}} \left| \left( \Theta^{\mathbf{T}}(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}) \boldsymbol{\xi} \right)^{-n} \mathcal{F}[\mathcal{K}_{j, \mathbf{0}, \vartheta}](\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wir benötigen im Folgenden das Ergebnis aus [7, Theorem 6.1]. Dort wird die Abschätzung

$$\int_{|\rho| \in I_j} \left| \mathcal{F} \mathcal{K}_j(\rho \Theta(\theta - \vartheta)) \right|^2 d\rho \leq C 2^{-2j} \left(1 + 2^{j/2} |\sin(\theta - \vartheta)|\right)^{-5} \quad (4.15)$$

der Fourier-Transformation eines Kantenstücks angegeben, wobei  $I_j = [2^{j-1}, 2^{j+1}]$ . In Polarkoordinaten  $\boldsymbol{\xi} = \rho \Theta(\theta)$  mit  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|_2$  gilt für das auftretende Skalarprodukt in (4.14)

$$\left| \Theta^{\mathbf{T}}(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}) \boldsymbol{\xi} \right| = \left| \rho \cos(\theta_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})} - \theta) \right| \geq C_2 |\rho| > 0, \quad (4.16)$$

falls  $\theta \in (\theta_{j, \ell-2}^{(\mathfrak{i})}, \theta_{j, \ell+2}^{(\mathfrak{i})})$ . Wegen Lemma 3.7 ist  $\text{supp} \Psi_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})} \subset W_{j, \ell}^{(\mathfrak{i})}$  und aus Lemma 3.8 folgt

$$\left( \theta_{j, \ell+2}^{(\mathfrak{i})} - \theta_{j, \ell-2}^{(\mathfrak{i})} \right) \leq C_3 2^{-j/2}. \quad (4.17)$$

Wir betrachten das Integral aus (4.14) in Polarkoordinaten und verwenden (4.15), (4.16) und (4.17), um

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{supp}\Psi_{j,\ell}^{(i)}} |\partial^{\mathbf{r}} [\mathcal{F}f_j](\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &= 2^{-j|\mathbf{r}|_1} \int_{\theta_{j,\ell-2}^{(i)}}^{\theta_{j,\ell+2}^{(i)}} \int_{\frac{2j}{3}}^{2^{j+1}} \left| \left( \rho \cos(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \theta) \right)^{-n} \mathcal{FK}_j(\rho \Theta(\theta - \vartheta)) \right|^2 \rho d\rho d\theta \\
 &\leq C_4(n, \mathbf{r}) 2^{-j(1+2n+|\mathbf{r}|_1)} \int_{\theta_{j,\ell-2}^{(i)}}^{\theta_{j,\ell+2}^{(i)}} \left( 1 + 2^{j/2} |\sin(\theta - \vartheta)| \right)^{-5} d\theta \\
 &\leq C_5(n, \mathbf{r}) 2^{-j(3/2+2n+|\mathbf{r}|_1)} \left( 1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta) \right| \right)^{-5}
 \end{aligned}$$

zu erhalten.  $\square$

Mit dem vorherigen Lemma ist es möglich, eine zu Lemma 4.5 analoge Abschätzung anzugeben.

**Lemma 4.8.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei  $\Psi^{(\mathbf{i})} \in \mathcal{W}^q$  gegeben. Außerdem sei  $\mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta}$  mit  $\vartheta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(\mathbf{i})}, \theta_{j,\ell+2}^{(\mathbf{i})})$  ein beliebiges Kantenstück und  $f_j = f \phi_j$  eine Funktion, für die  $\partial_{\Theta(\theta_{j,\ell}^{(\mathbf{i})})}^n f_j = \mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte. Dann haben wir für  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  die Abschätzung

$$\left\| \partial^{\mathbf{r}} \left[ \mathcal{F}[f_j] \Psi_{j,\ell}^{(\mathbf{i})} \right] \right\|_{\text{supp}\Psi_{j,\ell,2}^{(\mathbf{i})}}^2 \leq C(n, q) 2^{-j(3/2+2n+|\mathbf{r}|_1)} \left( 1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(\mathbf{i})} - \vartheta) \right| \right)^{-5}.$$

*Beweis.* Wir wiederholen die Beweisschritte aus Lemma 4.5 und nutzen Lemma 4.7 anstatt Lemma 4.4 im letzten Schritt.  $\square$

Das abschließende Lemma fasst die Resultate dieses Abschnitts zusammen und beinhaltet Abschätzungen ähnlich zu denen in Lemma 4.5 beziehungsweise Lemma 4.8, dieses Mal jedoch bezüglich des Differentialoperators  $L^q$  aus (1.10).

**Lemma 4.9.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  sei  $\Psi^{(\mathbf{i})} \in \mathcal{W}^q$  gegeben. Wir betrachten Funktionen der Form  $f_{j,0} := f_0 \phi_j$  mit  $f_0 \in C_0^u([-\pi, \pi]^2)$  für  $u \in \mathbb{N}_0$  beziehungsweise für beliebige Kantenstücke  $\mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta}$  mit  $\vartheta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(\mathbf{i})}, \theta_{j,\ell+2}^{(\mathbf{i})})$  sei  $f_{j,1} := f_1 \phi_j$  eine Funktion, für die  $\partial_{\Theta(\theta_{j,\ell}^{(\mathbf{i})})}^n f_{j,1} = \mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte. Dann existieren Konstanten  $C_1(u, q), C_2(n, q) > 0$ , sodass

$$\left\| L^q \left[ \mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(\mathbf{i})} \right] \right\|_{\text{supp}\Psi_{j,\ell,2}^{(\mathbf{i})}}^2 \leq \begin{cases} C_1(u, q) 2^{-j(2u+1)}, & \text{falls } h = f_{j,0}, \\ \frac{C_2(n, q) 2^{-j(3/2+2n)}}{\left( 1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(\mathbf{i})} - \vartheta) \right| \right)^5}, & \text{falls } h = f_{j,1}. \end{cases}$$

### 4.3 Beweis von Theorem 4.1

*Beweis.* Der Differentialoperator  $L^q$  lässt sich mittels (1.10) schreiben als

$$L^q = \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}}.$$

Setzen wir dies in das gesuchte Integral ein, erhalten wir mit der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewandt auf die Summe über  $s$

$$\begin{aligned} \left\| L^q [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}}^2 &= \left\| \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}} [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}}^2 \\ &\leq \left( \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \left\| \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}} [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}} \right)^2 \\ &\leq (q+1) \sum_{s=0}^q \binom{q}{s}^2 2^{2js} \left\| \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \partial^{2\mathbf{r}} [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}}^2. \end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten folgt für die verbleibende Summe in der Norm

$$\begin{aligned} \left\| L^q [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}}^2 &\leq (q+1) \sum_{s=0}^q \binom{q}{s}^2 2^{2js} (s+1) \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}}^2 \\ &\quad \times \left\| \partial^{2\mathbf{r}} [\mathcal{F}[h] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i),2}}^2 \end{aligned}$$

und die Aussage des Lemmas folgt durch das Einsetzen der entsprechenden Abschätzungen der Normen aus Lemma 4.5 und Lemma 4.8.  $\square$

**Lemma 4.9** spielt eine zentrale Rolle im Beweis von Theorem 4.1. Dabei werden die glatten Funktionen  $f_j = f \phi_j$  aus diesem Abschnitt mit Funktionen  $f_Q = f \phi_Q$  mit  $Q \in \mathcal{Q}_j^0$  identifiziert, die auf den dyadischen Quadraten definiert sind, welche  $\partial T$  nicht schneiden. Auf ähnliche Weise identifizieren wir Funktionen  $f_Q = f \phi_Q$  mit  $Q \in \mathcal{Q}_j^1$  auf dyadischen Quadraten, welche die Kantenkurve schneiden, mit den entsprechenden rotierten und verschobenen Kantenstücken  $\mathcal{K}_{j,x_0,\vartheta}$  beziehungsweise Funktionen, deren Richtungsableitungen Kantenstücke darstellen.

### 4.3 Beweis von Theorem 4.1

Es seien eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $\mathbf{f} = f \chi_T \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$  gegeben. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  bezeichne  $\mathcal{Q}_j$  wie in Abschnitt 4.2 die Menge aller dyadischen Quadrate  $Q \subseteq [-\pi, \pi)^2$  von der Form

(4.3). Mit den Funktionen  $\phi_Q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  für  $Q \in \mathcal{Q}_j$  aus (4.4), welche die Zerlegungseigenschaft (4.5) erfüllen, lässt sich mit der Notation  $f_Q := f\phi_Q$  analog zu (4.6) die Zerlegung

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} f_Q = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} f_Q + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} f_Q \quad (4.18)$$

angeben. Dabei gelte wie in Abschnitt 4.2, dass  $Q \in \mathcal{Q}_j^1 \subseteq \mathcal{Q}_j$ , falls  $\partial T \cap Q \neq \emptyset$ . Die nicht von der Kurve geschnittenen Quadrate seien mit  $\mathcal{Q}_j^0 = \mathcal{Q}_j \setminus \mathcal{Q}_j^1$  bezeichnet. Wie in [7, Abschnitt 5.1] bemerkt, existieren Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , sodass

$$|\mathcal{Q}_j^0| \leq C_1 2^j, \quad |\mathcal{Q}_j^1| \leq C_2 2^{j/2}. \quad (4.19)$$

Gemäß Definition 1.11 bezeichnet  $f_Q^{2\pi}$  die  $2\pi$ -Periodisierung der Funktion  $f_Q$ . Da  $f_Q \in L_1(\mathbb{R}^2)$ , sind die Fourier-Koeffizienten von  $f_Q^{2\pi}$  wegen Lemma 1.12 von der Form

$$c_{\mathbf{k}}(f_Q^{2\pi}) = \mathcal{F}[f_Q](\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2.$$

Da  $f_Q$  einen kompakten Träger besitzt, gilt  $(i\mathbf{x})^{2q} f_Q(\mathbf{x}) \in L_1(\mathbb{R}^2)$  und deshalb folgt mit Lemma 1.9 ii), dass  $\mathcal{F}[f_Q] \in C^{2q}(\mathbb{R}^2)$  für  $q \in \mathbb{N}$ . Nach der Voraussetzung von Theorem 4.1 ist  $\Psi_{j,\ell}^{(i)} \in \mathcal{W}^{2q}$  mit  $2q > 4$ , weshalb  $\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \in C_0^{2q}(\mathbb{R}^2)$  gilt. Wegen Lemma 1.10 genügt dieses Produkt der Voraussetzung von Theorem 1.13, weshalb mit der Parseval-Gleichung und der Poisson-Summationsformel aus (1.27)

$$\left\langle f_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 = 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}[f_Q](\mathbf{k}) \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\mathbf{k}) e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} = 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} S_Q(\mathbf{n}) \quad (4.20)$$

mit

$$S_Q(\mathbf{n}) := \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}[f_Q](\boldsymbol{\xi}) \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{y} + \mathbf{n})} d\boldsymbol{\xi} \quad (4.21)$$

folgt. Da  $\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \in C_0^{2q}(\mathbb{R}^2)$ , kann partielle Integration in beiden Variablen für  $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $|\mathbf{r}|_1 \leq q$  verwendet werden, um

$$S_Q(\mathbf{n}) = \left( 2\pi i (\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right)^{-2\mathbf{r}} \int_{\mathbb{R}^2} \partial^{2\mathbf{r}} \left[ \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{y} + \mathbf{n})} d\boldsymbol{\xi}$$

zu erhalten. Mit der Beziehung

$$\left( 1 + 2^j |2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_2^2 \right)^q = \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right)^{2\mathbf{r}}$$

und der Darstellung des Differentialoperators  $L^q$  in (1.10) folgt

$$\begin{aligned} \left( 1 + 2^j |2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_2^2 \right)^q S_Q(\mathbf{n}) &= \left( \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} 2^{js} \sum_{|\mathbf{r}|_1=s} \binom{s}{\mathbf{r}} \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right)^{2\mathbf{r}} \right) S_Q(\mathbf{n}) \\ &= i^{-2\mathbf{r}} \int_{\mathbb{R}^2} L^q \left[ \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{y} + \mathbf{n})} d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

### 4.3 Beweis von Theorem 4.1

Wegen Lemma 4.9 ist  $L^q [\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \in L_2(\mathbb{R}^2)$  und mit der Folgerung (1.4) aus der Hölder-Ungleichung für  $p = 1$  und  $s = 2$  sowie der Beschränktheit des Trägers der Funktion  $\Psi_{j,\ell}^{(i)}$  aus (3.9) gilt

$$\left\| L^q [\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)},1} \leq 2^{3j/4} \left\| L^q [\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)},2}. \quad (4.23)$$

Deshalb folgt mit (4.22) und (4.23) die Abschätzung

$$|S_Q(\mathbf{n})| \leq 2^{3j/4} \left(1 + 2^j |2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_2^2\right)^{-q} \left\| L^q [\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)},2}.$$

Mit der Monotonie der endlichen Vektornormen und der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_2 \geq |2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_\infty \geq \pi(2|\mathbf{n}|_\infty - 2|\mathbf{y}|_\infty) \geq \pi(2|\mathbf{n}|_\infty - 1)$$

für  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , wobei in der zweiten Ungleichung  $|\mathbf{y}|_\infty \leq \frac{1}{2}$  für  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  verwendet wurde. Wegen der Beziehung  $|\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{n}|_\infty = k, k \in \mathbb{N}\}| = 8k$  folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 + 2^j |2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n})|_2^2\right)^{-q} &\leq C(q) 2^{-jq} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\mathbf{n}|_\infty = k} (2|\mathbf{n}|_\infty - 1)^{-2q} \\ &= C(q) 2^{-jq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{(2k-1)^{2q}} \\ &\leq \tilde{C}(q) 2^{-jq} \end{aligned}$$

und deshalb

$$2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S_Q(\mathbf{n})| \leq \tilde{C}(q) 2^{-jq} \left\| L^q [\mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)},2}. \quad (4.24)$$

Wir unterscheiden im Folgenden, ob der Rand  $\partial T$  den Träger von  $\phi_Q$  scheidet oder nicht und nutzen die Resultate aus dem vorherigen Abschnitt.

i) Wir betrachten zunächst Quadrate  $Q \in \mathcal{Q}_j^0$ :

Falls  $Q \cap T = \emptyset$  (weiße Quadrate in Abbildung 4.1 rechts), ist  $f_Q = 0$  und deshalb

$$\left| \left\langle f_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| = 0.$$

Falls  $Q \subset T$ , wählen wir  $\mathbf{x}_1 \in [-\pi, \pi]^2$ , sodass

$$|2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_1|_2 \geq c > 0 \quad (4.25)$$

und betrachten die Funktion  $\tilde{f}_Q(\mathbf{x}) := f_Q(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)$ . Wegen Lemma 1.9 gilt  $\mathcal{F}[f_Q](\boldsymbol{\xi}) = e^{-i\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x}_1} \mathcal{F}[\tilde{f}_Q](\boldsymbol{\xi})$  und für das Integral aus (4.21) folgt für  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$

$$S_Q(\mathbf{0}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (2\pi\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}[\tilde{f}_Q](\boldsymbol{\xi}) \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T (2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_1)} d\boldsymbol{\xi}.$$

Da  $\mathcal{F}[\tilde{f}_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \in C_0^q(\mathbb{R}^2)$ , können die Schritte vor Gleichung (4.23) wiederholt werden, um mit  $q$ -facher partieller Integration

$$S_Q(\mathbf{0}) = \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_1|_2^2\right)^{-q} \int_{\mathbb{R}^2} L^q \left[ \mathcal{F}[\tilde{f}_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T(2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_1)} d\boldsymbol{\xi}$$

zu erhalten. Mit der zu (4.23) analogen Abschätzung für  $\tilde{f}_Q$  und (4.25) gilt

$$|S_Q(\mathbf{0})| \leq 2^{-j(q-3/4)} \left\| L^q \left[ \mathcal{F}[\tilde{f}_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2} \quad (4.26)$$

und mit (4.24), (4.26) und Lemma 4.9 eingesetzt in (4.20) folgt

$$\left| \left\langle \hat{f}_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \leq 2^{-3j/4} \left( |S_Q(\mathbf{0})| + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S_Q(\mathbf{n})| \right) \leq C_1(u, q) 2^{-j(q+u+3/2)}. \quad (4.27)$$

ii) Wir betrachten  $Q \in \mathcal{Q}_j^1$ :

Dann haben wir die Darstellung

$$S_Q(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}^T(2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)} d\boldsymbol{\xi},$$

wobei  $\partial_{\Theta(\theta_{j,\ell}^{(i)})} f_Q = \mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta_{\mathbf{x}_0}}$  und  $\mathcal{K}_{j,\mathbf{0},\vartheta_{\mathbf{x}_0}}$  ein beliebiges Kantenstück ist. Mit den gleichen Argumenten wie im vorherigen Fall kann

$$|S_Q(\mathbf{0})| \leq 2^{3j/4} \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^{-q} \left\| L^q \left[ \mathcal{F}[f_Q] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2} \quad (4.28)$$

gefolgert werden. Wiederum mit (4.24), (4.28) und Lemma 4.9 können wir

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \hat{f}_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| &\leq 2^{-3j/4} \left( |S_Q(\mathbf{0})| + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S_Q(\mathbf{n})| \right) \\ &\leq C_2(n, q) (1 + 2^{-jq}) 2^{-j(3/4+n)} \frac{\left(1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta_{\mathbf{x}_0}) \right| \right)^{-5/2}}{\left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^q} \\ &\leq C_3(n, q) 2^{-3j/4} \frac{\left(1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta_{\mathbf{x}_0}) \right| \right)^{-5/2}}{2^{jn} \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^q} \end{aligned} \quad (4.29)$$

schließen. Mit der Zerlegung in (4.18) und den beiden zuvor erhaltenen Abschätzungen (4.27) und (4.29) bekommen wir

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \hat{f}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| &\leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} \left| \left\langle \hat{f}_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \left| \left\langle \hat{f}_Q^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \\ &\leq C_4(u, n, q) 2^{-3j/4} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \frac{\left(1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta_{\mathbf{x}_0}) \right| \right)^{-5/2}}{2^{jn} \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^q}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

#### 4.4 Lokalisierungslemmata

Zum Abschluss des Beweises betrachten wir allgemeine Cartoon-ähnliche Funktionen  $f_0 \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$  von der Form  $f_0 = f_0 + f \chi_T = f_0 + \mathfrak{f}$  mit  $\mathfrak{f} = f \chi_T$  und  $f_0, f \in C_0^{u+1}(\mathbb{R}^2)$ . Für die Funktion  $f_0$  gilt mit (4.18) die Darstellung

$$f_0 = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} f_{0,Q}$$

mit  $f_{0,Q} := f_0 \phi_Q$ , da  $\mathcal{Q}_j^1 = \emptyset$ . Aus diesem Grund folgt mit (4.27) und (4.19)

$$\left| \left\langle f_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} \left| \left\langle f_{0,Q}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \leq C_5(u, q) 2^{-j(q+u+1/2)}. \quad (4.31)$$

Deshalb gilt mit (4.30) und (4.31)

$$\begin{aligned} \left| \left\langle f_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| &\leq \left| \left\langle f_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| + \left| \left\langle \mathfrak{f}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \\ &\leq C_6(u, n, q) 2^{-3j/4} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \frac{\left(1 + 2^{j/2} \left| \sin(\theta_{j,\ell}^{(i)} - \vartheta_{\mathbf{x}_0}) \right| \right)^{-5/2}}{2^{jn} \left(1 + 2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|_2^2\right)^q}, \end{aligned}$$

da  $n < u$  und die Aussage des Theorems ist bewiesen.  $\square$

#### 4.4 Lokalisierungslemmata

Im Beweis von Theorem 4.2 spielen Terme der Form  $\mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (2\pi\mathbf{y})$  eine zentrale Rolle, weshalb wir diese im folgenden Abschnitt näher untersuchen wollen. Wir betrachten zunächst Funktionen der Form  $P_u = p_u \chi_T$  mit  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$ , wie sie in Abschnitt 1.5 auftreten, wobei  $p := p_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein bivariates Polynom vom Grad  $u \in \mathbb{N}$  ist. Die Fourier-Transformation der Funktion  $P_u$  ist nach der Folgerung aus dem Integralsatz von Gauß in Lemma 1.18 in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\mathcal{F}P_u(\rho \Theta(\theta)) = \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{\rho^{m+1}} \int_{\partial T} \partial_{\Theta(\theta)}^m [p](\mathbf{x}) e^{-i\rho \Theta^T(\theta)\mathbf{x}} \Theta^T(\theta) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}). \quad (4.32)$$

Wir betrachten die Kurve  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \partial T$ . Für  $M \in \mathbb{N}$  sei  $a_0 < a_1 < \dots < a_M$  eine Partition des Intervalls  $[0, 2\pi)$ , sodass die Kurve  $\gamma$  für  $x \in [a_k, a_{k+1})$  mit  $k = 0, \dots, M-1$  entweder von der Form  $\gamma(x) = (x, t_k(x))^T$  oder von der Form  $\gamma(x) = (t_k(x), x)^T$  ist. Abhängig von der Wahl des Parameters  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  werden wir unterscheiden, ob eine Kurve horizontal oder vertikal verläuft. Falls  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$ , so ist  $(t_k(x), x)^T$  mit  $|t'_k(x)| \leq 1$  eine vertikale Kurve und  $(x, t_k(x))^T$  mit  $|t'_k(x)| < 1$  eine horizontale Kurve. Ist andererseits  $\mathbf{i} = \mathfrak{v}$ , so ist  $(t_k(x), x)^T$  mit  $|t'_k(x)| < 1$  eine vertikale Kurve und  $(x, t_k(x))^T$  mit  $|t'_k(x)| \leq 1$  eine horizontale Kurve.

Unter Verwendung der Parametrisierung der Kurve  $\gamma$  können wir das Kurvenintegral 1. Art in (4.32) darstellen als

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}P_u(\rho \Theta(\theta)) &= \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{\rho^{m+1}} \int_{\partial T} \partial_{\Theta(\theta)}^m [p](\mathbf{x}) e^{-i\rho \Theta^T(\theta) \mathbf{x}} \Theta^T(\theta) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \\
 &= \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{\rho^{m+1}} \int_0^{2\pi} \partial_{\Theta(\theta)}^m [p](\gamma(x)) e^{-i\rho \Theta^T(\theta) \gamma(x)} \Theta^T(\theta) \mathbf{n}(\gamma(x)) |\gamma'(x)|_2 dx \\
 &= \sum_{m=0}^u \frac{C_m}{\rho^{m+1}} \sum_{k=0}^{M-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} p_\theta^m(\gamma(x)) e^{-i\rho \Theta^T(\theta) \gamma(x)} \Theta^T(\theta) \beta(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

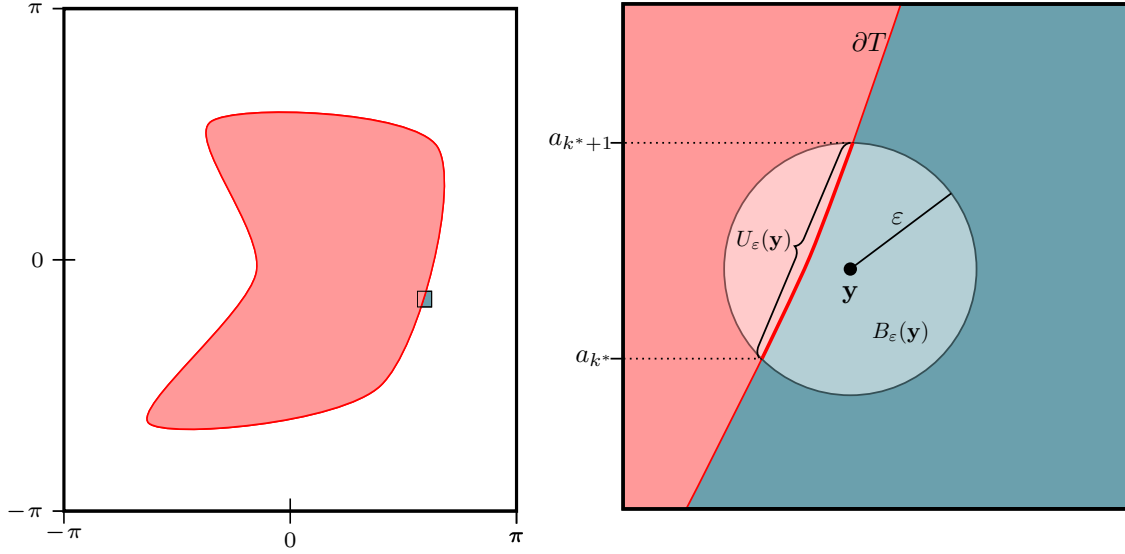
mit  $\beta(x) := \mathbf{n}(\gamma(x)) |\gamma'(x)|_2$  und der Kurzschreibweise  $p_\theta^m(\mathbf{x}) := \partial_{\Theta(\theta)}^m [p](\mathbf{x})$ . Damit ergibt sich mit (4.33) und der Substitution im auftretenden Integral in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (2\pi \mathbf{y}) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathcal{F}P_u(\rho \Theta(\theta)) \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\rho \Theta(\theta)) e^{2\pi i \rho \Theta^T(\theta) \mathbf{y}} \rho d\rho d\theta \\
 &= \sum_{m=0}^u C_m \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{\partial T} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\mathbf{x}) \rho^{-m} e^{i\rho \Theta^T(\theta) (2\pi \mathbf{y} - \mathbf{x})} \Theta^T(\theta) \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma d\theta d\rho \\
 &= \sum_{m=0}^u C_m \sum_{k=0}^{M-1} I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m),
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m) &:= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \rho^{-m} e^{i\rho \Theta^T(\theta) (2\pi \mathbf{y} - \gamma(x))} \\
 &\quad \times \Theta^T(\theta) \beta(x) dx d\theta d\rho.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Nach der Voraussetzung von [Theorem 4.2](#) gilt für die Menge aus (4.7), dass ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $U_\varepsilon(\mathbf{y}) = \partial T \cap B_\varepsilon(2\pi \mathbf{y}) \neq \emptyset$ . Es sei  $k^* = k^*(\mathbf{y})$  mit  $0 \leq k^* \leq M-1$  so gewählt, dass die Menge  $U_\varepsilon(\mathbf{y})$  für  $x \in [a_{k^*}, a_{k^*+1})$  durch die Kurve  $\gamma(x)$  dargestellt wird. Das nachstehende Lemma, welches wir im Folgenden Lokalisierungslemma nennen, spielt eine zentrale Rolle im Beweis von [Theorem 4.1](#). Es besagt im Wesentlichen, dass alle Integrale  $I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$  in (4.35) beliebig klein werden, falls der Musterpunkt  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  nicht in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\partial T$  liegt, also  $k \neq k^*$  gilt. Eine ähnliche Aussage wurde bereits für klassische kontinuierliche Kegel-Shearlets in [30] gezeigt. Der folgende Beweis orientiert sich deshalb an den Ideen aus [30, Lemma 4.1]. Für den Fall diskreter klassischer Kegel-Shearlets wurde in [31, Lemma 1] ebenfalls ein Lokalisierungslemma angegeben, jedoch auf den Beweis verzichtet.



**Abbildung 4.2.** Links: Schematische Darstellung einer Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  mit einem ausgewählten Abschnitt des Randes  $\partial T$ , welcher in der rechten Abbildung vergrößert gezeigt wird. Rechts: Darstellung der Umgebung  $B_\varepsilon(\mathbf{y})$  um den Punkt  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}_{j,\ell}^{(i)})$  und der Schnittmenge  $U_\varepsilon(\mathbf{y})$  mit dem Rand  $\partial T$ , welche das Intervall  $[a_{k^*}, a_{k^*+1})$  festlegt.

**Lemma 4.10.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}$  sei  $\Psi^{(\mathbf{i})} \in \mathcal{W}^{2q}$  gegeben. Dann gibt es eine Konstante  $C(m, q, p) > 0$ , sodass

$$|I_k^{(\mathbf{i})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)| \leq C(m, q, p, \varepsilon_0) 2^{-j(q+m-1/2)}$$

für alle  $k \neq k^*$  erfüllt ist.

*Beweis.* Wir zeigen in diesem Beweis nur den Fall  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$  und verwenden zur besseren Übersicht die Kurzschreibweise  $I_k := I_k^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$  für  $k \neq k^*$ . Lemma 3.7 impliziert

$$\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) \subset \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \frac{1}{3} < |\rho| < 2, \theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})} < \theta < \theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})} \right\} \quad (4.36)$$

und mit der Substitution  $\rho = 2^j \rho'$  lässt sich das Integral  $I_k$  schreiben als

$$I_k = 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{\theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})}}^{\theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \rho^{-m} e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta)(2\pi\mathbf{y} - \gamma(x))} \\ \times \Theta^T(\theta) \beta(x) dx d\theta d\rho.$$

Wir betrachten die Mengen

$$M_1 := M_1(K) := \left\{ \theta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})}, \theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})}) : \frac{|\Theta^T(\theta)(2\pi\mathbf{y} - \gamma(x))|}{|2\pi\mathbf{y} - \gamma(x)|_2} \geq K \right\}$$

und

$$M_2 := \left( \theta_{j,\ell-2}^{(h)}, \theta_{j,\ell+2}^{(h)} \right) \setminus M_1,$$

wobei  $K = K(\varepsilon_0) > 0$  so gewählt sei, dass  $M_1 = \left( \theta_{j,\ell-2}^{(h)}, \theta_{j,\ell+2}^{(h)} \right)$  für alle  $x \in [a_k, a_{k+1}]$  mit  $|2\pi\mathbf{y} - \gamma(x)|_2 < c(\varepsilon_0)$  gelte.

Mit diesen Mengen unterteilen wir das Integral in  $I_k = I_{k,1} + I_{k,2}$ , wobei

$$\begin{aligned} I_{k,i} &:= 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{M_i} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \rho^{-m} e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta)(2\pi\mathbf{y} - \gamma(x))} \\ &\quad \times \Theta^T(\theta) \beta(x) dx d\theta d\rho \end{aligned}$$

für  $i \in \{1, 2\}$  und untersuchen diese getrennt.

- i) Wir betrachten zunächst das Integral  $I_{k,1}$  und nutzen den Satz von Fubini, um die Reihenfolge der auftretenden Integrale zu vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} I_{k,1} &= 2^{-j(m-1)} \int_{M_1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \int_{\frac{1}{3}}^2 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta)(2\pi\mathbf{y} - \gamma(x))} p_\theta^m(\gamma(x)) \\ &\quad \times \Theta^T(\theta) \beta(x) d\rho dx d\theta \\ &= 2^{-j(m-1)} \int_{M_1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} J(x, \theta) p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x) dx d\theta \end{aligned}$$

mit

$$J(x, \theta) := \int_{\frac{1}{3}}^2 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta)(2\pi\mathbf{y} - \gamma(x))} d\rho, \quad x \in [a_k, a_{k+1}), \quad \theta \in M_1.$$

Für alle  $k = 0, \dots, M-1$  mit  $k \neq k^*$  und  $x \in [a_k, a_{k+1})$  gilt nach der Wahl von  $k^*$ , dass  $\gamma(x) \in U_\varepsilon^c(\mathbf{y})$  und somit

$$|2\pi\mathbf{y} - \gamma(x)|_2 \geq \varepsilon = \varepsilon_0 2^{-j/2}. \quad (4.37)$$

Wegen

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} [\rho^{-m}] \right| = \frac{(m+s)!}{(m-1)!} |\rho|^{-(m+s)},$$

folgt mit der Leibniz-Produktregel und [Lemma 3.10](#)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \rho^{2q}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} \right] \right| &\leq \sum_{s=0}^{2q} \binom{2q}{s} \left| \frac{\partial^s}{\partial \rho^s} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \right] \right| \left| \frac{\partial^{2q-s}}{\partial \rho^{2q-s}} [\rho^{-m}] \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^{2q} \binom{2q}{s} C(q) C(q, m) |\rho|^{-(m+2q-s)} \\ &\leq C_2(q, m). \end{aligned} \quad (4.38)$$

#### 4.4 Lokalisierungslemmata

Da  $\theta \in M_1$ , erhalten wir zusammen mit (4.37) und (4.38) für das Integral  $J(x, \theta)$  mit  $2q$ -facher partieller Integration bezüglich der Variablen  $\rho$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |J(x, \theta)| &\leq \left| 2^j \Theta^T(\theta) (2\pi \mathbf{y} - \gamma(x)) \right|^{-2q} \int_{\frac{1}{3}}^2 \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \rho^{2q}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} \right] \right| d\rho \\ &\leq C_3(q, m, \varepsilon_0) 2^{-jq}. \end{aligned}$$

Der Randterm bei der partiellen Integration verschwindet dabei wegen der Eigenschaft des Trägers der Funktion  $\Psi_{j,\ell}^{(i)}$  in (4.36). Nach Lemma 3.8 gilt  $|M_1| \leq C 2^{-j/2}$ , weshalb sich das Integral  $I_{k,1}$  durch

$$\begin{aligned} |I_{k,1}| &\leq 2^{-j(m-1)} \int_{M_1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |J(x, \theta)| |p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x)| dx d\theta \\ &\leq C_4(q, m, p, \varepsilon_0) 2^{-j(q+m-1/2)} \end{aligned}$$

nach oben beschränken lässt.

- ii) Für  $x \in [a_k, a_{k+1}]$  mit  $|2\pi \mathbf{y} - \gamma(x)|_2 < c(\varepsilon_0)$  gilt nach der Wahl von  $K$  in  $M_1$ , dass  $M_2 = \emptyset$  und somit  $I_{k,2} = 0$ . Falls andererseits  $M_2 \neq \emptyset$ , ist wegen  $\Theta^T(\theta) \Theta'(\theta) = 0$  für  $\theta \in M_2$  die Ungleichung

$$\left| (2\pi \mathbf{y} - \gamma(x))^T \Theta'(\theta) \right| \geq c(\varepsilon_0) \quad (4.39)$$

erfüllt. Das Integral  $I_{k,2}$  können wir erneut mit dem Satz von Fubini umsortieren und schreiben als

$$I_{k,2} = 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{a_k}^{a_{k+1}} K(x, \rho) \rho^{-m} dx d\rho$$

mit

$$K(x, \rho) := \int_{M_2} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta) (2\pi \mathbf{y} - \gamma(x))} \Theta^T(\theta) \beta(x) d\theta.$$

Die Kurve aus Definition 1.2 ist von der Form  $\gamma(x) = r(x)(\cos x, \sin x)^T$ , weshalb

$$|\gamma'(x)|_2 = \sqrt{(r'(x) \cos x - r(x) \sin x)^2 + (r'(x) \sin x + r(x) \cos x)^2} = \sqrt{r(x)^2 + r'(x)^2}$$

und

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \mathbf{n}(\gamma(x)) |\gamma'(x)|_2 \\ &= (r(x) \cos x + r'(x) \sin x, r(x) \sin x - r'(x) \cos x)^T \sqrt{r(x)^2 + r'(x)^2} \end{aligned}$$

folgt. Damit erhalten wir

$$\Theta^T(\theta) \beta(x) = (r(x) \cos(\theta - x) + r'(x) \sin(\theta - x)) \sqrt{r(x)^2 + r'(x)^2}$$

und es ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} [\Theta^T(\theta) \beta(x)] \right| \leq C_5$$

und somit erneut mit der Leibniz-Produktregel und [Lemma 3.10](#)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \theta^{2q}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x) \right] \right| &\leq \sum_{s=0}^{2q} \binom{2q}{s} \left| \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \right] \right| \\ &\quad \times \left| \frac{\partial^{2q-s}}{\partial \theta^{2q-s}} \left[ p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x) \right] \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^{2q} \binom{2q}{s} C_6(s, m, p) 2^{js/2} \\ &\leq C_7(q, m, p) 2^{jq}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Da  $\theta \in M_2$ , erhalten wir zusammen mit [\(4.39\)](#) und [\(4.40\)](#) für das Integral  $K(x, \theta)$  mit  $2q$ -facher partieller Integration bezüglich der Variablen  $\theta$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|K(x, \rho)| \\ &\leq \int_{M_2} \left| 2^j \rho (2\pi \mathbf{y} - \gamma(x))^T \Theta'(\theta) \right|^{-2q} \left| \frac{\partial^{2q}}{\partial \theta^{2q}} \left[ \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x) \right] \right| d\theta \\ &\leq C_8(q, m, p, \varepsilon_0) 2^{-j(q+1/2)} \end{aligned}$$

und wir können diese ähnlich zum vorherigen Fall nutzen, um

$$|I_{k,2}| \leq 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{a_k}^{a_{k+1}} |K(x, \rho)| |\rho^{-m}| dx d\rho \leq C_9(q, m, p, \varepsilon_0) 2^{-j(q+m-1/2)}$$

zu zeigen, womit der Beweis vollständig ist.  $\square$

Es bezeichne  $\mathcal{M}^{(h)} \subset \{0, \dots, M-1\}$  die Menge aller Indizes, sodass die Kurve  $\gamma(x)$  für  $x \in [a_k, a_{k+1})$  mit  $k \in \mathcal{M}^{(h)}$  horizontal ist und  $\mathcal{M}^{(v)} \subset \{0, \dots, M-1\}$  die Menge aller Indizes, sodass die Kurve  $\gamma(x)$  für  $x \in [a_k, a_{k+1})$  mit  $k \in \mathcal{M}^{(v)}$  vertikal ist. Offensichtlich gilt  $\mathcal{M}^{(h)} \cup \mathcal{M}^{(v)} = \{0, \dots, M-1\}$ .

Das folgende Lemma besagt, dass die Integrale  $I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$  vernachlässigbar klein werden, falls sich die Ausrichtung des Trägers der Funktion  $\Psi_{j,\ell}^{(i)}$  und die Normalenrichtung des Randes  $\partial T$  unterscheiden. Anders ausgedrückt, lässt sich im Beweis der unteren Schranke im nächsten Abschnitt mit [Lemma 4.11](#), genannt Orientierungslemma, zeigen, dass die Shearlet-Koeffizienten vernachlässigbar klein werden, falls horizontale Shearlets dicht an horizontalen Kanten liegen beziehungsweise vertikale Shearlets dicht an vertikalen Kanten liegen. Die Beweisidee des nachstehenden Lemmas orientiert sich an den Ausführungen in [\[31, Abschnitt 3.1\]](#).

**Lemma 4.11.**

Für  $\mathbf{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $q \in \mathbb{N}$  sei  $\Psi^{(\mathbf{i})} \in \mathcal{W}^q$  gegeben. Dann gibt es für jedes  $N \in \mathbb{N}$  eine von  $j, \ell$  und  $\mathbf{y}$  unabhängige Konstante  $C(m, N, p) > 0$ , sodass

$$|I_k^{(\mathbf{i})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)| \leq C(M, N, p) 2^{-j(N+m-1/2)}$$

für alle  $k \in \mathcal{M}^{(\mathbf{i})}$  erfüllt ist.

*Beweis.* Wir zeigen den Beweis nur für  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$ , da der andere Fall analog verläuft. Da  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$ , ist  $\gamma(x) = (x, t_k(x))^T$  für  $x \in [a_k, a_{k+1})$  mit  $k \in \mathcal{M}^{(\mathfrak{h})}$  eine horizontale Kurve. Deshalb ist der äußere Normalenvektor gegeben durch  $\mathbf{n}(\gamma(x)) = (t'_k(x), -1)^T$ . Ähnlich zum Beweis des vorherigen Lemmas gilt mit [Lemma 3.7](#) und der Substitution  $\rho = 2^j \rho'$

$$\begin{aligned} I_k &= 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})}}^{2 \theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} (2^j \rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \rho^{-m} e^{i2^j \rho \Theta^T(\theta)(2\pi \mathbf{y} - \gamma(x))} \\ &\quad \times \Theta^T(\theta) \beta(x) dx d\theta d\rho \\ &= 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})}}^{2 \theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})}} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} (2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{2\pi \mathbf{y} i 2^j \rho \Theta^T(\theta)} L(\rho, \theta) d\theta d\rho \end{aligned} \quad (4.41)$$

mit

$$L(\rho, \theta) := \int_{a_k}^{a_{k+1}} p_\theta^m((x, t_k(x))) e^{-i2^j \rho \Theta^T(\theta)(x, t_k(x))^T} \Theta^T(\theta) \beta(x) dx.$$

Durch die Annahme an horizontale Kurven im Fall  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$  haben wir  $|t'_k(x)| < 1$  und die Eigenschaften des Trägers der Funktion  $\Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}$  aus [Lemma 3.7](#) implizieren

$$|\theta| \leq \theta_{j,2^{j/2}+2}^{(\mathfrak{h})} = \arctan\left(1 + 2^{1-j/2}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \delta(j)$$

für ein kleines  $\delta(j) > 0$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta(j) \rightarrow 0$ . Damit lässt sich

$$\left| \Theta(\theta)^T (1, t'_k(x))^T \right| = |\cos \theta + t'_k(x) \sin \theta| \geq |\cos \theta| (1 - |t'_k(x) \tan \theta|) \geq C \quad (4.42)$$

folgern. Die  $N$ -fache partielle Integration bezüglich der Variablen  $x$  liefert mit [\(4.42\)](#) die Abschätzung

$$|L(\rho, \theta)| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| 2^j \rho \Theta(\theta)^T (1, t'_k(x))^T \right|^{-N} \frac{\partial^N}{\partial x^N} [p_\theta^m(\gamma(x)) \Theta^T(\theta) \beta(x)] dx \leq C_1(m, N, p) 2^{-jN}$$

und damit wegen Lemma 3.8 schließlich

$$|I_k| \leq 2^{-j(m-1)} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})}}^2 \int_{\theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})}} \left| \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} (2^j \rho \Theta(\theta)) \right| |\rho|^{-m} |L(\rho, \theta)| d\theta d\rho \leq C_2(m, N, p) 2^{-j(N+m-1/2)}.$$

□

Das nachstehende Lemma liefert die Grundlage dafür, sich im Beweis von Theorem 4.1 zunächst auf die Betrachtung der Shearlet-Koeffizienten von Polynomen zurückziehen zu können. In ähnlicher Form wurde dieses Lemma bereits in [29, Lemma 4.3] betrachtet.

**Lemma 4.12.**

Es sei  $\mathfrak{f} = f \chi_T \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$  und  $T_u f(\mathbf{x}; 2\pi\mathbf{y})$  die zweidimensionale Taylor-Approximation vom Grad  $u$  an die Funktion  $f$  an der Stelle  $2\pi\mathbf{y}$  sowie  $P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := T_u f(\mathbf{x}; 2\pi\mathbf{y}) \chi_T(\mathbf{x})$ . Zudem sei eine Fensterfunktion  $\Psi^{(\mathfrak{i})} \in \mathcal{W}^{2q}$  für  $\mathfrak{i} \in \{\mathfrak{h}, \mathfrak{v}\}$  und  $2q \geq u \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann existiert eine Konstante  $C(q) > 0$ , sodass

$$\left| \left\langle \mathfrak{f}^{2\pi} - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(\mathfrak{i})} \right\rangle_2 \right| \leq C(\mathfrak{f}, q) 2^{-j(u-1)/4}.$$

*Beweis.* Wir zeigen den Beweis nur für den Fall  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h}$  und erhalten mit  $\delta = 2^{-j/4}$

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathfrak{f}^{2\pi} - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(\mathfrak{h})} \right\rangle_2 \right| &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}) \chi_T(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x}) - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &= \left( \int_{B_\delta(2\pi\mathbf{y})} + \int_{B_\delta^c(2\pi\mathbf{y})} \right) \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x}) \chi_T(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x}) - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &=: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

Mit der Approximationseigenschaft (1.12) von Taylor-Polynomen  $u$ -ter Ordnung folgt

$$|f(\mathbf{x}) - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x})| \leq C(\mathfrak{f}) 2^{-j(u+1)/4}$$

für  $\mathbf{x} \in B_\delta(2\pi\mathbf{y})$ . Theorem 3.12 impliziert  $|\psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(\mathfrak{h})}(\mathbf{x})| \leq C(q) 2^{3j/4}$ , weshalb das Integral  $\mathcal{I}_1$  abgeschätzt werden kann durch

$$|\mathcal{I}_1| \leq C(q) 2^{3j/4} \int_{B_\delta(2\pi\mathbf{y}) \cap T} |f(\mathbf{x}) - P_{u,\mathfrak{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq C(\mathfrak{f}, q) 2^{-j((u+2)/4-3/4)} = C(\mathfrak{f}, q) 2^{-j(u-1)/4}.$$

Wir nutzen erneut [Theorem 3.12](#), in diesem Fall jedoch für den zweiten Term im Minimum und erhalten durch die Substitution des Integrals  $\mathcal{I}_2$  in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{I}_2| &\leq C(q) 2^{3j/4} \int_{B_8^c(2\pi\mathbf{y}) \cap T} \left(2^j |2\pi\mathbf{y} - \mathbf{x}|_2^2\right)^{-q} d\mathbf{x} \\
 &\leq C(q) 2^{-j(q-3/4)} \int_0^{2\pi} \int_{2^{-j/4}}^{\infty} \rho^{1-2q} d\rho d\theta \\
 &= C_2(q) 2^{-j(q-3/4)} \left[ \frac{\rho^{2(1-q)}}{2(1-q)} \right]_{2^{-j/4}}^{\infty} \\
 &\leq C_3(q) 2^{-j(q-3/4)} 2^{-j(1-q)/2} \\
 &= C_3(q) 2^{-j(2q-1)/4},
 \end{aligned}$$

weshalb das Lemma für  $2q \geq u$  bewiesen ist.  $\square$

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von [[62](#), Proposition 8.3] und wird Methode der stationären Phase genannt.

**Lemma 4.13.**

Es seien  $\phi, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hinreichend glatte Funktionen mit  $\phi'(t_0) = 0$  und  $\phi''(t_0) \neq 0$ . Falls  $\varphi$  seinen Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $t_0 \in \mathbb{R}$  hat, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\Lambda\phi(t)} \varphi(t) dt = \left( \frac{2\pi i}{|\phi''(t_0)|} \right)^{1/2} \varphi(t_0) \Lambda^{-1/2} + O(\Lambda^{-1})$$

für  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Wir definieren die Integrale

$$a(\lambda, p, A) := \int_0^{\infty} \left( g\left(2\sqrt{A\lambda}v + p\lambda\right) + g\left(2\sqrt{A\lambda}v - p\lambda\right) \right) \frac{\cos v}{\sqrt{v}} dv, \quad (4.43)$$

$$b(\lambda, p, A) := \int_0^{\infty} \left( g\left(2\sqrt{A\lambda}v + p\lambda\right) + g\left(2\sqrt{A\lambda}v - p\lambda\right) \right) \frac{\sin v}{\sqrt{v}} dv \quad (4.44)$$

und zeigen ein Lemma, welches die Abschätzungen der Fresnel-Integrale aus [Lemma 1.19](#) nutzt.

**Lemma 4.14.**

Für  $\lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ ,  $p \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  und  $A > 0$  gelten  $a(\lambda, p, A) > 0$  und  $b(\lambda, p, A) > 0$  sowie mindestens eine der Abschätzungen

$$a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A) > 0$$

oder

$$a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) > (1 + \sqrt{2}) |a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A)|.$$

*Beweis.* Es genügt den Fall  $p \in [0, \frac{1}{4}]$  zu betrachten, da  $a(\lambda, p, A)$  und  $b(\lambda, p, A)$  symmetrisch in der Variablen  $p$  sind. Wir betrachten Funktionen  $h^\pm : [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \times [0, \frac{1}{4}] \times (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche definiert sind durch

$$h^\pm(\lambda, p, A, v) := 2\sqrt{A\lambda v} \pm p\lambda.$$

Die Funktionen  $h^\pm$  sind monoton wachsend in der Variablen  $v \geq 0$  und für feste Parameter  $(\lambda, p, A) \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \times [0, \frac{1}{4}] \times (0, \infty)$  gilt

$$-\frac{1}{3} \leq -p\lambda = h^-(\lambda, p, A, 0) \leq h^+(\lambda, p, A, 0) = p\lambda \leq \frac{1}{3}. \quad (4.45)$$

Wegen (4.45) folgt aus der Monotonie-Eigenschaft zulässiger Funktionen in (3.3), dass die Funktionen  $g(h^+(\lambda, p, A, v))$  und  $g(h^-(\lambda, p, A, v))$  und deshalb auch ihre Summe monoton fallend in der Variablen  $v$  sind. Zusätzlich gilt

$$h^+(\lambda, p, A, v) \geq h^-(\lambda, p, A, v) \geq \frac{2}{3}, \quad \text{falls} \quad v \geq \frac{p}{3A} + \frac{1}{9A\lambda} + \frac{p^2\lambda}{4A} =: r(\lambda, p, A) > 0,$$

woraus

$$\left( g(h^+(\lambda, p, A, v)) + g(h^-(\lambda, p, A, v)) \right) = 0$$

für  $v \geq r(\lambda, p, A)$  folgt. Darüber hinaus impliziert (4.45)

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g(h^+(\lambda, p, A, v)) + g(h^-(\lambda, p, A, v)) = 2,$$

weshalb wir den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung nutzen können, um zu folgern, dass ein  $x \in (0, r(\lambda, p, A)]$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} a(\lambda, p, A) \pm b(\lambda, p, A) &= \int_0^{r(\lambda, p, A)} \left( g(2\sqrt{A\lambda v} + p\lambda) + g(2\sqrt{A\lambda v} - p\lambda) \right) \frac{\cos v \pm \sin v}{\sqrt{v}} dv \\ &= 2 \int_0^x \frac{\cos v \pm \sin v}{\sqrt{v}} dv \\ &= 2 F^\pm(x). \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas folgt mit Lemma 1.19. □

Zum Ende dieses Abschnitts definieren wir zwei weitere Integrale

$$\begin{aligned} Q_1(D, p, A) &:= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} \left( \left[ a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) \right] \cos(D\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \left[ a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A) \right] \sin(D\lambda) \right) d\lambda, \end{aligned}$$

$$Q_2(D, p, A) := \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} \left( \left[ a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) \right] \sin(D\lambda) - \left[ a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A) \right] \cos(D\lambda) \right) d\lambda$$

und können das folgende Lemma angeben.

**Lemma 4.15.**

Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , sodass für alle  $|D| \leq \frac{3\pi}{4}$ ,  $|p| \leq \frac{1}{4}$  und  $A > 0$  mindestens eine der Ungleichungen

$$|Q_1(D, p, A)| \geq C \quad \text{oder} \quad |Q_2(D, p, A)| \geq C \quad (4.46)$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Wir definieren

$$\begin{aligned} Q^+(D, p, A) &:= Q_1(D, p, A) + Q_2(D, p, A) \\ &= 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} \left[ a(\lambda, p, A) \sin(D\lambda) + b(\lambda, p, A) \cos(D\lambda) \right] d\lambda \end{aligned}$$

und wählen die Variablen  $p \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  und  $A > 0$  beliebig und fest. Darüber hinaus sei  $D \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ , da der Beweis für negative Werte von  $D$  ähnlich verläuft. Wir betrachten den Parameter  $D$  auf verschiedenen Intervallen und zeigen, dass eine Konstante  $C > 0$  existiert, sodass mindestens eine der Aussagen aus (4.46) oder äquivalent ausgedrückt  $|Q^+(D, p, A)| \geq C$  erfüllt ist.

i) Es sei  $D = 0$ :

Nach Lemma 3.1 ist  $\tilde{g}(\lambda) > 0$  für  $\lambda \in \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$  und somit  $\tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} > 0$ . Lemma 4.14 impliziert  $a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) > 0$  für  $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$ , weshalb

$$Q_1(0, p, A) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} \left[ a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) \right] d\lambda > 0$$

folgt.

ii) Es sei  $D \in \left(0, \frac{3\pi}{8}\right]$ :

In diesem Fall ist  $D\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , also  $\sin(D\lambda) > 0$  und  $\cos(D\lambda) > 0$ , was mit den Eigenschaften  $a(\lambda, p, A) > 0$  und  $b(\lambda, p, A) > 0$  aus Lemma 4.14 zu  $Q^+(D, p, A) > 0$  führt.

iii) Es sei  $D \in (\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ :

Wir teilen wir die auftretenden Integrale in

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \left( \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2D}} + \int_{\frac{\pi}{2D}}^{\frac{\pi}{D}} + \int_{\frac{\pi}{D}}^{\frac{4}{3}} \right)$$

auf und schreiben für die Integrale  $Q_2(D, p, A)$  und  $Q^+(D, p, A)$  dementsprechend

$$\begin{aligned} Q_2(D, p, A) &= Q_{21}(D, p, A) + Q_{22}(D, p, A) + Q_{23}(D, p, A), \\ Q^+(D, p, A) &= Q_1^+(D, p, A) + Q_2^+(D, p, A) + Q_3^+(D, p, A). \end{aligned}$$

Da  $\frac{4}{3} \leq \frac{\pi}{D}$  für  $D \in (\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$  und  $\text{supp } \tilde{g} = [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ , folgt  $Q_{23}(D, p, A) = Q_3^+(D, p, A) = 0$ . Wir unterscheiden zwei weitere Unterfälle.

a) Wir nehmen  $a(\lambda, p, A) > b(\lambda, p, A) > 0$  an (siehe erster Fall von [Lemma 4.14](#)):

Damit gilt  $D\lambda \in (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2})$  im Integral  $Q_1^+$ , also  $\sin(D\lambda) > 0$  und  $\cos(D\lambda) > 0$ . Dies führt wieder mit [Lemma 4.14](#) direkt zu  $Q_1^+(D, p, A) > 0$ .

In  $Q_2^+$  gilt  $D\lambda \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , was  $\cos(D\lambda) < 0$  und  $\sin(D\lambda) > 0$  impliziert und die Abschätzung

$$\begin{aligned} Q_2^+(D, p, A) &> \int_{\frac{\pi}{2D}}^{\frac{\pi}{D}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} a(\lambda, p, A) (\cos(D\lambda) + \sin(D\lambda)) d\lambda \\ &= \int_{\frac{\pi}{2D}}^{\frac{\pi}{D}} \hat{h}(\lambda, p, A) (\cos(D\lambda) + \sin(D\lambda)) d\lambda \end{aligned} \quad (4.47)$$

ermöglicht, wobei  $\hat{h}(\lambda, p, A) := \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} a(\lambda, p, A)$ . Wir bezeichnen das Integral in (4.47) mit  $\tilde{Q}_2^+(D, p, A)$ . Die Funktion  $\hat{h}(\lambda, p, A)$  ist monoton fallend für  $\lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ . Unter Verwendung der Substitution  $t = D\lambda - \frac{3\pi}{4}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2^+(D, p, A) &= -\frac{\sqrt{2}}{D} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \hat{h}\left(\frac{3\pi + 4t}{4D}, p, A\right) \sin t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{D} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \hat{h}\left(\frac{3\pi - 4t}{4D}, p, A\right) - \hat{h}\left(\frac{3\pi + 4t}{4D}, p, A\right) \right] \sin t dt \\ &> 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

wobei wir die Monotonie der Funktion  $\hat{h}$  bezüglich der ersten Variablen genutzt haben, um die letzte Ungleichung zu zeigen. Insgesamt haben wir für  $D \in (\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$  und  $a(\lambda, p, A) > b(\lambda, p, A) > 0$  die Ungleichungen  $Q_1^+(D, p, A) > 0$ ,  $Q_2^+(D, p, A) > 0$  und  $Q_3^+(D, p, A) = 0$  gezeigt, welche zu  $Q^+(D, p, A) > 0$  im Fall  $a(\lambda, p, A) > b(\lambda, p, A) > 0$  führen.

#### 4.5 Beweis von Theorem 4.2

b) Wir nehmen  $a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) > (1 + \sqrt{2}) |a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A)|$  an (siehe zweiter Fall von Lemma 4.14):

In  $Q_{21}$  gilt  $D\lambda \in (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2})$ , also  $(1 + \sqrt{2}) \sin(D\lambda) > \cos(D\lambda) > 0$ , was die Abschätzung

$$\begin{aligned} Q_{21}(D, p, A) &> \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2D}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} |a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A)| \left( (1 + \sqrt{2}) \sin(D\lambda) - \cos(D\lambda) \right) d\lambda \\ &> 0 \end{aligned}$$

ermöglicht. Um das Integral  $Q_{22}$  abzuschätzen, nutzen wir genau die gleichen Argumente wie in (4.47) und (4.48), jedoch mit der Funktion  $\tilde{h}(\lambda, p, A) := \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} (a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A))$  anstatt  $\hat{h}$ , was  $Q_{22}(D, p, A) > 0$  und insgesamt  $Q_2(D, p, A) > 0$  nach sich zieht und den Beweis vollendet.  $\square$

#### 4.5 Beweis von Theorem 4.2

Es seien eine Menge  $T \in \text{STAR}^2(\tau)$  und  $\mathfrak{f} = f \chi_T \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$  gegeben. Ferner sei  $p := p_u := T_u f(\mathbf{x}; 2\pi\mathbf{y})$  die zweidimensionale Taylor-Approximation vom Grad  $u$  an die Funktion  $f$ , entwickelt an der Stelle  $2\pi\mathbf{y}$ . Ausgehend davon betrachten wir Funktionen  $P_u = p \chi_T$  und bezeichnen gemäß Definition 1.11 ihre  $2\pi$ -Periodisierung mit  $P_u^{2\pi}$ .

Im ersten Teil des Beweises zeigen wir die untere Schranke des Theorems für Funktionen  $P_u^{2\pi}$ , also

$$\left| \left\langle P_u^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \geq C(u, n, q, \varepsilon_0, T) 2^{-j(3/4+n)}. \quad (4.49)$$

Wie in (4.20) folgt mit der Parseval-Gleichung und der Poisson-Summationsformel

$$\left\langle P_u^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 = 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right) = 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} S(\mathbf{n}), \quad (4.50)$$

wobei

$$S(\mathbf{n}) := \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right).$$

i)

Wir zeigen zunächst

$$2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S(\mathbf{n})| \leq C(u, n, q) 2^{-j(q+n+1/4)}. \quad (4.51)$$

Ähnlich zum Beweis von Theorem 4.1 verwenden wir dazu die Zerlegung der Funktion  $P_u$  auf dyadischen Quadraten  $Q \in \mathcal{Q}_j$ , sodass

$$P_u = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} P_{u,Q} + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} P_{u,Q}$$

mit  $P_{u,Q} := P_u \phi_Q$ . Mit analogen Rechnungen, die zu (4.24) geführt haben, erhalten wir

$$2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_{u,Q}] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right) \right| \leq C(q) 2^{-jq} \left\| L^q \left[ \mathcal{F}[P_{u,Q}] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2}.$$

Mit der Linearität der Fourier-Transformation und der Abschätzung der absolut konvergenten Reihe in der letzten Zeile folgt

$$\begin{aligned} 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S(\mathbf{n})| &\leq 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left( \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \right) \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_{u,Q}] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right) \right| \\ &= \left( \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \right) 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_{u,Q}] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \left( 2\pi(\mathbf{y} + \mathbf{n}) \right) \right| \\ &\leq C(q) 2^{-jq} \left( \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^0} + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^1} \right) \left\| L^q \left[ \mathcal{F}[P_{u,Q}] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] \right\|_{\text{supp } \Psi_{j,\ell}^{(i)}, 2}. \end{aligned}$$

Als nächstes nutzen wir Lemma 4.9 und die Abschätzungen aus (4.19) und erhalten schließlich (4.51), denn

$$\begin{aligned} 2^{-3j/4} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S(\mathbf{n})| &\leq C(q) 2^{-jq} \left( C_1(u, q) 2^j 2^{-j(q+u+3/2)} + C_2(n, q) 2^{j/2} 2^{-j(3/4+n)} \right) \\ &\leq C_3(u, n, q) 2^{-j(q+n+1/4)}. \end{aligned}$$

ii)

Als nächstes zeigen wir, dass eine Konstante  $C_2(n, q, \varepsilon_0, T) > 0$  existiert, sodass

$$|S(\mathbf{0})| \geq C_2(n, q, \varepsilon_0, T) 2^{-jn}. \quad (4.52)$$

Angenommen, die Ungleichung gelte. Dann kann in (4.50) mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und hinreichend großem  $q \in \mathbb{N}$  auf

$$\left| \left\langle P_u^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \geq 2^{-3j/4} \left( |S(\mathbf{0})| - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} |S(\mathbf{n})| \right) \geq C_3(u, n, q, \varepsilon_0, T) 2^{-j(3/4+n)}$$

und somit (4.49) geschlossen werden.

In (4.34) ist die Darstellung des Terms aus (4.52) in Polarkoordinaten gegeben durch

$$S(\mathbf{0}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(i)} \right] (2\pi\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^u C_m \sum_{k=0}^{M-1} I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m),$$

wobei

$$\begin{aligned}
 I_k^{(i)}(j, \ell, \mathbf{y}, m) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(\rho \Theta(\theta)) p_\theta^m(\gamma(x)) \rho^{-m} e^{i\rho \Theta^\top(\theta)(2\pi\mathbf{y}-\gamma(x))} \\
 &\quad \times \Theta^\top(\theta) \beta(x) dx d\theta d\rho \\
 &= 2^{-j(m-1)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Psi_{j,\ell}^{(i)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{2\pi i 2^j \rho \Theta^\top(\theta) \mathbf{y}} L_k(\rho, \theta, m) d\theta d\rho \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

mit

$$L_k(\rho, \theta, m) := \int_{a_k}^{a_{k+1}} p_\theta^m(\gamma(x)) e^{-i2^j \rho \Theta^\top(\theta) \gamma(x)} \Theta^\top(\theta) \beta(x) dx. \quad (4.54)$$

Wir betrachten erneut nur  $\mathbf{i} = \mathfrak{h}$ , da der Fall  $\mathbf{i} = \mathfrak{v}$  ähnlich verläuft. Zunächst nutzen wir [Lemma 4.11](#) und die umgekehrte Dreiecksungleichung, um

$$\left| \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[P_u] \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})} \right] (2\pi\mathbf{y}) \right| \geq \left| \sum_{m=0}^u C_m \sum_{k \in \mathcal{M}^{(\mathfrak{v})}} I_k^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) \right| - |\mathcal{M}^{(\mathfrak{h})}| C_4(m, N, p) 2^{-j(N+m-1/2)}$$

zu zeigen, wobei der letzte Term für hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$  vernachlässigbar klein wird. Da die Menge aus [\(4.7\)](#) nach Voraussetzung nicht leer ist, existiert ein Index  $k^* = k^*(\mathbf{y})$  mit  $0 \leq k^* \leq M-1$ , sodass die Menge  $U_\varepsilon(\mathbf{y})$  durch eine vertikale Kurve  $\gamma(x) = (t_{k^*}(x), x)^\top$  für  $x \in [a_{k^*}, a_{k^*+1})$  beschrieben wird. Deshalb kann der vorherige Ausdruck mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und [Lemma 4.10](#) nach oben abgeschätzt werden durch

$$\left| \sum_{m=0}^u C_m \sum_{k \in \mathcal{M}^{(\mathfrak{v})}} I_k^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) \right| \geq \left| \sum_{m=0}^u C_m I_{k^*}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) \right| - C_5(m, q, p, \varepsilon_0) 2^{-j(q+m-1/2)}.$$

Aus den vorherigen Überlegungen folgt, dass die Abschätzung [\(4.52\)](#) äquivalent dazu ist, eine Konstante  $C_6(n, T) > 0$  zu finden, sodass

$$\left| \sum_{m=0}^u C_m I_{k^*}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) \right| \geq C_6(n, T) 2^{-jn}. \quad (4.55)$$

Für  $k = k^*$  teilen wir das Integral  $I_{k^*}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$  aus [\(4.53\)](#) weiter auf in

$$\begin{aligned}
 I_{k^*}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) &= 2^{-j(m-1)} \int_0^\infty \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{2\pi i 2^j \rho \Theta^\top(\theta) \mathbf{y}} \\
 &\quad \times L_{k^*}(\rho, \theta, m) d\theta d\rho \\
 &=: I_{k^*,1}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) + I_{k^*,2}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m).
 \end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersicht verzichten wir im Folgenden auf die Angabe der Argumente in den immer wieder auftretenden Integralen und schreiben kurz  $I_1 := I_{k^*,1}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$  und  $I_2 := I_{k^*,2}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m)$ . Im Integral  $I_2$  nutzen wir die Substitution  $\theta = \tau + \pi$ . Die zulässigen Funktionen  $g$  und  $\tilde{g}$  sind wegen [Definition 2.1](#) beziehungsweise [Lemma 3.1](#) gerade Funktionen, was mit der Darstellung von [\(3.22\)](#) in Polarkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\tau + \pi)) &= \tilde{g}(\rho \cos(\tau + \pi)) g\left(\rho \cos(\tau + \pi)(2^{j/2} \tan(\tau + \pi) - \ell)\right) \\ &= \tilde{g}(\rho \cos \tau) g\left(\rho \cos \tau(2^{j/2} \tan \tau - \ell)\right) \\ &= \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\tau)) \end{aligned}$$

führt. Zusammen mit  $\Theta(\tau + \pi) = -\Theta(\tau)$  ergibt sich die Umformung

$$\begin{aligned} I_2 &= 2^{-j(m-1)} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\tau + \pi)) \rho^{-m} e^{2\pi i 2^j \rho \Theta^T(\tau + \pi) \mathbf{y}} L_{k^*}(\rho, \tau + \pi) d\tau d\rho \\ &= -2^{-j(m-1)} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-m} e^{-2\pi i 2^j \rho \Theta^T(\theta) \mathbf{y}} \overline{L_{k^*}(\rho, \theta)} d\theta d\rho. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Deshalb ist  $I_2 = -\overline{I_1}$  und somit  $I_{k^*}^{(\mathfrak{h})}(j, \ell, \mathbf{y}, m) = 2i \operatorname{Im}(I_1) = 2i \operatorname{Im}(I_2)$ .

Da die vertikale Kurve  $\gamma(x)$  für  $x \in [a_{k^*}, a_{k^*+1})$  durch  $(t_{k^*}(x), x)^T$  parametrisiert wird, gilt für  $\mathbf{x}_0 = (t_{k^*}(x_0), x_0)^T \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$ , dass  $x_0 \in [a_{k^*}, a_{k^*+1})$  und deshalb  $|x - x_0| < \varepsilon = \varepsilon_0 2^{j/2}$ . Wir schreiben die Funktion  $t_{k^*}(x)$  lokal als

$$t_{k^*}(x) = t_{k^*}(x_0) + B(x - x_0) + A(x - x_0)^2 + r(x - x_0)$$

mit  $r(x - x_0) = \mathcal{O}((x - x_0)^3)$ , wobei im Fall  $\mathfrak{i} = \mathfrak{h}$  für vertikale Kurven  $B = t'_{k^*}(x_0) \in [-1, 1]$  gilt. Wir unterscheiden im Folgenden verschiedene Fälle für  $A = \frac{1}{2} t''_{k^*}(x_0)$ .

a)

Wir nehmen zunächst  $A > 0$  an. Der Beweis für  $A < 0$  verläuft ähnlich und wird hier nicht betrachtet. Analog zu dem Vorgehen in [\[31, Abschnitt 3.2\]](#) führen wir einen Variablenwechsel  $v = x - x_0$  durch und schreiben  $\tilde{a}_{k^*} := a_{k^*} - x_0$ , um im Integral [\(4.54\)](#)

$$L_{k^*}(\rho, \theta, n) = \int_{\tilde{a}_{k^*}}^{\tilde{a}_{k^*+1}} e^{-i2^j \rho \Theta^T(\theta)(t_{k^*}(x_0) + Bv + Av^2 + \mathcal{O}(v^3), v + x_0)^T} p_\theta^n(\gamma(v + x_0)) \Theta^T(\theta) \beta(v + x_0) dv$$

zu erhalten. Wie bereits in [\(4.36\)](#) bemerkt, gilt wegen [Lemma 3.7](#)

$$\operatorname{supp} \Psi_{j,\ell}^{(\mathfrak{h})}(2^j \rho \Theta(\theta)) \subset \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \frac{1}{3} < |\rho| < 2, \theta_{j,\ell-2}^{(\mathfrak{h})} < \theta < \theta_{j,\ell+2}^{(\mathfrak{h})} \right\}.$$

Nach der Voraussetzung des Theorems über die Richtungsableitungen höherer Ordnung haben wir

$$p_\theta^m(\gamma(x)) \begin{cases} = 0, & \text{falls } 0 \leq m < n, \\ \neq 0, & \text{falls } m = n, \end{cases}$$

für  $\theta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(i)}, \theta_{j,\ell+2}^{(i)})$ , weshalb  $I_{k^*}(j, \ell, \mathbf{y}, m) = 0$  für  $0 \leq m < n$  oder  $p_\theta^0(\gamma(x)) = p(\gamma(x)) \neq 0$  für  $n = 0$ . Wir betrachten im Folgenden nur noch das Integral  $I_{k^*}(j, \ell, \mathbf{y}, n)$ , da die Integrale  $I_{k^*}(j, \ell, \mathbf{y}, m_1)$  mit  $n < m_1 \leq u$  ein schnelleres Abklingverhalten liefern, wie der weitere Verlauf des Beweises zeigen wird.

Für das Integral  $I_1 = I_{k^*,1}^{(h)}(j, \ell, \mathbf{y}, n)$  haben wir die Darstellung

$$I_1 = 2^{-j(n-1)} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(h)}}^2 \int_{\theta_{j,\ell+2}^{(h)}} \int_{\tilde{a}_{k^*}}^{\tilde{a}_{k^*+1}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-n} e^{i2^j \rho R(v,\theta)} \varphi(v, \theta) dv d\theta d\rho \quad (4.57)$$

mit  $\Lambda := 2^j \rho$ ,  $\varphi(v, \theta) := p_\theta^n(\gamma(v + x_0)) \Theta^T(\theta) \beta(v + x_0)$  und

$$\begin{aligned} R(v, \theta) &:= -\Theta^T(\theta) (Av^2 + Bv + t_{k^*}(x_0) + r(v) - 2\pi y_1, v + x_0 - 2\pi y_2)^T \\ &= -\cos \theta (Av^2 + (B + \tan \theta)v + t_{k^*}(x_0) + r(v) - 2\pi y_1 + (x_0 - 2\pi y_2) \tan \theta) \\ &= -\cos \theta \left( A \left( v + \frac{B + \tan \theta}{2A} \right)^2 + \tilde{C} - 2\pi y_1 - \frac{(B + \tan \theta)^2}{4A} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

sowie  $\tilde{C} := t_{k^*}(x_0) + (x_0 - 2\pi y_2) \tan \theta + r(v)$ . Es gilt  $|v| < \varepsilon = \varepsilon_0 2^{-j/2}$ , weshalb die Funktion  $r(v)$  die Abschätzung  $|r(v)| < C_1 \varepsilon^3 \leq C_2(\varepsilon_0) 2^{-3j/2}$  erfüllt. Es gilt

$$\frac{\partial R}{\partial v}(v, \theta) = -2A \cos \theta \left( v + \frac{B + \tan \theta}{2A} \right)^2$$

und deshalb  $\frac{\partial R}{\partial v}(v, \theta) = 0$  für  $v_\theta = -\frac{B + \tan \theta}{2A}$ . Wir definieren  $\phi(v, \theta) := R(v, \theta) - R(v_\theta, \theta)$ , weshalb

$$\phi(v_\theta, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(v_\theta, \theta) = 0, \quad \frac{\partial \phi^2}{\partial v^2}(v_\theta, \theta) = \frac{\partial R^2}{\partial v^2}(v_\theta, \theta) = -2A \cos \theta \neq 0,$$

da  $\cos \theta > 0$  für  $\theta \in (\theta_{j,\ell-2}^{(h)}, \theta_{j,\ell+2}^{(h)})$ . Damit können wir das Integral  $I_1$  als

$$I_1 = 2^{-j(n-1)} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(h)}}^2 \int_{\theta_{j,\ell+2}^{(h)}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-n} e^{i2^j \rho R(v,\theta)} \left( \int_{\tilde{a}_{k^*}}^{\tilde{a}_{k^*+1}} e^{i\Lambda \phi(v,\theta)} \varphi(v, \theta) dv \right) d\theta d\rho \quad (4.59)$$

schreiben. Wir verwenden [Lemma 4.13](#) für  $t_0 = v_\theta$ , wodurch sich das innere Integral der vorherigen Zeile schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{a}_k^*}^{\tilde{a}_k^{*+1}} e^{i\Lambda \phi(v,\theta)} \varphi(v,\theta) dv &= \left( \frac{2\pi i}{\left| \frac{\partial \phi^2}{\partial v^2}(v_\theta, \theta) \right|} \right)^{1/2} \varphi(v_\theta, \theta) \Lambda^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \\ &= C \sqrt{\pi i} (2^j \rho |A \cos \theta|)^{-\frac{1}{2}} \varphi(v_\theta, \theta) + r_2(j), \end{aligned} \quad (4.60)$$

wobei  $|r_2(j)| \leq C_2 2^{-j}$ . Wie in [\[31, S.115\]](#) bemerkt, ist die Konstante  $C_2 > 0$  unabhängig von  $\theta, \rho, j, \ell$  und  $\mathbf{y}$ . Mit [\(4.60\)](#) teilen wir das Integral in [\(4.59\)](#) weiter auf in  $I_1 = I_{11} + I_{12}$ , wobei

$$\begin{aligned} I_{11} &= C 2^{-j(n-1/2)} \sqrt{\frac{\pi i}{A}} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(h)}}^2 \int_{\theta_{j,\ell+2}^{(h)}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-(n+1/2)} e^{i2^j \rho R(v_\theta, \theta)} \\ &\quad \times |\cos \theta|^{-1/2} \varphi(v_\theta, \theta) d\theta d\rho, \\ I_{12} &= C_2 2^{-jn} \int_{\frac{1}{3} \theta_{j,\ell-2}^{(h)}}^2 \int_{\theta_{j,\ell+2}^{(h)}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-n} e^{i2^j \rho R(v_\theta, \theta)} d\theta d\rho. \end{aligned}$$

Wir führen die Substitution  $t = 2^{j/2} \tan \theta - \ell$  in den Integralen  $I_{11}$  und  $I_{12}$  durch. Damit folgt  $d\theta = 2^{-j/2} \cos^2 \theta_t dt$  mit  $\theta_t := \arctan((\ell + t) 2^{-j/2}) = \theta_{j,\ell+t}^{(h)}$ . Wenden wir diese Substitution in der Funktion  $R(v_\theta, \theta)$  aus [\(4.58\)](#) an, so ergibt sich

$$2^j R(v_{\theta_t}, t) = \cos \theta_t \left( \frac{(2^{j/2} B + \ell + t)^2}{4A} - 2^j (\tilde{C} - 2\pi y_1) \right) = \cos \theta_t \left( \frac{(p+t)^2}{4A} + D \right)$$

mit  $p := 2^{j/2} B + \ell$  und  $D := 2^j (2\pi y_1 - \tilde{C})$ . Nach Voraussetzung gibt es  $\mathbf{x}_0 \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$ , sodass  $|p| \leq \frac{1}{4}$  und  $|D| \leq \frac{3\pi}{4}$  gilt.

Wegen [\(4.36\)](#) folgt  $I_{11} = I_{12} = 0$  für  $|t| > 2$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} I_{11} &= C 2^{-jn} \sqrt{\frac{\pi i}{A}} \int_{\frac{1}{3} -2}^2 \int_{-2}^2 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta_t)) \rho^{-(n+1/2)} e^{i\rho \cos \theta_t \left( \frac{(p+t)^2}{4A} + D \right)} \\ &\quad \times |\cos \theta_t|^{3/2} \varphi(v_{\theta_t}, \theta_t) dt d\rho, \\ I_{12} &= C_2 2^{-j(n+1/2)} \int_{\frac{1}{3} -2}^2 \int_{-2}^2 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta_t)) \rho^{-n} e^{i\rho \cos \theta_t \left( \frac{(p+t)^2}{4A} + D \right)} |\cos \theta_t|^2 dt d\rho. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Eine direkte Abschätzung mit der Dreiecksungleichung zeigt  $|I_{12}| \leq C_3 2^{-j(n+1/2)}$ , weshalb wir diesen Term im Folgenden aufgrund des schnelleren Abklingverhaltens vernachlässigen.

Wir greifen einige Ideen aus [31] auf. Mit der Definition der Winkel  $\theta_{j,\ell}^{(h)}$  aus (4.1) gilt

$$\cos \theta_t = \cos \left( \arctan \left( 2^{-j/2}(\ell + t) \right) \right) = \left( 1 + \left( 2^{-j/2}(\ell + t) \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

Fassen wir die rechte Seite als Funktion

$$w(x) = \left( 1 + \left( 2^{-j/2}\ell + x \right)^2 \right)^{-1/2}$$

ausgewertet an der Stelle  $x = 2^{-j/2}t$  auf, so gilt mit der Taylor-Approximation nullter Ordnung

$$h(2^{-j/2}t) = \left( 1 + \left( 2^{-j/2}\ell \right)^2 \right)^{-1/2} + w'(\xi) 2^{-j/2}t$$

mit  $|\xi| \leq |2^{-j/2}t| \leq 2^{-j/2+1}$ , da  $|t| \leq 2$ . Wir erhalten

$$\left| 2^{-j/2}t w'(\xi) \right| \leq 2^{-j/2+1} \frac{|2^{-j/2} + \xi|}{\left( 1 + \left( 2^{-j/2}\ell + \xi \right)^2 \right)^{3/2}} \leq \frac{3 \cdot 2^{-j+1}}{\left( 1 + \left( 2^{-j/2}\ell + \xi \right)^2 \right)^{3/2}},$$

weshalb wir  $\cos \theta_t = \mu_{j,\ell} + r_3(j)$  mit  $r_3(j) = \mathcal{O}(2^{-j})$  schreiben und  $\mu_{j,\ell} := (1 + (2^{-j/2}\ell)^2)^{-1/2}$  die Abschätzung  $2^{-1/2} \leq |\mu_{j,\ell}| \leq 1$  erfüllt. Zusätzlich gilt

$$\sin \theta_t = \sin \left( \arctan \left( 2^{-j/2}(\ell + t) \right) \right) = \frac{2^{-j/2}(\ell + t)}{\left( 1 + \left( 2^{-j/2}(\ell + t) \right)^2 \right)^{1/2}}$$

und durch ähnliche Abschätzungen wie zuvor können wir  $\sin \theta_t = 2^{-j/2}\ell \mu_{j,\ell} + r_4(j)$  mit  $r_4(j) = \mathcal{O}(2^{-j})$  schreiben. Wir vernachlässigen im Folgenden den additiven Term mit schnellerem Abklingverhalten und ersetzen  $\cos \theta_t$  durch  $\mu_{j,\ell}$  und  $\sin \theta_t$  durch  $2^{-j/2}\ell \mu_{j,\ell}$ .

Die Kurve  $\gamma(x)$  wird für  $x \in [a_{k^*}, a_{k^*+1})$  durch  $(t_{k^*}(x), x)^T$  parametrisiert, weshalb

$$\beta(v_{\theta_t} + x_0) = \mathbf{n}(\gamma(v_{\theta_t} + x_0)) |\gamma'(v_{\theta_t} + x_0)|_2 = (-1, t'(v_{\theta_t} + x_0))^T \sqrt{t'(v_{\theta_t} + x_0)^2 + 1}$$

und damit

$$\Theta^T(\theta_t) \beta(v_{\theta_t} + x_0) = \left( \mu_{j,\ell} \left( 2^{-j/2}\ell t'(v_{\theta_t} + x_0) - 1 \right) \right) \sqrt{t'(v_{\theta_t} + x_0)^2 + 1}$$

folgt. Darüber hinaus existiert nach der Annahme an die Richtungsableitung  $n$ -ter Ordnung ein  $\tilde{q}$ , sodass

$$\left| p_{\theta_t}^n(\gamma(v_{\theta_t} + x_0)) - p_{\theta_t}^n(\gamma(\tilde{q})) \right| \leq C 2^{-j/2}$$

und  $p_{\theta_t}^n(\gamma(\tilde{q})) \neq 0$ . Dank der vorherigen Betrachtungen können wir den Term  $\varphi(v_{\theta_t}, \theta_t) = p_{\theta_t}^n(\gamma(v_{\theta_t} + x_0)) \Theta^T(\theta_t) \beta(v_{\theta_t} + x_0)$  in (4.61) durch von Null verschiedene Konstante ersetzen und erhalten

$$I_{11} = C_3 2^{-jn} \mu_{j,\ell}^{3/2} \sqrt{\frac{i}{A}} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{-2}^2 \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta_t)) \rho^{-(n+1/2)} e^{i\rho \mu_{j,\ell} \left( \frac{(p+t)^2}{4A} + D \right)} dt d\rho.$$

Anschließend verwenden wir die Substitution  $\lambda = \rho \mu_{j,\ell}$ , was unter anderem zu

$$\begin{aligned}\Psi_{j,\ell}^{(b)}(2^j \rho \Theta(\theta_t)) &= \tilde{g}(\rho \cos \theta_t) g\left(\rho \cos \theta_t (2^{j/2} \tan \theta_t - \ell)\right) \\ &= \tilde{g}(\rho \mu_{j,\ell}) g(\rho \mu_{j,\ell} t) \\ &= \tilde{g}(\lambda) g(t \lambda)\end{aligned}$$

und damit im Integral  $I_{11}$  zu

$$\begin{aligned}I_{11} &= C_3 2^{-jn} \mu_{j,\ell}^{n+1} \sqrt{\frac{i}{A}} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{-2}^2 \tilde{g}(\lambda) g(t \lambda) e^{i\lambda \left(\frac{(p+t)^2}{4A} + D\right)} \lambda^{-(n+1/2)} dt d\lambda \\ &= C_3 2^{-jn} \mu_{j,\ell}^{n+1} \sqrt{\frac{i}{A}} \int_{\frac{1}{3}}^2 \tilde{g}(\lambda) e^{i\lambda D} \lambda^{-(n+1/2)} H(\lambda, p, A) d\lambda\end{aligned}\quad (4.62)$$

mit

$$H(\lambda, p, A) := \int_{-2}^2 g(t \lambda) e^{i\lambda \frac{(p+t)^2}{4A}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g((u-p)\lambda) e^{i\lambda \frac{u^2}{4A}} du$$

führt. Eine direkte Rechnung mit der Substitution  $v = \lambda \frac{u^2}{4A}$  ergibt

$$\begin{aligned}H(\lambda, p, A) &= \sqrt{\frac{A}{\lambda}} \int_0^{\infty} \left[ g\left(2\sqrt{A\lambda}v + p\lambda\right) + g\left(2\sqrt{A\lambda}v - p\lambda\right) \right] \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} dv \\ &= \sqrt{\frac{A}{\lambda}} \left( a(\lambda, p, A) + i b(\lambda, p, A) \right),\end{aligned}$$

wobei  $a(\lambda, p, A)$  und  $b(\lambda, p, A)$  in (4.43) und (4.44) definiert sind. Mit der Darstellung von  $H(\lambda, p, A)$  und der positiven Lösung  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  kann das Integral in (4.62) geschrieben werden als  $I_{11} = \text{Re}(I_{11}) + i \text{Im}(I_{11})$  mit

$$\begin{aligned}\text{Im}(I_{11}) &= C_4(n, A) 2^{-jn} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-(n+1)} \left( \left[ a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) \right] \cos(D\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \left[ a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A) \right] \sin(D\lambda) \right) d\lambda.\end{aligned}$$

Wir nutzen die Beziehung  $I_2 = -\overline{I_1}$  aus (4.56) und wiederholen alle vorherigen Schritte für das Integral  $I_2$  anstatt  $I_1$  und erhalten  $I_{21} = \text{Re}(I_{21}) + i \text{Im}(I_{21})$  mit

$$\begin{aligned}\text{Im}(I_{21}) &= C_5(n, A) 2^{-jn} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-(n+1)} \left( \left[ a(\lambda, p, A) + b(\lambda, p, A) \right] \sin(D\lambda) \right. \\ &\quad \left. - \left[ a(\lambda, p, A) - b(\lambda, p, A) \right] \cos(D\lambda) \right) d\lambda.\end{aligned}$$

Die Integrale  $\text{Im}(I_{11})$  und  $\text{Im}(I_{21})$  entsprechen den Integralen  $P_1(D, p, A)$  beziehungsweise  $P_2(D, p, A)$  aus Lemma 4.15 und die Voraussetzungen des Lemmas sind wegen  $|p| \leq \frac{1}{2}$  und  $|D| \leq \frac{3\pi}{4}$  erfüllt. Wegen (4.56) gilt

$$|I_{k^*}(j, \ell, \mathbf{y}, m)| = 2|\text{Im}(I_{11} + I_{12})| = 2|\text{Im}(I_{21} + I_{22})|$$

und mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und Lemma 4.15 folgt die untere Schranke aus (4.55) und damit auch die Abschätzung aus (4.52). Damit haben wir (4.49) für den Fall  $A > 0$  gezeigt.

b)

Im Fall  $A = 0$  vereinfacht sich (4.58) zu

$$\begin{aligned} R(v, \theta) &= -\Theta^T(\theta)(Bv + t_{k^*}(x_0) + r(v) - 2\pi y_1, v + x_0 - 2\pi y_2)^T \\ &= -\cos \theta(\tilde{C} - 2\pi y_1 + v(B + \tan \theta)), \end{aligned}$$

weshalb für das Integral aus (4.57) die Darstellung

$$\begin{aligned} I_1 &= 2^{-j(n-1)} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{\theta_{j,\ell-2}^{(h)}}^{\theta_{j,\ell+2}^{(h)}} \int_{\tilde{a}_{k^*}}^{\tilde{a}_{k^*+1}} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta)) \rho^{-n} e^{-i2^j \rho \cos \theta(\tilde{C} - 2\pi y_1 + (B + \tan \theta)v)} \\ &\quad \times \varphi(v, \theta) \, dv \, d\theta \, d\rho \end{aligned}$$

gilt. Lemma 4.13 kann in diesem Fall nicht angewendet werden. Stattdessen verwenden wir die Substitution  $u = 2^{j/2}v$  und ähnlich zum vorherigen Fall  $t = 2^{j/2} \tan \theta - \ell$  und erhalten

$$I_1 = 2^{-jn} \int_{\frac{1}{3}}^2 \int_{-2}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,\ell}^{(h)}(2^j \rho \Theta(\theta_t)) \rho^{-n} e^{-i\rho \cos \theta_t((p+t)u-D)} \varphi(v_{\theta_t}, \theta_t) \cos^2 \theta_t \, du \, dt \, d\rho.$$

Mit den identischen Vereinfachungen und Notationen, die zu (4.62) geführt haben, ergibt sich erneut mit  $\lambda = \rho \mu_{j,\ell}$

$$I_1 = 2^{-jn} \mu_{j,\ell}^{n+2} \int_0^\infty \int_{-2}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda) g(t\lambda) \lambda^{-n} e^{-i\lambda((p+t)u-D)} \, du \, dt \, d\lambda.$$

Mit der Substitution  $y = t\lambda$  folgt mit dem Satz von Fubini und der Inversionsformel der Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} I_1 &= C(n) 2^{-jn} \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-(n+1)} e^{iD\lambda} \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty g(y) e^{-iyu} \, dy \right) e^{-ip\lambda u} \, du \, d\lambda \\ &= C(n) 2^{-jn} \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-(n+1)} e^{iD\lambda} \left( \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}[g](u) e^{-iup\lambda} \, du \right) \, d\lambda \\ &= C(n) 2^{-jn} \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-(n+1)} e^{iD\lambda} g(-p\lambda) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Da  $g(-p\lambda) = 1$  für  $\lambda \in [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$  und  $p \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ , führt dies zu

$$|\operatorname{Im}(I_1)| = C(n) 2^{-jn} \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda) \lambda^{-1} \sin(D\lambda) d\lambda > 0,$$

falls  $0 < |D| \leq \frac{3\pi}{4}$ . Im Fall  $D = 0$  modifizieren wir die Funktion  $\tilde{g}$ , sodass sie ungerade ist. Mit einem ähnliche Argument wie in (4.56) erhalten wir  $|\operatorname{Re}(I_1)| > 0$  und somit (4.49) im Fall  $A = 0$ .

Im abschließenden Teil des Beweises zeigen wir die behauptete untere Schranke mithilfe von Lemma 4.12 für Cartoon-ähnliche Funktionen. Wie in Theorem 4.1 betrachten wir zum Abschluss des Beweises allgemeine Funktionen  $\mathfrak{f}_0 \in \mathcal{E}^{u+1}(\tau)$  von der Form  $\mathfrak{f}_0 = f_0 + f \chi_T = f_0 + \mathfrak{f}$  mit  $\mathfrak{f} = f \chi_T$  und  $f_0, f \in C_0^{u+1}(\mathbb{R}^2)$ . Bereits in (4.31) wurde begründet, dass

$$\left| \left\langle \mathfrak{f}_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \leq C_3(u, q) 2^{-j(q+u+1/2)},$$

weshalb mithilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung, (4.49), Lemma 4.12 und der Voraussetzung  $u > 4(n+1)$

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathfrak{f}_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| &\geq \left| \left\langle P_{u,f,\mathbf{y}}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| - \left| \left\langle \mathfrak{f}^{2\pi} - P_{u,f,\mathbf{y}}^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| - \left| \left\langle f_0^{2\pi}, \psi_{j,\ell,\mathbf{y}}^{(i)} \right\rangle_2 \right| \\ &\geq C_1(u, n, q, \varepsilon_0, T) 2^{-j(3/4+n)} - C_2(\mathfrak{f}, q) 2^{-j(u-1)/4} - C_3(u, q) 2^{-j(q+u+1/2)} \\ &\geq C_4(u, n, q, \varepsilon_0, T) 2^{-j(3/4+n)} \end{aligned}$$

folgt und Theorem 4.2 bewiesen ist.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, 1964.
- [2] D. Batenkov, Y. Yomdin: *Algebraic Fourier reconstruction of piecewise smooth functions*. Math. Comput. 81 (2011), 277–318.
- [3] R. Bergmann: *The fast Fourier transform and fast wavelet transform for patterns on the torus*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 35 (2013), 39–51.
- [4] R. Bergmann: *Translationsinvariante Räume multivariater anisotroper Funktionen auf dem Torus*. Dissertation. Universität zu Lübeck, 2013.
- [5] R. Bergmann, J. Prestin: *Multivariate periodic wavelets of de la Vallée Poussin-type*. J. Fourier Anal. Appl. 21 (2014), 342–369.
- [6] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlag, 1991.
- [7] E.J. Candès, D.L. Donoho: *New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise  $C^2$  singularities*. Commun. Pure Appl. Math. 57 (2004), 216–266.
- [8] E.J. Candès, D.L. Donoho: *Ridgelets: a key to higher-dimensional intermittency?* Phil. Trans. Royal Soc. London A 357 (1999), 2495–2509.
- [9] F.J. Canny: *A computational approach to edge detection*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 8 (1986), 679–698.
- [10] P.G. Casazza, G. Kutyniok: *Finite frames: theory and applications*. Birkhäuser Verlag, 2012.
- [11] O. Christensen: *An introduction to frames and Riesz bases*. Birkhäuser Verlag, 2016.
- [12] O. Christensen, S.S. Goh: *Pairs of dual periodic frames*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 33 (2012), 315–329.
- [13] S. Dahlke, G. Steidl, G. Teschke: *The continuous shearlet transform in arbitrary space dimensions*. J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010), 340–364.
- [14] I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [15] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider: *Box splines*. Springer Verlag, 1993.
- [16] N. Derevianko, V. Myronyuk, J. Prestin: *On an orthogonal bivariate trigonometric Schauder basis for the space of continuous functions*. J. Approx. Theory 238 (2019), 67–84.
- [17] R.A. DeVore: *Nonlinear approximation*. Acta Numer. (1998), 51–150.
- [18] M.N. Do, M. Vetterli: *The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation*. IEEE Trans. Image Process. 14 (2005), 2091–2106.

- 
- [19] D.L. Donoho: *Wedgelets: nearly minimax estimation of edges*. Ann. Statist. 27 (1999), 859–897.
- [20] G.R. Easley et al.: *Optimally sparse representations of cartoon-like cylindrical data*. J. Geom. Anal. (2020).
- [21] K.S. Eckhoff: *On a high order numerical method for functions with singularities*. Math. Comput. 67 (1998), 1063–1087.
- [22] A. Gelb, E. Tadmor: *Detection of edges in spectral data*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 7 (1999), 101–135.
- [23] S.S. Goh, S.L. Lee, K.M. Teo: *Multidimensional periodic multiwavelets*. J. Approx. Theory 98 (1999), 72–103.
- [24] S.S. Goh, K.M. Teo: *Wavelet frames and shift-invariant subspaces of periodic functions*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 20 (2006), 326–344.
- [25] P. Grohs: *Continuous shearlet frames and resolution of the wavefront set*. Monatsh. Math. 164 (2011), 393–426.
- [26] P. Grohs et al.: *Cartoon approximation with  $\alpha$ -curvelets*. J. Fourier Anal. Appl. 22 (2016), 1235–1293.
- [27] A. Grossmann, J. Morlet: *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*. SIAM J. Math. Anal. 15 (1984), 723–736.
- [28] K. Guo, G. Kutyniok, D. Labate: *Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators*. In: Chen G. and Lai M. (Eds.), Wavelets and Splines. Nashboro Press, 2006, 189–201.
- [29] K. Guo, D. Labate: *Characterization and analysis of edges in piecewise smooth functions*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 41 (2016), 139–163.
- [30] K. Guo, D. Labate: *Characterization and analysis of edges using the continuous shearlet transform*. SIAM J. Imaging Sci. 2 (2009), 959–986.
- [31] K. Guo, D. Labate: *Detection of singularities by discrete multiscale directional representations*. J. Geom. Anal. 28 (2017), 2102–2128.
- [32] K. Guo, D. Labate: *Optimally sparse 3D approximations using shearlet representations*. Electron. Res. Announc. Math. Sci. 17 (2010), 125–137.
- [33] K. Guo, D. Labate: *Optimally sparse multidimensional representation using shearlets*. SIAM J. Math. Anal. 39 (2007), 298–318.
- [34] K. Guo, D. Labate, W.Q. Lim: *Edge analysis and identification using the continuous shearlet transform*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 27 (2009), 24–46.
- [35] K. Guo et al.: *Wavelets with composite dilations and their MRA properties*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 20 (2006), 202–236.
- [36] Y.W. Koh, S.L. Lee, H.H. Tan: *Periodic orthogonal splines and wavelets*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995), 201–218.
- [37] G. Kutyniok, D. Labate: *Construction of regular and irregular shearlets*. J. Wavelet Theory Appl. 1 (2007), 1–10.

- 
- [38] G. Kutyniok, D. Labate: *Introduction to shearlets*. Birkhäuser, 2012, 1–38.
- [39] G. Kutyniok, D. Labate: *Resolution of the wavefront set using continuous shearlets*. Trans. Am. Math. Soc. 361 (2009), 2719–2754.
- [40] G. Kutyniok, J. Lemvig, Lim W.Q.: *Compactly supported shearlets*. In: M. Neamtu, L. Schumaker (Eds.), *Approximation Theory XIII*. Springer, 2010.
- [41] G. Kutyniok, P. Petersen: *Classification of edges using compactly supported shearlets*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 42 (2017), 245–293.
- [42] G. Kutyniok, T. Sauer: *Adaptive directional subdivision schemes and shearlet multi-resolution analysis*. SIAM J. Math. Anal. 41 (2009), 1436–1471.
- [43] D. Langemann, J. Prestin: *Multivariate periodic wavelet analysis*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 28 (2010), 46–66.
- [44] I.E. Maksimenko, M.A. Skopina: *Multidimensional periodic wavelets*. St. Petersburg Math. J. 15 (2004), 165–190.
- [45] S. Mallat: *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 11 (1989), 674–693.
- [46] S.G. Mallat: *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [47] S.G. Mallat, W.L. Hwang: *Singularity detection and processing with wavelets*. IEEE Trans. Inf. Theory 38 (1992), 617–643.
- [48] S.G. Mallat, S. Zhong: *Characterization of signals from multiscale edges*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 14 (1992), 710–732.
- [49] F.G. Meyer, R.R. Coifman: *Brushlets: a tool for directional image analysis and image compression*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 4 (1997), 147–187.
- [50] Y. Meyer: *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, 1993.
- [51] H.N. Mhaskar, J. Prestin: *On the detection of singularities of a periodic function*. Adv. Comput. Math. 12 (2000), 95–131.
- [52] F.J. Narcowich, J.D. Ward: *Wavelets associated with periodic basis functions*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 3 (1996), 40–56.
- [53] G. Plonka, M. Tasche: *A unified approach to periodic wavelets*. In: C.K. Chui and L. Montefusco (Eds.), *Wavelets: Theory, Algorithms and Applications*. Academic Press, 1994, 137–151.
- [54] I.R. Porteous: *Geometric differentiation: For the intelligence of curves and surfaces*. Cambridge University Press, 2001.
- [55] J. Prestin, K. Selig: *Interpolatory and orthonormal trigonometric wavelets*. In: J. Zevi and R. Coifman (Eds.), *Signal and image representation in Combined Spaces*. Academic Press, 1998, 201–255.
- [56] T. Sauer: *Shearlet multiresolution and multiple refinement*. In: G. Kutyniok and D. Labate (Eds.), *Shearlets*. Springer, 2011, 199–237.
- [57] K. Schober, J. Prestin, S.A. Stasyuk: *Edge detection with trigonometric polynomial shearlets*. Adv. Comput. Math. 47 (2021).

- [58] I.W. Selesnick, R.G Baraniuk, N.C. Kingsbury: *The dual-tree complex wavelet transform*. IEEE Trans. Image Process. 22 (2005), 123–151.
- [59] K. Selig: *Periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauder-Basis*. Dissertation. Universität Rostock, 1997.
- [60] X. Shi, H. Zhang: *Determination of jumps via advanced concentration factors*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 26 (2009), 1–13.
- [61] I.H. Sloan, S. Joe: *Lattice methods for multiple integration*. Oxford University Press, 1994.
- [62] E.M. Stein: *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.
- [63] E.M. Stein, G. Weiss: *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, 1975.
- [64] E. Tadmor: *Filters, mollifiers and the computation of the Gibbs phenomenon*. Acta Numerica 16 (2007), 305–378.
- [65] S. Yi et al.: *A shearlet approach to edge analysis and detection*. IEEE Trans. Image Process. 18 (2009), 929–941.

---

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Muster und erzeugende Mengen bei der Zerlegung der Matrix $\mathbf{M}$ aus Beispiel 1.5. . . . .	13
1.2	Die Fresnel-Integrale mit den Schranken aus Lemma 1.19. . . . .	24
2.1	Visualisierung der zulässigen Funktionen $g_0$ und $g_{\frac{1}{6}}$ . . . . .	29
2.2	Visualisierung einer multiplen Waveletzerlegung mittels $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_{t,m}^2$ . . . . .	34
2.3	Die erzeugenden Mengen bei einer Faktorisierung der Matrix $\mathbf{M}_6$ mit den dyadischen Dilatationsmatrizen aus Beispiel 2.9. . . . .	38
2.4	Visualisierung der Parallelogramme $\left(\mathbf{N}_{j,k,\ell}^{(i)}\right)^T [0, \frac{1}{2}]^2$ . . . . .	40
2.5	Darstellung der Mengen $\left(\mathbf{N}_{6,3,5}^{(i)}\right)^T [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ und $\left(\mathbf{N}_{6,3,5}^{(h)}\right)^T [0, \frac{1}{2}]^2$ sowie deren Schnittmengen mit $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	41
2.6	Visualisierung einer dyadischen Waveletzerlegung mit $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^3$ in einem Binärbaum. . . . .	43
3.1	Visualisierung der zulässigen Funktionen $g_{\frac{1}{6},b}$ und $\tilde{g}_{\frac{1}{6},b}$ . . . . .	47
3.2	Schematische Darstellung der Mengen $\text{supp } \Psi_{\frac{1}{6}}^{(i)}$ und $\Omega^{(i)}$ . . . . .	53
3.3	Schematische Abbildungen der Mengen $\text{supp } \Psi_{6,3,\ell,\frac{1}{6}}^{(i)}$ und $\Omega_{6,3,\ell}^{(i)}$ sowie deren Schnittmengen mit $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	55
3.4	Visualisierung der Trägermengen der klassischen diskreten Kegel-Shearlets und der Mengen aus Lemma 3.7. . . . .	56
3.5	Darstellung der Funktion $\left \psi_{6,2,2,\frac{1}{6}}^{(h)}\right $ im Ortsbereich und $\text{supp } \Psi_{6,2,2,\frac{1}{6}}^{(h)}$ im Frequenzbereich. . . . .	64
3.6	Visualisierung der Funktion $\tilde{g}(x)$ mit den eingefärbten Bereichen aus dem Beweis von Lemma 3.15. . . . .	73
3.7	Visualisierung der Funktion $g(x)$ mit den eingefärbten Bereichen aus dem Beweis von Lemma 3.15. . . . .	75
4.1	Zerlegung einer Menge $T \in \text{STAR}^2(\tau) \subset (-\pi, \pi)^2$ in dyadische Quadrate $Q \in \mathcal{Q}_j$ . . . . .	87
4.2	Darstellung einer Menge $T \in \text{STAR}^2(\tau)$ und der Umgebungen $B_\varepsilon(\mathbf{y})$ und $U_\varepsilon(\mathbf{y})$ . . . . .	101



# Kevin Schober

Lindenstraße 23b, 23558 Lübeck

☎ 0176 55124552

✉ schober@math.uni-luebeck.de

## Wissenschaftlicher Werdegang

29.07.1990 **Geboren in Lübeck.**

2002 – 2010 **Gymnasium am Mühlenberg, Bad Schwartau.**

2011 – 2014 **Bachelor-Studium Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften, Universität zu Lübeck.**

September **Bachelor of Science,**  
2014 Titel der Bachelorarbeit: "*Ewald-Summation*"  
Betreuer: Prof. Dr. Jürgen Prestin.

2014 – 2016 **Master-Studium Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften,**  
*Universität zu Lübeck.*

Oktober 2016 **Master of Science,**  
Titel der Masterarbeit: "*Greedy-Approximation mit trigonometrischen Waveletsystemen*"  
Betreuer: Prof. Dr. Jürgen Prestin.

Seit **Doktorand im Institut für Mathematik, Universität zu**  
November *Lübeck,*  
2016 Betreuer: Prof. Dr. Jürgen Prestin.