Aus dem Institut für Mathematik
der Universität zu Lübeck

Direktor:
Prof. Dr. Jürgen Prestin

Gradoptimale Schauder-Basen mit Jacobi-Polynomen

Inauguraldissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der Universität zu Lübeck
- Aus der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät -

Vorgelegt von

Dipl.-Math. Jörn Schnieder

aus Osnabrück

Lübeck, den 30. Oktober 2010

1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Prestin

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Schmeisser

3. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Gawronski

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 2010

Zum Druck genehmigt. Lübeck, den 23.09.2010

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit wird die Existenz gradoptimierter polynomialer Schauder-Basen für den Raum $C[-1,1]$ mit Jacobi-Orthogonalität bewiesen. Der Begriff der Schauder-Basis wird zunächst für allgemeine Banach-Räume (wir beschränken uns auf reelle Banach-Räume, d.h. auf Banach-Räume, mit reellem Skalarenkörper) definiert: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Elementen eines Banach-Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt eine Schauder-Basis von X, wenn für alle $f \in X$ eine eindeutig bestimmte Folge reeller Zahlen $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) f_n, \tag{1.1}$$

wobei diese Reihe in der Norm von X konvergiert, d.h. (1.1) äquivalent ist zu

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{j=0}^{n} c_j(f) f_j\|_X = 0. \tag{1.2}$$

In dieser Arbeit wird der klassische Banach-Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ (kurz: $C[-1,1]$) betrachtet, d.h. der Raum aller auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$ (zur allgemeinen Theorie der Schauder-Basen für beliebige Banachräume vgl. [29, Kap. 4]). Eine polynomiale Schauder-Basis ist dann eine Schauder-Basis, deren Elemente aus Polynomen besteht. Ferner: Orthogonal bezüglich eines Gewichts ω heißen Funktionen $f, g \in C[-1,1]$, die orthogonal bezüglich des gewichteten Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)\mathrm{d}x$ sind. Jacobi-Orthogonalität ist Orthogonalität bezüglich des Jacobi-Gewichts $\omega_{\alpha,\beta}$ mit $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ und

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta & \text{für alle } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich: Für Polynome p bezeichne grad p den Grad des Polynoms p. Eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt gradoptimiert (zu $\varepsilon > 0$) bzw. von minimalem Grad, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{grad} p_n \leq (1+\varepsilon) n. \tag{1.3}$$

Als Hauptresultat dieser Arbeit erhält man den

Hauptsatz 1.1 *Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ mit $\max\{\alpha, \beta\} > -\frac{1}{2}$ gibt es eine Folge von Polynomen $(p_{\alpha,\beta,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$, so dass*

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_{\alpha,\beta,n}(t)p_{\alpha,\beta,m}(t)\omega_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t = \delta_{n,m},$
2. $\operatorname{grad} p_{\alpha,\beta,n} \leq n(1+\varepsilon)$ *für alle $n \in \mathbb{N}_0$,*
3. $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$ *für alle $f \in C[-1,1]$,*
4. $\|S_n\|_{C\to C} \leq c\varepsilon^{-2\max\{\alpha,\beta\}-1}$,

wobei $S_n f(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j(f) p_{\alpha,\beta,j}(x)$ mit $c_j(f) := \int_{-1}^{1} p_{\alpha,\beta,j}(t) f(t)\omega_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t$ gesetzt wird.

Eine Hauptschwierigkeit beim Beweis dieses Satzes ist die Konstruktion einer gradoptimierten orthogonalen Polynomfolge: Beispiele von Basen für den Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ wurden bereits 1928 von Schauder selbst in [40] konkret angegeben. Ebenso sind Beispiele für polynomiale Schauder-Basen wie auch orthogonale Systeme von Funktionen auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}$, so dass jede stetige Funktion auf diesem kompakten Teilintervall in eine gegen diese Funktion gleichmäßig konvergierende Fourier-Reihe bezüglich dieses Systems entwickelt werden kann, schon länger bekannt: So konstruierte Haar bereits 1910 in [19] mit dem nach ihm benannten Haar-System ein System orthogonaler, aber nicht stetiger Funktionen und Franklin konstruierte 1928 in [14] ein System orthogonaler, stetiger stückweise linearer Funktionen, das sogenannte Franklin-System, mit der entsprechenden Eigenschaft. Als ungleich schwieriger sollte sich allerdings die Frage herausstellen, welches minimale Gradwachstum Polynomfolgen haben müssen, die eine Schauder-Basis in $C[-1,1]$ sind. Bereits 1914 konnte Faber in [10] zeigen, dass es keine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\operatorname{grad} p_n = n$ geben kann, die eine Basis auf $C[-1,1]$ bildet. Nach vielen Ansätzen verschiedener Autoren (siehe [47] für einen geschichtlichen Abriss) gelang der entscheidende Durchbruch in der Untersuchung gradoptimierter Schauder-Basen erst vor ca. 20 Jahren. Zentrale Ausgangspunkte sind hier zwei Arbeiten von Privalov aus den Jahren 1987 und 1990: In [36] zeigte Privalov, dass es für jede polynomiale Schauderbasis $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $C[-1,1]$ (orthogonal oder nicht) ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\max_{j\leq n} \operatorname{grad} p_j \geq (1+\varepsilon)n$ für alle hinreichend großen n gilt. Die weiterführende Frage, ob das Ergebnis von [36] optimal ist, wurde wieder von Privalov in [37] beantwortet: Hier bewies er, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (nicht-orthogonale) gradoptimierte polynomiale Schauderbasis $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $C[-1,1]$ gibt, d.h. eine polynomiale Basis mit $\operatorname{grad} p_n \leq (1+\varepsilon)n$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Genau genommen bewies Privalov eine entsprechende Behauptung für trigonometrische Polynome und deutete lediglich an, wie durch geringfügige Veränderungen dieses Beweises ein enstprechendes Resultat auch auf den algebraischen Fall übertragbar wird (vgl. [27, Kap. 5]). Seither haben sich viele Autoren mit diesem Thema beschäftigt (vgl. z.B. Offin und Oskolkov in [32], Privalov in [38] und Ul'yanov in [46]). Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse wurde die bereits von Ul'yanov in [45] gestellte Frage nach der Konstruierbarkeit einer gradoptimierten polynomialen Schauder-Basis mit zusätzlicher Orthogonalität bezüglich eines gegebenen Gewichts in Angriff genommen: Für den trigonometrischen Fall $C_{2\pi}$ gelang die Lösung 1994 durch Lorentz und Sahakian in [28], für den algebraischen Fall $C[-1,1]$ mit dem Tchebyscheff-Gewicht erster Art $\omega_1(x) := \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 1996 durch Kilgore, Prestin und Selig in [22]. Für alle vier Tchebyscheff-Gewichte, d.h. für die Gewichte $\omega_1(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega_2(x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\omega_3(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(1+x)}{(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\omega_4(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(1-x)}{(1+x)}\right)^{\frac{1}{2}}$,

wobei ω_i das i-te Tchebyscheff-Gewicht bezeichnet, konnte ein entsprechendes Resultat im Jahr 2000 durch Girgensohn in [17] bewiesen werden. Im Jahr 2001 gelang es Skopina in [42] dann auch, das Problem im Legendre-Fall, d.h. für das Legendre-Gewicht $\omega(x) \equiv 1$ zu lösen. Im Jahr 2003 schließlich konnte Khabiboulline in [20] auch für $C[-1,1]$ versehen mit einem verallgemeinerten Tchebyscheff-Gewicht (dem Tchebyscheff-Gewicht 1. Art multipliziert mit einer analytischen Funktion) eine entsprechende Basis angeben. In dieser Arbeit soll nun die bisher offene Vermutung (vgl. [17, Kap. 4, S. 60]) bewiesen werden, dass ähnliche Konstruktionen auch für beliebige Jacobi-Gewichte möglich sind.
Es folgt eine kurze Beschreibung der wichtigsten Schritte, die zum Beweis des Hauptsatzes 1.1 führen. Die Resultate in [22], [17] und [42] beruhen ganz wesentlich auf Methoden aus der Wavelet-Theorie; sie motivieren die Betrachtung gewisser Polynome $\psi_k^{(N,M)}$ und $\varphi_k^{(N,M)}$ mit

$$\psi_k^{(N,M)} := M^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=-2M}^{2M} g(\frac{s}{M}) \cos((3M+s)\theta_k) p_{N-M+s}^{(\alpha,\beta)} \text{ für } k = 0, ..., 2M-1 \tag{1.4}$$

und

$$\varphi_k^{(N,M)} := \begin{cases} g^*(\frac{k}{N}) p_k^{(\alpha,\beta)} + g^*(\frac{2N-k}{N}) p_{2N-k}^{(\alpha,\beta)} & \text{für } k = 0, ..., N-1, \\ p_N^{(\alpha,\beta)} & \text{für } k = N, \end{cases} \tag{1.5}$$

wobei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gewisse stetige Funktion sind, für die insbesondere $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$, $\operatorname{supp} g^* \subseteq [-2,2]$ und $g(0) = 1 = g^*(0)$ ist und $\theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi$ gesetzt wird. Wie sich aus den $\psi_k^{(N,M)}$ zusammen mit den orthonormierten klassischen Jacobi-Polynomen $p_n^{(\alpha,\beta)}$ eine gradoptimierte und (bezüglich $\omega_{\alpha,\beta}$) orthonormierte Folge von Polynomen $(p_{\alpha,\beta,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konstruieren lässt, wurde für eine allgemeinere Klasse von Borel-Maßen μ bereits in [17] gezeigt. Diese Konstruktion wird für den hier zu führenden Beweis übernommen. Die verbleibende Hauptschwierigkeit zum Beweis der Schauder-Basis-Eigenschaft besteht nun darin, die gleichmäßige Beschränktheit gewisser Lebesgue-Konstanten $L^{(N,M)}$ der $\psi_k^{(N,M)}$, die durch

$$L^{(N,M)} = \sup_{s\in[0,\pi]} \int_{-1}^{1} \Big| \sum_{j=0}^{2M-1} \psi_k^{(N,M)}(\cos s) \psi_k^{(N,M)}(\cos t) \Big| \omega_{\alpha,\beta}(t) \sin t \mathrm{d}t \tag{1.6}$$

definiert werden, nachzuweisen (das Vorgehen im Fall der $\varphi_k^{(N,M)}$ ist dann ganz ähnlich). Ähnlich wie in [17] nutzt man dazu die strukurelle Nähe der Basisfunktionen $\psi_k^{(N,M)}$ zu verallgemeinerten Dirichlet-Kernen der Form $K_n(t) = \sum_{k=-2n}^{2n} g(\frac{k}{n}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ aus, d.h. man führt die Jacobi-Polynome auf trigonometrische Funktionen zurück, aus deren Zusammenfassung sich dann solche verallgemeinerten Kernfunktionen ergeben. Für die weitere Argumentation wesentlich sind die Lokalisierungseigenschaften dieser Kerne: Erfüllt die Funktion g bestimmte Glattheits- und Symmetriebedingungen, so ergibt sich mit Argumenten aus der Fourier-Analysis die Abschätzung

$$|K_n(t)| \le c_{g,n} \frac{1}{(1+n|t|)^r} \quad \text{für alle } |t| \le \pi, \tag{1.7}$$

wobei $c_{g,n} > 0$ eine nur von g und n abhängige Konstante ist und r die Differenzierbarkeitsordnung von g bezeichnet. Im Unterschied zu den Tchebyscheff-Polynomen, die sich verhältnismäßig einfach auf trigonometrische Funktionen zurückführen lassen, für die also die Konstruktion der $\psi_k^{(N,M)}$ geradezu maßgeschneidert ist, bestehen zwischen

Jacobi-Polynomen und trigonometrischen Funktionen in der Regel erheblich kompliziertere Zusammenhänge. Die wesentliche Idee besteht nun darin, das Integrationsintervall in (1.6) in Abhängigkeit von s in mehrere Teilintervalle aufzuteilen und auf jedem Teilintervall verschiedene Abschätzungen für die $\psi_k^{(N,M)}$ geeignet zu kombinieren.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im *2. Kapitel* werden die der Arbeit zugrundeliegende Terminologie und Notation eingeführt, und es werden die benötigten mathematischen Grundlagen aus der Approximationstheorie, der Fourier-Analysis, der Theorie orthogonaler Polynome und gewisser spezieller Funktionen - in der Regel ohne Beweis - referiert. Eine wichtige Ausnahme bildet die Herleitung gewisser Integraldarstellungen von Jacobi-Polynomen. Bezüglich dieser Integraldarstellungen haben sich im Verlauf der letzten Jahrzehnte einige Inkonsistenzen eingestellt, die durch eine detailierte Beweisführung allerdings zu beheben sind. Im *3. Kapitel* werden die in dieser Arbeit benötigten Resultate aus [17, Kap.4.1, 4.2], teilweise aber ausführlicher als dort, referiert: In Kapitel 3.1 wird zunächst der allgemeine Ansatz beschrieben, wie mit Methoden der Wavelet-Theorie für eine allgemeine Klasse von Borel-Maßen μ polynomiale Räume $V^{(j)}, W^{(j)} \subseteq C[-1,1]$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ konstruiert werden können, aus denen sich eine Folge $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen auswählen lässt, die eine gradoptimierte Schauder-Basis mit μ-Orthogonalität für $C[-1,1]$ bildet. In Kapitel 3.2 werden sodann umfassendere Klassen von Räumen $V^{(M,N)}$, $W^{(M,N)}$ $(N, M \in \mathbb{N},\ N > 3M)$ definiert, und es werden Bedingungen für die Orthogonalität ihrer Basisfunktionen $\varphi_k^{(M,N)}$ und $\psi_k^{(M,N)}$ hergeleitet. Im *4. und 5. Kapitel* wird die zentrale Schwierigkeit im Beweis von Hauptsatz 1.1 gelöst: Es wird die gleichmäßige Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten der Räume $W^{(N,M)}$ (4. Kapitel) und $V^{(N,M)}$ (5. Kapitel) bewiesen. Im *6. Kapitel* wird schließlich wieder die Strategie aus [17, Kap. 4.4] aufgegriffen: Hier werden die Ergebnisse der vorangegangenen drei Kapiteln zusammengeführt und es wird gezeigt, wie aus den Räumen $W^{(N,M)}$, $V^{(N,M)}$ die Räume $V^{(j)}$, $W^{(j)}$ bzw. die Basisfunktionen $\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}$ so ausgewählt werden können, dass eine gradoptimierte polynomiale Schauder-Basis für $C[-1,1]$ mit Jacobi-Orthogonalität entsteht.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. J. Prestin für seine ausgezeichnete Betreuung. Er hat mich als "Quereinsteiger" in seine Arbeitsgruppe aufgenommen und in das faszinierende Gebiet der orthogonalen Polynome eingeführt. Trotz seiner hohen Arbeitsbelastung hat er immer wieder Zeit für aufschlußreiche und motivierende Gespräche in einer menschlich sehr angenehmen Atmosphäre gefunden. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. G. Schmeißer, der die Mühen auf sich genommen hat, eine noch sehr fehlerträchtige, vorläufige Version der Arbeit zu lesen und durch viele wertvolle Hinweise zu ihrer Verbesserung beizutragen. Bedanken möchte ich mich auch bei Dr. F. Filbir für eine Einladung nach München an das Helmholtz-Institut und für mehrere sehr anregende Gespräche, die meinen mathematischen Horizont stark erweitert und das Verständnis meines Themas vertieft haben. Für sein Interesse an meinem Thema und seine anregenden Fragen bei einem Aufenthalt in Lübeck bedanke ich mich auch bei Prof. Dr. H. N. Mhaskar. Nicht zuletzt gilt mein Dank auch Herrn OStD F. U. Bähr vom Städtischen Gymnasium Bad Segeberg. Durch sein Verständnis und seine Großzügigkeit mir gegenüber war so mancher Tagungsbesuch auch während des laufenden Schulbetriebs möglich. Durch ihr Verständnis und ihre Geduld während der letzten Jahre hat meine liebe Frau Ann-Katrin ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Sie hat so manchen mathematischen und seelischen "Zusammenbruch" in den letzten Jahren aufgefangen und ertragen. Dafür danke ich Ihr von ganzem Herzen.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Schreibweisen

Mit $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ bezeichnet man die Menge der komplexen, reellen, ganzen und natürlichen Zahlen und mit $C(\mathbb{R})$ bzw. $C_c(\mathbb{R})$ die Menge der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen bzw. die Menge der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen mit kompaktem Träger. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $C^k(\mathbb{R})$ bzw. $C_c^k(\mathbb{R})$ die Menge aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ bzw. die Menge aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Insbesondere für $k = 0$ definiert man $C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$ bzw. $C_c^0(\mathbb{R}) = C_c(\mathbb{R})$. Mit $(C[-1,1], ||\cdot||_\infty)$ bezeichnet man den durch die Supremumsnorm normierten Raum der auf $[-1,1]$ stetigen reellwertigen Funktionen. Es seien $j \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine j mal differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man mit $f^{(j)}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} f(x)$ die j-te Ableitung von f. Insbesondere für $j = 0$ definiert man $f^{(0)} := f$. Mit $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq 0\}}$ bezeichnet man den *Träger* einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ist z eine komplexe Zahl, dann sind $\Re z$, $\Im z$ und $|z|$ ihr Realteil, ihr Imaginärteil bzw. ihr Betrag. Unter *Polynomen (in x)* versteht man Funktionen der Form

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m \tag{2.1}$$

mit beliebigen (komplexen oder reellen) Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_m$, wobei die größte natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $c_m \neq 0$ der *Grad des Polynoms* genannt wird, und man schreibt

$$\mathrm{grad}\, p = m.$$

Mit Π_k ($k \in \mathbb{N}_0$) bezeichnet man die Menge aller Polynome q mit $\mathrm{grad}\, q \leq k$. Trigonometrische Polynome in θ sind Funktionen der Form

$$g(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \cdots + a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta \tag{2.2}$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$. Die größte natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_m| + |b_m| > 0$ nennt man den Grad von g.
Wie üblich definiert man das Kronecker-Symbol $\delta_{n,m}$ durch

$$\delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

($n, m \in \mathbb{N}_0$). Für eine gegebene Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ oder Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man den Differenzen-Operator Δ durch

$$\begin{aligned} \Delta a_\nu = \Delta^1 a_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu \text{ und } \quad \Delta^k a_\nu = \Delta(\Delta^{k-1} a_\nu) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2, \text{ bzw.} \\ \Delta a(u) = \Delta^1 a(u) = a(u+1) - a(u) \text{ und } \Delta^k a(u) = \Delta(\Delta^{k-1} a(u)) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

In dieser Arbeit sollen *Konstanten* Größen sein, die immer unabhängig vom Index der betrachteten orthogonalen Polynome sind. Einige Konstanten hängen von gewissen Parametern ab: $c_\alpha, c(\alpha, \beta, r), c_0, d_1, ...$ Diese werden manchmal angegeben, aber nicht immer. Gleiche Konstantenbezeichnungen können für verschiedene Werte in verschiedenen Formeln stehen, sogar innerhalb einer Formel.

2.2 Funktionen-Räume, Skalarprodukte und Orthogonalität

Mit λ wird das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und mit $\mathrm{d}\lambda(x) = \mathrm{d}x$ die entsprechende Distribution bezeichnet. Alle sonstigen in dieser Arbeit auftretenden Maße μ (und ihre Distributionen $\mathrm{d}\mu(x)$) seien stets positive, endliche Borel-Maße, deren Träger $\operatorname{supp} \mu = [-1, 1]$ ist und deren Momente $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mathrm{d}\mu(x)$ für alle $n = 0, 1, ...$ existieren und endlich sind. Für μ-messbare (reelle) Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ schreibt man

$$\|f\|_{L^p_\mu[-1,1]} := \|f\|_{L^p_\mu} := \begin{cases} \left\{ \int_{-1}^1 |f(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) \right\}^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq x < \infty, \\ \mu\text{-ess } \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)| & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Ferner definiert man für alle $1 \leq p < \infty$

$$L^p_\mu[-1, 1] := \left\{ f, f \text{ ist } \mu\text{-messbar und } \|f\|_{L^p_\mu} < \infty \right\},$$

wobei zwei Funktionen als gleich betrachtet werden, wenn sie μ-fast-überall identisch sind. Ist μ das Lebesgue-Maß auf $[-1, 1]$, so verzichtet man auf den Index μ und schreibt z.B. $L^1_\mu[-1, 1] = L^1[-1, 1] = L^1$ bzw. $\|f\|_{L^p_\mu} = \|f\|_{L^p}$. Besitzt ein Maß μ eine Gewichtsfunktion, also eine nicht-negative Funktion $\omega_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$ mit $\mathrm{d}\mu(x) = \omega_\mu(x)\mathrm{d}x$, dann schreibt man für alle $1 \leq p < \infty$ auch

$$L^p_{\omega_\mu}[-1, 1] := L^p_\mu[-1, 1] := L^p_\mu.$$

Für den Torus $\mathbb{T} := [-\pi; \pi]$ definiert man

$$L^1(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} := \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty\}$$

und

$$L^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty\}.$$

Funktionen auf $\mathbb{T}$ werden stillschweigend mit ihren 2π-periodischen Erweiterungen auf $\mathbb{R}$ identifiziert, so dass Behauptungen wie $f \in C(\mathbb{T})$ bedeuten, dass f stetig auf $\mathbb{T}$ ist und auf $\mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig fortgesetzt werden kann.

Das *Skalarprodukt bezüglich eines Maßes* μ zweier reeller Funktionen $f, g \in L^1_\mu[-1,1]$ wird definiert durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Man nennt f *orthogonal zu* g *bezüglich* μ *bzw.* $\mathrm{d}\mu(x)$, wenn die Relation $\langle f, g\rangle = 0$ erfüllt ist. Eine Menge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $p_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ heißt *Orthogonalsystem bezüglich* μ *(bzw.* $\mathrm{d}\mu(x)$*)*, wenn gilt

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ für alle } m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m$$

und *Orthonormalsystem bezüglich* μ *(bzw.* $\mathrm{d}\mu(x)$*)*, wenn zusätzlich

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{n,m} \text{ für alle } m, n \in \mathbb{N}_0$$

ist. Handelt es sich bei den p_n um Polynome, so spricht man von einem *polynomialen Orthogonalsystem bzw. Orthonormalsystem bezüglich* μ *(bzw.* $\mathrm{d}\mu(x)$*)*. Im Spezialfall

$$\mathrm{d}\mu(x) = \omega_\mu(x)\mathrm{d}x,$$

wobei ω_μ eine nicht-negative, Lebesgue-messbare Funktion mit $\int_{-1}^{1}\omega_\mu(x)\mathrm{d}x > 0$ ist, spricht man auch von einem *Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem bezüglich der Gewichtsfunktion bzw. des Gewichts* ω_μ.

2.3 Asymptotische Approximationen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Schreibweisen, Definitionen und Sätze über asymptotische Approximationen und Entwicklungen von Funktionen zusammengestellt.

Definition 2.1 *Es seien* Ω *eine Menge reeller oder komplexer Zahlen und* z_0 *ein Häufungspunkt von* Ω*. Es seien ferner* $f(z)$ *und* $g(z)$ *zwei auf* Ω *definierte Funktionen. Dann schreibt man*

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \text{ für } z \to z_0$$

genau dann, wenn es eine Konstante $K > 0$ *und eine Umgebung* U *von* z_0 *gibt mit*

$$|f(z)| \leq K|g(z)| \text{ für alle } z \in \Omega \cap U.$$

Definition 2.2 *Es sei* $f(z)$ *eine auf einer unbeschränkten Menge reeller oder komplexer Zahlen definierte Funktion. Die nicht notwendigerweise konvergierende Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *heißt Asymptotik zur Funktion* $f(z)$*, wenn für alle* $N \in \mathbb{N}_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + \mathcal{O}(z^{-(N+1)}) \text{ für } z \to \infty$$

gilt. Man schreibt dann

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \text{ für } z \to \infty.$$

Im nächsten Satz werden einige algebraische Eigenschaften asymptotischer Entwicklungen zusammengestellt.

Satz 2.3 *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ zwei auf einer unbeschränkten Menge Ω reeller oder komplexer Zahlen definierte Funktionen mit $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ und $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ für $z \to \infty$. Dann gilt*
1.

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n} \text{ für } z \to \infty \text{ in } \Omega \tag{2.4}$$

und alle reellen oder komplexen Zahlen α, β,
2.

$$f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \text{ für } z \to \infty \text{ in } \Omega, \tag{2.5}$$

wobei $c_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s}$ ist,
3.

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \text{ für } z \to \infty \text{ in } \Omega, \tag{2.6}$$

wobei die d_n rekursiv bestimmt werden durch

$$a_0 d_0 = 1 \text{ und } a_0 d_k = -(a_1 d_{k-1} + a_2 d_{k-2} + \cdots + a_k d_0) \text{ für } k = 1, 2, \ldots . \tag{2.7}$$

Beweis: Siehe [33, Kap. 1, §7]. ■

2.4 Die Gamma-Funktion

Definition 2.4 *Für alle $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$ definiert man die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ durch*

$$\Gamma(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{k! k^{z-1}}{(z+1)_k},$$

wobei man $(a)_0 := 1$ für $a \in \mathbb{C}$ sowie $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt.

Einige grundlegende Eigenschaften der Γ-Funktion werden zusammengefasst in folgendem

Satz 2.5 *1. Die Funktion $\Gamma(z)$ ist meromorph auf $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$.*
2. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > 0$ lässt sich $\Gamma(z)$ als Euler-Integral der 2. Art darstellen durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t.$$

3. Für alle $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$ gilt

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Beweis: Siehe [12, Kap. 7, §5]. ∎

Für die Quotienten zweier Gamma-Funktionen $\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}$ und ihre k-ten Ableitungen lassen sich verschiedene asymptotische Entwicklungen angeben. Dazu benötigt man zunächst die

Definition 2.6 *Für $l, \alpha \in \mathbb{R}$ definiert man die verallgemeinerten Bernoulli-Polynome $B_n^{(l)}(\alpha)$ durch ihre erzeugende Funktion*

$$\frac{t^l e^{\alpha t}}{(e^t - 1)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(l)}(\alpha) \frac{t^n}{n!} \text{ für } |t| < 2\pi. \tag{2.8}$$

Schon an dieser Stelle sei auf eine wichtige Eigenschaft der verallgemeinerten Bernoulli-Polynome hingewiesen.

Bemerkung 2.7 *Für alle $\sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$B_0^{(\sigma)}(\alpha) = 1. \tag{2.9}$$

Beweis: Siehe [33, Kap. 4, §5]. ∎

Satz 2.8 *1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} = n^{\alpha} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ für } n \to \infty. \tag{2.10}$$

2. Für alle $a, b, z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(b-a) > 0$ und $\Re(z+a) > 0$ ist

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n^{(\sigma)}(a) \frac{\Gamma(b-a+n)}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{z^{b-a+n}} \tag{2.11}$$

für $|z| \to \infty$ in $|\arg(z)| < \pi - \delta < \pi$, wobei $\sigma := a - b + 1$ gesetzt wird.
3. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b, t \in \mathbb{R}$ mit $b > a > 0$, $\sigma := a - b + 1$ und $t > 0$ gilt

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t+b)} = (-1)^k B_0^{(\sigma)}(a) \frac{\Gamma(b-a+k)}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{t^{b-a+k}} (1 + \mathcal{O}(t^{-1})) \text{ für } t \to \infty. \tag{2.12}$$

Beweis: Zu 1. siehe [34, Kap. 1.2, Lemma 2.19]. Zu 2. siehe [33, Kap. 4, §5]. Zu 3. siehe [35, Lemma 2.2]. ∎

2.5 Die Bessel-Funktion

Definition 2.9 *Für $z, \alpha \in \mathbb{C}$ definiert man die Bessel-Funktion (erster Art der Ordnung α) durch*

$$J_{\alpha}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (z/2)^{\alpha+2\nu}}{\nu! \Gamma(\nu+\alpha+1)},$$

wobei im Fall $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ die Terme $(\Gamma(\nu+\alpha+1))^{-1}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu+\alpha+1 \leq 0$ durch 0 ersetzt werden.

Im folgenden Lemma werden einige nützliche Eigenschaften der Bessel-Funktion zusammengestellt.

Lemma 2.10 *1. Die Funktion $J_\alpha(z)$ ist als Funktion in α holomorph auf $\mathbb{C}$.*
2. Für $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ gilt

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \text{ und } J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \tag{2.13}$$

3. Die Funktion $J_\alpha(z)$ ist als Funktion in z holomorph auf der entlang der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, und es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$

$$\alpha J_\alpha(z) + zJ'_\alpha(z) = zJ_{\alpha-1}(z) \text{ und } -\alpha J_\alpha(z) + zJ'_\alpha(z) = -zJ_{\alpha+1}(z). \tag{2.14}$$

Beweis: Siehe [2, Kap. 4.5, 4.6]. ■

Eine für die Beweisführung dieser Arbeit besonders wichtige Asymptotik liefert der

Satz 2.11 *Es seien $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$. Dann gilt*

$$J_\alpha(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{1}{2}\alpha\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{A_{2\nu}(\alpha)}{z^{2\nu}}\right\}\right.$$
$$\left. - \sin\left(z - \frac{1}{2}\alpha\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{2\nu+1}\frac{A_{2\nu+1}(\alpha)}{z^{2\nu+1}}\right\}\right)$$

für $z \to \infty$ im Sektor $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$, wobei

$$A_\nu(\alpha) := \frac{(4\alpha^2 - 1^2)(4\alpha^2 - 3^2)\cdots(4\alpha^2 - (2\nu - 1)^2)}{\nu! 8^\nu}$$

und $z^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\log z)$ für $|\Im(\log z)| \leq \pi - \delta$ gesetzt wird.

Beweis: Siehe [33, Kap. 4, §9] oder [2, Kap. 4.8]. ■

Wir verwenden Satz 2.11 in folgender Variante:

Korollar 2.12 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x \geq 1$ ist*

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu A_\nu(\alpha)\frac{\cos\left(x - (\frac{1}{2} + \alpha + \nu)\frac{\pi}{2}\right)}{x^\nu} + \widetilde{\varepsilon}_n(x), \tag{2.15}$$

wobei

$$|\widetilde{\varepsilon}_n(x)| \leq c_{\alpha,n} x^{-(n+\frac{1}{2})} \quad \text{für alle } x \geq 1 \tag{2.16}$$

ist.

Beweis: Wegen

$$\cos\left(x - (\frac{1}{2} + \alpha + \nu)\pi/2\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{\nu}{2}} \cos\left(x - (\frac{1}{2} + \alpha)\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } \nu \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sin\left(x - (\frac{1}{2} + \alpha)\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } \nu \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist Korollar 2.12 eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.11. ∎

Bemerkung 2.13 *Nach* (2.14) *und Korollar 2.12 existieren ausschließlich von α abhängige Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle reellen Zahlen $x \geq 1$ gilt*

$$|J_\alpha(x)| \leq c_1 \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \textit{und} \quad |J'_\alpha(x)| \leq c_2 \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2.17}$$

2.6 Die Hypergeometrischen Funktionen

Um die Lebesgue-Konstanten für die Schauderbasis abzuschätzen, führt man die Jacobi-Polynome auf trigonometrische Polynome zurück. Dabei treten hypergeometrische Funktionen auf, deren Verhalten bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Normen auf Teilintervallen und insbesondere am Rand von $[-1, 1]$ genau zu untersuchen ist. Hierzu werden wir die grundlegenden Resultate von [15] und [35] neu kombinieren und angewenden. Im Sinne größtmöglicher Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit der Argumentation werden zunächst die wichtigsten Fakten über hypergeometrische Reihen und Funktionen zusammengestellt.

Definition 2.14 *Für $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, x \in \mathbb{C}$ mit $b_i \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ $(i = 1, ..., q)$ definiert man die hypergeometrische Reihe durch*

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Bemerkung 2.15 *Es seien $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, wobei $a_m = -n$ für ein $m \in \{1, ..., p\}$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist*

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

ein für alle $x \in \mathbb{C}$ definiertes Polynom mit

$$\text{grad}\ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right) \leq n + 1.$$

In der vorliegenden Arbeit wird nur der Spezialfall

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) :=_2 F_1(a, b; c; x)$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ betrachtet. Das Konvergenzverhalten dieser Reihe für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$ ist für die Argumentation in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung. Eine erste allgemeine Aussage dazu macht der

Satz 2.16 *1. Es seien* $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ *und* $p \leq q$. *Dann ist die Reihe* ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *absolut konvergent.*
2. Es seien $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ *und* $p = q + 1$. *Dann ist die Reihe* ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| < 1$ *absolut konvergent.*
3. Es seien $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ *und* $p > q + 1$. *Dann divergiert die Reihe* ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $x \neq 0$.

Beweis: Siehe [2, Satz 2.1.1]. ∎

Der nachfolgende Satz beschreibt das Konvergenzverhalten für hypergeometrische Reihen ${}_pF_q$ mit $p = q + 1$ in den Punkten $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$.

Satz 2.17 *1. Es seien* $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$, $p = q+1$ *und* $\Re(\sum b_i - \sum a_i) > 0$. *Dann ist die Reihe* ${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_{q+1} \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| = 1$ *absolut konvergent.*
2. Es seien $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$, $p = q+1$ *und* $0 \geq \Re(\sum b_i - \sum a_i) > -1$. *Dann ist die Reihe* ${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_{q+1} \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| = 1$ *und* $x \neq 1$ *bedingt konvergent.*
3. Es seien $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, ..., b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$, $p = q+1$ *und* $\Re(\sum b_i - \sum a_i) \leq -1$. *Dann ist die Reihe* ${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_{q+1} \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| = 1$ *divergent.*

Beweis: Siehe [2, Satz 2.1.2]. ∎

Aus Satz 2.17, 2. und 3. folgt zwar, dass ${}_2F_1(a, b; c; x)$ für $x = 1$ und $\Re(c - a - b) \leq 0$ im Allgemeinen divergiert. Es gilt aber der

Satz 2.18 *1. Für* $a, b \in \mathbb{C}$ *und* $c \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ *mit* $\Re(c - a - b) < 0$ *ist*

$$\lim_{x \to 1-} \frac{{}_2F_1(a, b; c; x)}{(1 - x)^{c-a-b}} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \tag{2.18}$$

2. Für $a, b \in \mathbb{C}$ *und* $c \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ *mit* $c = a + b$ *ist*

$$\lim_{x \to 1-} \frac{{}_2F_1(a, b; a + b; x)}{\log(\frac{1}{1-x})} = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \tag{2.19}$$

Beweis: Siehe [2, Satz 2.1.3]. ∎

Im Fall $\Re(c - a - b) > 0$ lässt sich die hypergeometrische Reihe mit der *Summationsformel von Gauss* auch in $x = 1$ auswerten. Es gilt der

Satz 2.19 *Für* $a, b \in \mathbb{C}$ *und* $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ *mit* $\Re(c-a-b) > 0$ *gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Beweis: Siehe [2, Satz 2.2.2]. ■

Hypergeometrische Reihen lassen sich analytisch fortsetzen von $\{x \in \mathbb{C} : \ |x| < 1\}$ auf die geschlitzte Ebene. Genauer gilt der

Satz 2.20 *Für alle* $a, b \in \mathbb{C}$ *und* $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ *existiert genau eine Funktion, die sogenannte* **hypergeometrische Funktion** ${}_2\tilde{F}_1(a, b; c; x)$, *die aufgefasst als Funktion in Abhängigkeit von* x, *analytisch auf* $\mathbb{C} \backslash [1, \infty)$ *ist, so dass*

$$ {}_2\tilde{F}_1(a, b; c; x) = {}_2F_1(a, b; c; x) \text{ für alle } x \in \mathbb{C} \text{ mit } |x| < 1. \tag{2.20}$$

Beweis: Siehe [33, Kap. 5, §9.1]. ■

Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.20 wird im Folgenden nicht mehr zwischen ${}_2F_1$ und ${}_2\tilde{F}_1$ unterschieden, d.h. mit ${}_2F_1(a, b; c; x)$ wird sowohl die hypergeometrische Reihe als auch die hypergeometrische Funktion bezeichnet.

Für die Herleitung der in dieser Arbeit zu verwendenden Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ benötigt man zwei, bereits von Pfaff (2.21) bzw. Euler (2.22) bewiesene Transformationsformeln für hypergeometrische Funktionen.

Satz 2.21 *Für* $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ *und* $x \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ *gilt*

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1-x)^{-a} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x-1} \right) \tag{2.21}$$

und

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1-x)^{c-a-b} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} ; x \right). \tag{2.22}$$

Beweis: Siehe [2, Satz 2.2.5]. ■

Außerdem benötigt man eine von Erdélyi in [8] bewiesene Verallgemeinerung von Eulers Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion. Sie ist enthalten in folgendem

Satz 2.22 *Für* $a, b, c, x, \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $c \neq 0, -1, -2, ...$, $x \neq 1$, $|\arg(1-x)| < \pi$ *und* $\Re(c) > \Re(\mu) > 0$ *gilt*

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\mu)\Gamma(c-\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{c-\mu-1} (1-xt)^{\lambda-a-b} \, {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda-a, \lambda-b \\ \mu \end{matrix} ; xt \right) \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+b-\lambda, \lambda-\mu \\ c-\mu \end{matrix} ; \frac{(1-t)x}{1-xt} \right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [2, Satz 2.2.1]. ■

Im nächsten Lemma werden Abschätzungen der hypergeometrischen Funktionen auf gewissen Teilintervallen und insbesondere am Rand von $[-1,1]$ angegeben. Diese Abschätzungen werden später benötigt, um die Beschränktheit der Lebesgue-Konstante unserer Schauder-Basis nachzuweisen. Als Konsequenz aus den Sätzen 2.16, 2.17 und 2.18 erhält man das

Lemma 2.23 *1. Für $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta \leq \phi \leq \pi$ gilt*

$$\sup_{0<\theta\leq\phi\leq\pi} \left| {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right| < \infty. \tag{2.23}$$

2. Für $\alpha > 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta \leq \phi \leq \pi$ gilt

$$\sup_{0<\theta\leq\phi\leq\pi} \left| {}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right| < \infty. \tag{2.24}$$

3. Für $\alpha = 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta \leq \phi \leq \pi$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt

$$\left| {}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right| \leq c\frac{1-\cos\phi}{1-\cos\theta}. \tag{2.25}$$

4. Für $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -1$ und $0 \leq \phi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sup_{0\leq\phi\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}} \left| {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\right| < \infty. \tag{2.26}$$

Beweis: Beweis zu (2.23): Wegen $0 < \theta \leq \phi \leq \pi$ ist $0 \leq \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi} \leq 1$ und wegen $0 > \alpha \geq -\frac{1}{2}$ ist $\beta+\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta+1}{2} = -\alpha > 0$. Deshalb kann Satz 2.17, 1. angewendet werden, und mit dem Abelschen Grenzwertsatz (vgl. Satz 2.52) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left| {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \left| {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \beta+\frac{1}{2}; x\right)\right| < \infty
\end{aligned}$$

und damit insgesamt (2.23). Analog dazu beweist man (2.24).
Beweis zu (2.25): Zunächst zeigt man, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$\left| {}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta+\frac{1}{2}; x\right)\right| \leq \frac{c}{1-x} \tag{2.27}$$

für alle $0 \leq x < 1$ ist.
Beweis zu (2.27): Wegen $\beta+\frac{1}{2}-\frac{\beta-\alpha+1}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2} = \alpha = 0$ existiert nach (2.19) ein $0 < c_0 < 1$, so dass

$$\frac{\left|{}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta+\frac{1}{2}; x\right)\right|}{\log(\frac{1}{1-x})} \leq \left|\frac{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\beta-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\beta-\alpha}{2})}\right| + \frac{1}{2} =: c_1 < \infty$$

für alle $1 > x \geq c_0$ ist. Bekanntlich gilt $\log x \leq x$ für alle $x > 0$, weshalb

$$\begin{aligned}\left|{}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};x\right)\right| &\leq \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\left|{}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};x\right)\right|}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}\\ &\leq \frac{1}{1-x}\left(\left|\frac{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\beta-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\beta-\alpha}{2})}\right|+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

für alle $1 > x \geq c_0$ ist. Für $0 \leq x \leq c_0 < 1$ ist wegen Satz 2.20

$$\begin{aligned}&\left|{}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};x\right)\right|\\ &\quad\leq \sup_{x\in[0,c_0]}\left|{}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};x\right)\right| =: c_2 < \infty.\end{aligned}$$

Nun setzt man $c := \max\{c_1, c_2\}$, womit (2.27) bewiesen ist. Für $x := \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}$ in (2.27) und unter Beachtung von $\frac{1}{1-x} = \frac{1-\cos\phi}{1-\cos\theta}$ und $0 \leq \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi} < 1$ für alle $0 < \theta \leq \phi \leq \pi$ erhält man schließlich die gewünschte Ungleichung (2.25).
Beweis zu (2.26): Wegen $0 \leq \phi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$0 \leq \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi} \leq \frac{1}{2}.$$

Außerdem ist $\left|{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};x\right)\right|$ nach Satz 2.16, 2. stetig auf dem kompakten Intervall $[0,\frac{1}{2}]$. Somit gilt für alle $0 \leq \phi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}&\left|{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\right|\\ &\quad\leq \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}\left|{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};x\right)\right| < \infty,\end{aligned}$$

womit (2.26) und damit Lemma 2.23 insgesamt bewiesen ist. ■

Bemerkung 2.24 *In [35] wird irrtümlich behauptet, dass*

$$\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\theta} \leq 1 \text{ für alle } \theta \leq \phi \leq \pi$$

ist und damit ein $c > 0$ existiert, so dass für alle $\theta \leq \phi \leq \pi$

$$\left|{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right| \leq c$$

gilt. Die Prämisse dieses Arguments ist aber falsch und somit muss der Existenzbeweis für dieses c mit erweiterten Argumenten neu geführt werden. Diese Argumente liefert aber gerade das eben bewiesene Lemma 2.23 (vgl. dazu auch die Bemerkung 2.43).

2.7 Die Jacobi-Polynome

In diesem Abschnitt werden die klassischen Jacobi-Polynome definiert und ihre in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften dargestellt.

Definition 2.25 *1. Es seien $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta > -1$. Die Jacobi-Gewichtsfunktion $\omega_{\alpha,\beta}$ und das zugehörige Jacobi-Maß werden definiert durch*

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta & \text{für } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \end{cases}$$

und

$$\mathrm{d}\mu_{\alpha,\beta}(x) := \omega_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x.$$

2. Für $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x \leq 1$, $\alpha, \beta > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Jacobi-Polynome n-ter Ordnung mit Jacobi-Exponenten α, β durch

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right). \tag{2.28}$$

Zunächst seien einige elementare Eigenschaften der Jacobi-Polynome angegeben.

Korollar 2.26 *Für $-1 \leq x \leq 1$, $\alpha, \beta > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x), \tag{2.29}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}, \tag{2.30}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{n!} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Beweis: Siehe [34, Korollar 3.2]. ■

Satz 2.27 *Die Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}_0; x \in [-1,1], \alpha, \beta > -1)$ bilden ein Orthogonalsystem bezüglich $\mathrm{d}\mu_{\alpha,\beta}$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und alle reellen $\alpha, \beta > -1$ gilt*

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \omega_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{m,n}, \tag{2.31}$$

wobei

$$h_n^{(\alpha,\beta)} := \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)} \tag{2.32}$$

gesetzt wird und insbesondere

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \to \infty \tag{2.33}$$

gilt.

Beweis: Siehe [34, Lemma 3.4., Lemma 3.5.]. ■

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.27 erhält man das

Korollar 2.28 *Die Polynome*

$$p_n^{(\alpha,\beta)} := \left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)} = \sqrt{\frac{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\, P_n^{(\alpha,\beta)}$$

bilden ein Orthonormalsystem bezüglich $\mathrm{d}\mu_{\alpha,\beta}$.

Satz 2.29 *Es seien* $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$. *Für* $\nu = 0, 1, \ldots$ *gilt*

$$\left|P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\right| \leq c \times \begin{cases} \min\left\{(\nu+1)^\alpha, (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\right\} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \min\left\{(\nu+1)^\beta, (1-x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}(\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\right\} & \text{für } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Beweis: Siehe [43, Satz 7.32.2]. ■

Die folgenden zwei Sätze formulieren Zusammenhänge zwischen Jacobi-Polynomen verschiedener Exponenten. Diese Zusammenhänge werden zur Abschätzung gewisser Lebesgue-Konstanten für Jacobi-Polynome benötigt, in denen ein Exponent den Wert $-\frac{1}{2}$ besitzt.

Satz 2.30 *Es seien* $\alpha, \beta > -1$. *Dann gilt für alle* $n = 0, 1, \ldots$ *und alle* $x \in [-1, 1]$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) - \frac{n+\beta}{2n+\alpha+\beta} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x) \tag{2.35}$$

und

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) - \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta} P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x). \tag{2.36}$$

Beweis: Siehe [1, 22.7.18 und 22.7.19]. ■

Satz 2.31 *Für* $\alpha > -1$, $x \in [-1, 1]$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\frac{P_{2n}^{(\alpha,\alpha)}(x)}{P_{2n}^{(\alpha,\alpha)}(1)} = \frac{P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(2x^2-1)}{P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(1)}. \tag{2.37}$$

Beweis: Siehe [1, 22.5.22]. ■

Zur Abschätzung der Lebesgue-Konstanten gewisser verallgemeinerter Dirichlet-Kerne mit klasssichen Jacobi-Polynomen benötigt man noch die drei folgenden Resultate.

Satz 2.32 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $S \in \mathbb{N}$ und $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $h_k = 0$ für alle hinreichend großen k ist. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &|\sum_{k=0}^{\infty} h_k p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi)| \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \min\{(k+1), \frac{1}{|\theta-\varphi|}\}^{\max\{\alpha,\beta\}+S+\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{S} (k+1)^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}-S+m} |\Delta^m h_k|, \end{aligned} \tag{2.38}$$

wobei Δ gemäß (2.3) definiert wurde.

Beweis: Siehe [31, Satz 5.1]. ∎

Satz 2.33 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ und $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $h_k = 0$ für alle hinreichend großen k ist. Dann gilt:*

$$\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{\infty} h_k p_k^{(\alpha,\beta)}(x) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\mu_{\alpha,\beta}}[-1,1]} \leq c \| \sum_{k=0}^{\infty} h_k p_k^{(\alpha,\beta)}(1) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\mu_{\alpha,\beta}}[-1,1]},$$

wobei $c > 0$ eine von $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige Konstante ist.

Beweis: Siehe [30, Lemma 4.6]. ∎

Satz 2.34 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$. Dann gibt es eine Konstante $c = c_{\alpha,\beta} > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\| \sum_{j=0}^{n} p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\mu_{\alpha,\beta}}[-1,1]} \leq c \begin{cases} n^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}} & \text{für } \max\{\alpha,\beta\} > -\frac{1}{2}, \\ \log n & \text{für } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Beweis: Siehe [39]. ∎

Als Vergleichsgrundlage für die Diskussion alternativer Vorgehensweisen beim Beweis von Hauptsatz 1.1 seien die folgenden drei Sätze angegeben.

Satz 2.35 *Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta > -1$ und $c_{nk} \in \mathbb{R}$ $(n, k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n)$ so gewählt, dass für alle $x \in [-1, 1]$*

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$$

ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_{nk} = &\frac{(n+\gamma+\delta+1)_k (k+\gamma+1)_{n-k} (2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{(n-k)!\Gamma(2k+\alpha+\beta+2)} \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+k, n+k+\gamma+\delta+1, k+\alpha+1 \\ k+\gamma+1, 2k+\alpha+\beta+2 \end{matrix}; 1\right). \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [2, Lemma 7.1.1]. ■

Satz 2.36 *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existieren für alle natürlichen Zahlen $q \geq 1$ komplexwertige und auf $(0, \pi)$ stetige Funktionen A_m, so dass für alle $\theta \in (0, \pi)$ gilt:*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = 2\Re\left\{\sum_{m=0}^{q-1} A_m(\theta)(n+1)^{-m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right\} + \mathcal{O}((n+1)^{-q-\frac{1}{2}}),$$

wobei der $\mathcal{O}$-Term auf kompakten Teilintervallen von $(0, \pi)$ gleichmäßig ist.

Beweis: Siehe [43, Satz 8.21.9]. ■

Die sogenannte Asymptotik vom Hilb-Typ wird formuliert im

Satz 2.37 *Es seien $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig und $c, \varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) &= N^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} J_\alpha(N\theta)\\ &\quad + \begin{cases}\theta^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{für } cn^{-1} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon,\\ \theta^{\alpha+2}\mathcal{O}\left(n^{\alpha}\right) & \text{für } 0 < \theta \leq cn^{-1},\end{cases}\end{aligned}$$

wobei $N := \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird.

Beweis: Siehe [43, Satz 8.21.12]. ■

Besonders wichtig für den Beweis von Hauptsatz 1.1 ist die folgende gleichmäßige asymptotische Entwicklung für Jacobi-Polynome durch Bessel-Funktionen.

Satz 2.38 *Es seien $\alpha, \beta > -1$. Dann gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_m > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\theta \in (0, \pi - \varepsilon]$*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\left\{J_\alpha(N\theta)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{a_{k,0}(\theta^2)}{N^k} + \theta J'_\alpha(N\theta)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{b_{k,0}(\theta^2)}{N^k} + \varepsilon_m(\theta)\right\} \tag{2.39}$$

und

$$|\varepsilon_m(\theta)| \leq C_m N^{-m}\left\{|J_\alpha(N\theta)| + \theta|J'_\alpha(N\theta)|\right\} \tag{2.40}$$

ist, wobei $N := n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird, C_m eine von θ und n unabhängige Konstante ist und die Funktionen $a_{k,0}(\theta^2)$, $b_{k,0}(\theta^2)$ analytisch in θ^2 sind für $|\theta| < \pi$. Insbesondere gilt:

$$b_{0,0}(\theta^2) = 0 \text{ und } a_{0,0}(\theta^2) = 1 + \frac{2+\alpha+3\beta}{24}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \text{ für } \theta \to 0. \tag{2.41}$$

Beweis: Siehe [50, Satz 1, Lemma 1, Lemma 2]. ■

Schließlich benötigt man noch eine von Koornwinder bewiesene Produktformel für Jacobi-Polynome.

Satz 2.39 *Es seien* $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$, $\mathcal{R} := [0,1] \times [0,\pi]$ *und*

$$\begin{aligned} F(x,y;r,\phi) := & \frac{(1+x)(1+y)}{2} + \frac{(1-x)(1-y)}{2} r^2 \\ & + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} r \cos(\phi) - 1 \end{aligned} \tag{2.42}$$

für $x, y \in [0,1]$, $r \in [0,1]$ *und* $\phi \in [0,\pi]$. *Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mu = \mu_{\alpha,\beta}$ *auf* $\mathcal{R}$, *so dass für alle* $n = 0, 1, \ldots$ *und alle* $x, y \in [-1,1]$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \int_{\mathcal{R}} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) P_n^{(\alpha,\beta)}(F(x,y;r,\phi)) \mathrm{d}\mu_{\alpha,\beta}(r,\phi). \tag{2.43}$$

Beweis: Siehe [25, 3., S. 129 - 132]. Hier finden sich auch die exakten Ausdrücke für das Wahrscheinlichkeitsmaß, die jedoch in unserem Zusammenhang unerheblich sind. ■

Eine zu (2.43) äquivalente Formel wurde von Gasper in [16] bereits 1971 entdeckt und bewiesen (ein Beweis findet sich auch in [25]), allerdings ist der Zusammenhang zwischen der Integrationsvariablen und den ursprünglichen Argumenten der Jacobi-Polynome wesentlich komplizierter, so dass sie für die hier verfolgten Zwecke nicht in Frage kommt.
Für die Abschätzungen der Lebesgue-Konstanten im 4. und 5. Kapitel benötigt man zwei Asymptotiken für $\left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}}$ bzw. $\left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$. Diese Asymptotiken waren nicht in der Literatur zu finden und sollen deshalb hier eigens bewiesen werden. Es gilt das

Lemma 2.40 *Zu* $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ *gibt es ausschließlich von* α, β *abhängende Konstanten* $c_0, c_1 > 0$ *und* $d_0, d_1 > 0$, *so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} = c_0 n^{\frac{1}{2}} + c_1 n^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{2.44}$$

und

$$\left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = d_0 \cdot n^{\alpha+\frac{1}{2}} + d_1 n^{\alpha-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\left(n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right). \tag{2.45}$$

Beweis zu (2.44)**:** Im Folgenden sei $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt.
1. Fall: Für $\alpha > 0, \beta \geq -\frac{1}{2}$ ist nach (2.32)

$$\begin{aligned} \left(h_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{2^{\alpha+\beta+1}(2n+2\lambda)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\beta+1)}} \\ &= c_{\alpha,\beta}\sqrt{n}\sqrt{(1+\frac{\lambda}{n})\left(n^\alpha \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)\left(n^\alpha \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}\right)^{-1}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Wegen $\alpha > 0$ und $\beta \geq -\frac{1}{2}$ ist $\alpha + 1 > 1$ und $\alpha + \beta + 1 > \beta + 1 > 0$. Somit lässt sich Satz 2.8, (2.11) mit $\sigma_1 := 1 - \alpha$ auf $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$ und mit $\sigma_2 := 1 - \alpha = \sigma_1$ auf $\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ anwenden, und man erhält für $n \to \infty$

$$n^{\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = B_0^{(1-\alpha)}(1) - B_1^{(1-\alpha)}(1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-2}\right) \tag{2.47}$$

und

$$n^{\alpha} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+2\lambda)} = B_0^{(1-\alpha)}(\beta+1) - B_1^{(1-\alpha)}(\beta+1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-2}\right). \tag{2.48}$$

Außerdem folgt aus Bemerkung 2.7, (2.9) die Abschätzung

$$B_0^{(1-\alpha)}(1) = B_0^{(1-\alpha)}(\beta+1) = 1 > 0. \tag{2.49}$$

Wegen (2.49) lässt sich nach Satz 2.3 mit $n^{\alpha} \frac{\Gamma(u+\beta+1)}{\Gamma(u+\alpha+\beta+1)}$ auch der Kehrwert $n^{-\alpha} \frac{\Gamma(u+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(u+\beta+1)}$ in eine Asymptotik entwickeln, wobei wegen (2.48) und (2.7) für ihre zwei ersten Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{B_0^{(\sigma_2)}(\beta+1)} = 1 > 0 \tag{2.50}$$

und

$$d_1 = -\frac{a_1 d_0}{a_0} = -a_1 = -B_1^{(\sigma_2)}(\beta+1) \tag{2.51}$$

gilt. Mit (2.47), (2.50) und (2.51) ergibt sich für den Term unter der Wurzel von (2.46):

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\left(1 - B_1^{(1-\alpha)}(1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right)\left(1 - B_1^{(1-\alpha)}(\beta+1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right)$$
$$= 1 + (\lambda + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} + B_1^{(1-\alpha)}(\beta+1))\frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}),$$

wobei $a_0 := 1$ und $a_1 := (\lambda + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} + B_1^{(1-\alpha)}(\beta+1))$ gesetzt wurde. Für hinreichend großes n erhält man nun

$$\left|\sqrt{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})} - \sqrt{a_0} - \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \frac{1}{n}\right| \leq \frac{\left|a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) - a_0 - 2\sqrt{a_0} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \frac{1}{n} - \frac{a_1^2}{4a_0}(\frac{1}{n})^2\right|}{\sqrt{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})} + \sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \frac{1}{n}}$$
$$\leq \frac{2}{\sqrt{a_0}}(\mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) + \frac{a_1^2}{4a_0} \frac{1}{n^2}) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}).$$

Damit ist (2.44) für den 1. Fall bewiesen.
2. Fall: Für $\alpha = 0$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$ ergibt sich aus (2.32)

$$(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} \cdot (2n + 2\lambda)\right]^{\frac{1}{2}} = c_{\alpha,\beta} \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{n}},$$

woraus sich wegen

$$\sqrt{1 + \frac{\lambda}{n}} = 1 + \frac{\lambda}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

auch

$$(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2} = c_{\alpha,\beta}\sqrt{n} + \frac{c_{\alpha,\beta}\lambda}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}})$$

ergibt. Damit ist (2.44) im 2. Fall bewiesen.
3. Fall: Für $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta \geq -\frac{1}{2}$ gilt $1 > \alpha+1 > 0$ und $\beta+1 > \beta+\alpha+1 > 0$. Somit gibt es zu $\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}$ und $\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$ gemäß Satz 2.8, (2.11) Asymptotiken, deren nullte Koeffizienten - aus den gleichen Gründen wie im Beweis zu $\alpha > 0$ - echt positiv sind, so dass sich gemäß Satz 2.3 ihre Inversen sowie der gesamte Wurzelterm asymptotisch entwickeln lassen. Unter Beachtung von

$$(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} = c_{\alpha,\beta}\sqrt{n}\sqrt{(1+\frac{\lambda}{n})\left(n^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\right)^{-1}\left(n^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\beta+1)}\right)}$$

folgt (2.46) für den 3. Fall.
4. Fall: Für $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2}$ gilt $1 > \alpha+1 > 0$ und $\beta+1 > \beta+\alpha+1 > 0$. Der Beweis ergibt sich nun analog zum 3. Fall.
5. Fall: Für $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ ergibt sich aus (2.46) zusammen mit den Berechungen aus (2.50) und (2.51)

$$\left(h_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\right)^{-\frac{1}{2}} = c_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\sqrt{n}\left(n^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\right)^{-1} = \sqrt{n}\left(1 - B_1^{(\frac{1}{2})}(0,5)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\frac{1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right),$$

womit auch der 5. Fall und damit der Beweis von (2.44) abgeschlossen ist.
Beweis von (2.45): Für $\alpha > 0$ und $\beta \geq -\frac{1}{2}$ ergibt sich aus (2.30) und (2.32)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} = c_{\alpha,\beta}n^{\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt{(1+\frac{\lambda}{n})\left(n^{\alpha}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{-1}\left(n^{\alpha}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}\right)^{-1}}.$$

Mit den gleichen Überlegungen, die schon zum Beweis der Asymptotik (2.44) geführt haben, zeigt man die Existenz der Asymptotik (2.45). Die Fälle $\alpha = 0$ und $\beta \geq -\frac{1}{2}$ bzw. $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta \geq -\frac{1}{2}$ bzw. $\beta > \alpha = -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ergeben sich ebenfalls analog zum Beweis von (2.44). Damit sind (2.45) und Lemma 2.40 insgesamt bewiesen.■

2.8 Integraldarstellungen von Jacobi-Polynomen

Für die Abschätzungen gewisser Lebesgue-Konstanten müssen Jacobi-Polynome auf trigonometrische Funktionen zurückgeführt werden. Dazu werden in dieser Arbeit unter anderem auch die von Gasper in [15] entdeckten Integraldarstellungen für Jacobi-Polynome, sogenannten Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ, verwendet. Diese Möglichkeit wurde wohl zum ersten Mal - allerdings in einem etwas anderen Zusammenhang - von Petrushev und Xu in [35] gesehen. Im Lauf der vergangenen Jahrzehnte haben sich jedoch einige Inkonsistenzen im Gebrauch dieser Formeln eingeschlichen (vgl. Bemerkung 2.43), die wir zunächst beseitigen. Deswegen werden die hierzu wichtigsten Resultate aus [35] und [15] nochmals vollständig bewiesen.

Satz 2.41 *Für* $0 < \theta < \pi$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -1$ *und* $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ *gilt:*

1. $$\begin{aligned}\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= \frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot(1-\cos\theta)^{-\alpha}\\ &\quad\times\int_0^\theta \cos\left((k+\lambda)\phi\right)\cdot\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\ &\quad\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi \qquad (2.52)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= \frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot(1-\cos\theta)^{-\alpha}\\ &\quad\times\int_0^\theta \cos\left((k+\lambda)\phi\right)\cdot\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\ &\quad\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\phi \qquad (2.53)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= \frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot(1-\cos\theta)^{-\alpha}(1+\cos\theta)^{-\beta}\\ &\quad\times\int_0^\theta \cos\left((k+\lambda)\phi\right)\cdot\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}\\ &\quad\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\alpha-\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi. \qquad (2.54)\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis von (2.52) und (2.53) orientiert sich eng an [15]. Gleichung (2.54) konnte in der Literatur nicht gefunden werden und wird hier neu bewiesen.
Beweis von Gleichung (2.52): Aus $\cos(2a\theta) = {}_2F_1\left(a,-a;\frac{1}{2};\sin^2\theta\right)$ (vgl. [1, 15.1.17]) und $\frac{1}{2}(1-\cos x) = \sin^2\frac{x}{2}$ folgt zunächst

$$\cos(a\theta) = {}_2F_1\left(a,-a;\frac{1}{2};\frac{1-\cos\theta}{2}\right). \tag{2.55}$$

Nach (2.30) und (2.28) ist weiter

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(1)\ {}_2F_1\left(-k,k+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right). \tag{2.56}$$

Aus (2.55), (2.56), Satz 2.22 für

$$\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \quad \mu := \tfrac{1}{2}, \quad a := \frac{\alpha+\beta+1}{2}+k$$

und der Substitution

$$t(\phi) := \frac{1-\cos\phi}{1-\cos\theta}$$

erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
P_k^{(\alpha,\beta)}(x) &= P_k^{(\alpha,\beta)}(1)\ {}_2F_1\left(-k, k+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-\cos\theta}{2}\right) \\
&= P_k^{(\alpha,\beta)}(1) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^\theta \frac{(1-\cos\phi)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha+1-\frac{1}{2}-1}}{(1-\cos\theta)^{\alpha+1-\frac{1}{2}-1}} \\
&\quad \times (1+\cos\phi)^{k+\lambda-k-2\lambda} \cdot 2^{-(\lambda-k+k+2\lambda)} \\
&\quad \times\ {}_2F_1\left(\lambda+k, \lambda-k-2\lambda; \frac{1}{2}; \frac{1-\cos\phi}{2}\right) \\
&\quad \times\ {}_2F_1\left(\lambda, \frac{\alpha+\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right) \frac{\sin\phi}{1-\cos\theta} \mathrm{d}\phi \\
&= P_k^{(\alpha,\beta)}(1) \cdot \frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} (1-\cos\theta)^{-\alpha} \int_0^\theta \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad \times \cos\left((\lambda+k)\phi\right)\ {}_2F_1\left(\lambda, \frac{\alpha+\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right) \mathrm{d}\phi,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt $(1-\cos^2\phi)^{-1/2} \cdot \sin\phi = 1$ berücksichtigt wurde. Damit ist (2.52) bewiesen.
Beweis von Gleichung (2.53): Man wendet Satz 2.21, (2.21) mit

$$
a := \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b := \frac{\alpha+\beta+1}{2} = \lambda, \quad c := \alpha + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x := \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}
$$

auf

$$
{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)
$$

in (2.52) an und erhält

$$
\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= c_{\alpha,\beta} \int_0^\theta (1-\cos\theta)^{-\alpha} \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \cdot \cos\left((\lambda+k)\phi\right) \\
&\quad \times\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \lambda; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= c_{\alpha,\beta} \int_0^\theta (1-\cos\theta)^{-\alpha} \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-1/2}}{(1+\cos\phi)^{(\alpha+\beta)/2}} \cdot \cos\left(\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}+k\right)\phi\right) \\
&\quad \times \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}}{-\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\phi}}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= c_{\alpha,\beta} \int_0^\theta (1-\cos\theta)^{-\alpha} \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \cdot \cos\left((\lambda+k)\phi\right) \\
&\quad \times\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1+\cos\theta}\right) \mathrm{d}\phi,
\end{aligned}
$$

wobei $c_{\alpha,\beta} := \frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$ gesetzt wird. Damit ist (2.53) bewiesen.
Beweis von Gleichung (2.54): Als Anwendung von Satz 2.21, (2.22) auf

$$
{}_2F_1\left(\lambda, \frac{\alpha+\beta}{2}; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)
$$

in (2.52) erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= c_{\alpha,\beta}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\int_0^\theta \cos((\lambda+k)\phi)\,\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac12}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad\times\ {}_2F_1\left(\lambda,\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha+\frac12;\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= c_{\alpha,\beta}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\int_0^\theta \cos((\lambda+k)\phi)\,\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac12}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad\times\ \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)^{-\beta}\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\frac{\alpha-\beta+1}{2};\alpha+\frac12;\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= c_{\alpha,\beta}(1-\cos\theta)^{-\alpha}(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_0^\theta \cos((\lambda+k)\phi)\,\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac12}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}} \\
&\quad\times\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\frac{\alpha-\beta+1}{2};\alpha+\frac12;\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi,
\end{aligned}$$

wobei wieder $c_{\alpha,\beta}=\frac{2^\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\alpha+\frac12)}$ gesetzt wird. Damit ist (2.54) und somit Satz 2.41 insgesamt bewiesen. ■

Eine wichtige Variante zu Satz 2.41 liefert das

Korollar 2.42 *Für $0<\theta<\pi$, $\alpha>-1$ und $\beta>-\frac12$ gilt*

1.
$$\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)} &= c_{\beta,\alpha}(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_\theta^\pi \cos(k\phi-\lambda(\pi-\phi))\,\frac{(\cos\theta-\cos\phi)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad\times\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2};\beta+\frac12;\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)} &= c_{\beta,\alpha}(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_\theta^\pi \cos(k\phi-\lambda(\pi-\phi))\,\frac{(\cos\theta-\cos\phi)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad\times\ {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac12;\frac{\cos\phi-\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\mathrm{d}\phi \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)} &= c_{\beta,\alpha}\int_\theta^\pi \frac{\cos(k\phi-\lambda(\pi-\phi))\,(\cos\theta-\cos\phi)^{\beta-\frac12}}{(1+\cos\theta)^\beta(1-\cos\theta)^\alpha(1-\cos\phi)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \\
&\quad\times\ {}_2F_1\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2};\beta+\frac12;\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi, \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

wobei $c_{\beta,\alpha}:=\frac{2^\lambda\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\beta+\frac12)}$ gesetzt wurde.

Beweis: Der Beweis des Korollars ist eine Ausarbeitung der Argumente von Petrushev und Xu aus [35].
Beweis zu Gleichung (2.57): Aus Korollar 2.26, (2.29) und Satz 2.41, (2.52) ergibt sich nach der Variablentransformation $\phi\to\pi-\phi$ im Integral und nach Vertauschen der Reihenfolge

von α und β

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)} = (-1)^k \frac{P_k^{(\beta,\alpha)}(\cos(\pi-\theta))}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)}\\
&= (-1)^k c_{\beta,\alpha}\cdot(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_0^{\pi-\theta}\cos\left((k+\lambda)\phi\right)\\
&\quad\times\frac{(\cos\phi+\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\;{}_2F_1\left(\lambda,\frac{\alpha+\beta}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{\cos\phi+\cos\theta}{1+\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi\\
&= (-1)^k c_{\beta,\alpha}\cdot(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_\pi^{\theta}\cos\left((k+\lambda)(\pi-\phi)\right)\frac{(-\cos\phi+\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\
&\quad\times\;{}_2F_1\left(\lambda,\frac{\alpha+\beta}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{-\cos\phi+\cos\theta}{1-\cos\phi}\right)(-1)\mathrm{d}\phi\\
&= (-1)^k c_{\beta,\alpha}\cdot(1+\cos\theta)^{-\beta}(-1)(-1)^k\int_\theta^{\pi}\cos\left(k\phi-\lambda(\pi-\phi)\right)\frac{(\cos\theta-\cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\
&\quad\times\;{}_2F_1\left(\lambda,\frac{\alpha+\beta}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)(-1)\mathrm{d}\phi\\
&= c_{\beta,\alpha}(1+\cos\theta)^{-\beta}\int_\theta^{\pi}\cos\left(k\phi-\lambda(\pi-\phi)\right)\frac{(\cos\theta-\cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\
&\quad\times\;{}_2F_1\left(\lambda,\frac{\alpha+\beta}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi;
\end{aligned}
$$

wobei $c_{\beta,\alpha} := \frac{2^\lambda\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}$ definiert wird. Damit ist Gleichung (2.57) bewiesen, analog bestätigt man die Gleichungen (2.58) und (2.59). Damit ist dann Korollar 2.42 insgesamt bewiesen. ■

Es folgen noch einige Bemerkungen zu den am Anfang dieses Abschnitts bereits erwähnten Inkonsistenzen im Gebrauch der Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ, die im Blick auf die in dieser Arbeit zu beweisenden Behauptungen aber einen nicht unerheblichen Reperatur-Aufwand mit sich brachten (vgl. dazu auch die Bemerkung 2.24).

Bemerkung 2.43 *1. In [15, Formel (8), S. 208] wurde statt* (2.53) *die entsprechende Formel ohne den Faktor* $(1-\cos\theta)^{-\alpha}$ *angegeben.*
2. In den Formeln von [35, S.3] finden sich mehrere Fehler. Statt (2.53) *wurde folgende Gleichung notiert, in der an den Stellen (!)* ϕ *statt richtig* θ *bzw.* $-$ *statt richtig* $+$ *steht:*

$$
\begin{aligned}
\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} &= c_{\alpha,\beta}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\int_0^{\theta}\cos\left((k+\lambda)\phi\right)\frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi(!))^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\
&\quad\times\;{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-(!)\cos\theta}\right)\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

und statt (2.58) *wurde folgende Gleichung angegeben, in der an der Stelle (!)* ϕ *und* θ

vertauscht wurden:

$$\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\alpha)}(1)} = c_{\alpha,\beta}(1+\cos\theta)^{-\beta} \int_\theta^\pi \cos\left(k\phi - \lambda(\pi-\phi)\right) \frac{(\cos\theta - \cos\phi)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\phi(!))^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\phi-\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) \mathrm{d}\phi.$$

2.9 Fourier-Analysis

Für den Beweis von Hauptsatz 1.1 werden einige Begriffe und Sachverhalte aus der Fourier-Analysis benötigt, wie beispielsweise die Summationsformel von Poisson sowie der Zusammenhang zwischen den Glattheitsbedingungen einer Funktion und dem Abklingverhalten ihrer Fourier-Transformierten. Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich die Lokalisierungseigenschaften gewisser verallgemeinerter Kernfunktionen, d.h. Funktionen der Form

$$K_n(t) := \sum_{k=0}^{\infty} g(\frac{k}{n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

herleiten, wobei g einen kompakten Träger besitzt und bestimmte Differenzierbarkeits- und Symmetrieeigenschaften besitzt.

Definition 2.44 *1. Die diskrete Fourier-Transformierte bzw. der n-te Fourier-Koeffizient einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ wird für jedes $n \in \mathbb{Z}$ definiert durch*

$$\widehat{f}(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Die Folge $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt endliche Fourier-Transformierte zu f und man schreibt

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

wobei die Reihe nicht notwendigerweise konvergent sein muß.
2. Die kontinuierliche bzw. stetige Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

Als unmittelbare Konsequenz aus dem Stetigkeitssatz für parameterabhängige Integrale (vgl. [24, Kap. 8.4, S. 274]) erhält man das

Lemma 2.45 *Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und somit auf ganz $\mathbb{R}$ auch punktweise definiert.*

Gewisse Funktionen lassen sich auch als Integral mittels ihrer Fourier-Transformierten darstellen. Dieser Zusammenhang wird im sogenannten Umkehrsatz für die Fourier-Transformierte formuliert. Es gilt der

Satz 2.46 *Es sei f eine Funktion mit $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \mathrm{d}x$$

oder mit unseren Normierungen kurz $\hat{\hat{f}}(-t) = 2\pi f(t)$. Dabei besteht Gleichheit in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist.

Beweis: Siehe [26, Korollar 16.15]. ■

Im nächsten Satz werden die für den Beweis von Hauptsatz 1.1 benötigten Abkling- und Glattheitseigenschaften von Funktionen und ihren Fourier-Transformierten zusammengefasst.

Satz 2.47 *1. Es sei $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\widehat{(f')}(\xi) = \mathrm{i}\xi \widehat{f}(\xi). \tag{2.60}$$

2. Zu jedem $f \in C_c^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gibt es eine Konstante $c_{k,f} > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq c_{k,f} \cdot (1 + |\xi|)^{-k} \tag{2.61}$$

mit

$$c_{k,f} = c_k \cdot \max\{\|f^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R})} : j = 0, ..., k\} \quad \textit{gilt.} \tag{2.62}$$

Insbesondere ist für jedes $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ integrierbar, d.h. es ist $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Beweis: Zu 1. siehe [13, § 12, Satz 1], zu 2. siehe [13, § 12, Korollar 1]. ■

Es folgen einige Bemerkungen zur Summationsformel von Poisson. Wir beginnen mit der

Definition 2.48 *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Die Periodisierung von f ist die 2π-periodische Funktion F, die definiert wird durch*

$$F(t) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi j)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, für die der entsprechende Grenzwert existiert.

Zunächst geben wir eine Version der klassischen Summationsformel von Poisson an, die einen Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformierten einer Funktion f und der Fourier-Reihe ihrer Periodisierung F hergestellt.

Satz 2.49 *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R})$.
1. Die Periodisierung F *von* f *existiert für fast alle* $t \in \mathbb{T}$, *und es ist* $F \in L^1(\mathbb{T})$ *mit* $\|F\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
2. Für die Fourier-Reihe der Periodisierung F *von* f *gilt*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t+2\pi j) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int}, \tag{2.63}$$

d.h. $\widehat{F}(n) = \widehat{f}(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Siehe [26, Satz 18.1]. ■

Von größtem Interesse ist die Frage nach den Bedingungen, unter denen die Identität (2.63) punktweise gilt und nicht nur formal im Sinne von Fourier-Reihen. Wir wenden die Summationsformel von Poisson in verschiedenen Varianten an. Für den Beweis von Hauptsatz 1.1 besonders wichtige Varianten der Poissonschen Summationsformel formuliert der folgende

Satz 2.50 *1. Es sei* g *eine Funktionen mit* $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ *und* $(g(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g}(n)\mathrm{e}^{int} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}}(t+2\pi j) \tag{2.64}$$

und zwar sowohl bezüglich der $L^1(\mathbb{T})$*-Norm als auch bezüglich der* $C(\mathbb{T})$*-Norm, d.h. bezüglich der Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$, *wobei man mit dem Symbol* $\bar{}$ *die komplexe Konjugation bezeichnet.*
2. Es sei g *eine Funktion mit* $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, *die reellwertig ist und einen kompakten Träger besitzt. Dann gilt für alle* $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und alle* $t \in \mathbb{T}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\frac{n}{\omega})\mathrm{e}^{-int} = \omega \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega(t+2\pi j)).$$

Beweis: Zu 1. und 2. siehe [17, Kap. 2, Korollar 1]. ■

2.10 Verschiedenes

In diesem Abschnitt sollen noch einige allgemeine, nicht eindeutig unter eine der bisherigen Überschriften zu subsumierenden Sachverhalten zitiert werden. Zunächst sei ein Spezialfall der allgemeinen Kettenregel für die Differentiation auf normierten Vektorräumen formuliert.

Lemma 2.51 *Es seien* $g(x) = \sqrt{x}$ *und* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *mit* $f \in C^p(\mathbb{R}^+)$ $(p \in \mathbb{N})$. *Dann gilt*

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^{(p)} = \sum_{\alpha\in S(p)} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \alpha_i!} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^k \alpha_i} \prod_{i=1}^k \left(f^{(i)}(x)\right)^{\alpha_i}, \tag{2.65}$$

wobei $S(p)$ *die Menge aller* p*-Tupel* α *nicht-negativer Zahlen* α_i *mit* $\sum_{i=1}^p i\alpha_i = p$ *ist.*

Beweis: Die allgemeine Regel wird bewiesen in [11, S. 222 f.]. ■

Den Grenzwertsatz von Abel formuliert der

Satz 2.52 *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *konvergiere für die positive Zahl* $x = R$, *wobei* R *ihr Konvergenzradius ist. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf* $[0, R]$ *und stellt dort eine stetige Funktion dar.*

Beweis: Siehe [23, S. 307]. ■

Für die Abschätzung gewisser Summen von Produkten aus verallgemeinerten Kernfunktionen benötigt man die folgende Ungleichung.

Lemma 2.53 *Es sei* σ *eine auf* $[0, \infty)$ *beschränkte, monoton fallende und Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(|x+k|)\sigma(|y+k|) \leq A_\sigma \sigma\left(\frac{|x-y|}{5}\right) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $A_\sigma > 0$ *eine ausschließlich von* σ *abhängende Konstante ist.*

Beweis: Siehe [41, Lemma 2]. ■

Schließlich benötigt man noch eine auf Timan zurückgehende Ungleichung.

Lemma 2.54 *Es sei* $\tau(t, \theta)$ *bezüglich der zweiten Variablen ein trigonometrisches Polynom vom Grad* n. *Dann gilt für alle* $m \in \mathbb{N}$ *und* $t \in \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left|\tau(t, \frac{2k}{m}\pi)\right| \leq \left(\frac{m}{2\pi} + n\right) \int_{-\pi}^{\pi} |\tau(t, \theta)| \mathrm{d}\theta. \tag{2.66}$$

Beweis: Siehe [44, Kap. 4.9.1.(3)]. ■

Kapitel 3

Die Konstruktion polynomialer Schauder-Basen

Zum Beweis von Hauptsatz 1.1 wird der allgemeine Ansatz zur Konstruktion gradoptimierter und bezüglich eines gegebenen Maßes μ orthonormierter Polynomfolgen von Girgensohn aus [17] übernommen. In Abschnitt 3.1 wird dieser Ansatz zunächst ganz allgemein und in enger Orientierung an [17, Kap. 4.1] beschrieben: Im Wesentlichen wird hier gezeigt, wie sich die Konstruktion der Polynomfolge auf die Untersuchung gewisser polynomialer Unterräume $V^{(j)}, W^{(j)} \subseteq C[-1,1]$ zurückführen lässt: Neben der gleichmäßigen Beschränktheit ihrer Lebesgue-Konstanten müssen insbesondere bestimmte Orthogonalitätsbeziehungen dieser Räume zueinander sowie ihrer jeweiligen Basisfunktionen untereinander erfüllt sein, um aus den Basiselementen dieser Räume eine entsprechende Polynomfolge auswählen zu können. In Abschnitt 3.2 werden dann in Abhängigkeit von den Parametern N, M und μ konkrete Funktionen $\varphi_k^{(N,M)}$, $\psi_k^{(N,M)}$ und entsprechende Räume $V^{(N,M)}$ und $W^{(N,M)}$ ($N, M \in \mathbb{N}$, $N > 3M$) definiert, für die sich gerade die obengenannten Orthogonalitätsbeziehungen überprüfen lassen. Der Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten dieser Räume wird in den zwei folgenden Kapiteln 4 und 5 erbracht. Erst im letzten Kapitel 6 wird gezeigt, wie sich schließlich aus den Basisfunktionen dieser allgemeinen Räume die Schauder-Basis selbst zusammensetzen lässt.
Girgensohns Konstruktionsansatz lässt sich auf eine umfangreichere Klasse von Maßen anwenden und soll deshalb gleich in größerer Allgemeinheit dargestellt werden. Dazu sei in diesem Kapitel μ ein positives, endliches Borel-Maß, dessen Träger $\operatorname{supp} \mu = [-1,1]$ ist und dessen Momente $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mathrm{d}\mu(x)$ für alle $n = 0, 1, \ldots$ existieren und endlich sind. Ferner bezeichne die Folge $(p_n^\mu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eindeutig bestimmte Folge zueinander (bezüglich μ) orthonormaler Polynome, für die $\operatorname{grad} p_n^\mu = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist und deren Leitkoeffizienten positiv sind.

3.1 Der Konstruktionsansatz

Der Vollständigkeit halber sei der Begriff einer gradoptimierten polynomialen und (bezüglich μ) orthonormierten Schauderbasis nochmals präzise definiert.

Definition 3.1 *Es seien* $\varepsilon > 0$ *und* μ *ein endliches positives Borel-Maß, dessen Träger* $\operatorname{supp}\mu \subseteq [-1,1]$ *ist und dessen Momente* $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mathrm{d}\mu(x)$ *für alle* $n = 0, 1, ...$ *existieren und endlich sind.*
1. Eine Funktionenfolge $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *in* $C[-1,1]$ *heißt* Schauder-Basis *von* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$*, wenn es für alle* $f \in C[-1,1]$ *eindeutig bestimmte Koeffizienten* $\alpha_k \in \mathbb{R}$ *(*$k \in \mathbb{N}_0$*) gibt mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_{\mu,k}\|_\infty = 0. \tag{3.1}$$

2. Eine Funktionenfolge $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *in* $C[-1,1]$ *heißt* polynomiale Schauder-Basis *von* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$*, falls sie eine Schauder-Basis von* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ *ist und alle* $p_{\mu,k}$ *Polynome sind.*
3. Eine Funktionenfolge $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *in* $C[-1,1]$ *heißt* orthonormale polynomiale Schauder-Basis von $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ bezüglich μ*, falls sie eine polynomiale Schauder-Basis von* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ *ist und* $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *ein Orthonormalsystem bezüglich* μ *ist, d.h.*

$$\langle p_{\mu,k}, p_{\mu,l}\rangle = \int_{-1}^{1} p_{\mu,k}(x)p_{\mu,l}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{k,l} \quad (k, l \in \mathbb{N}_0). \tag{3.2}$$

4. Eine Funktionenfolge $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *in* $C[-1,1]$ *heißt* gradoptimierte (bezüglich $\varepsilon > 0$), orthonormale polynomiale Schauder-Basis von $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ bezüglich μ*, falls sie eine orthonormale polynomiale Schauder-Basis von* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ *bezüglich* μ *ist und die Gradbedingung*

$$\operatorname{grad} p_k \le k(1+\varepsilon) \tag{3.3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ *erfüllt ist.*

In folgendem Lemma werden zunächst einige wohlbekannte hinreichende Bedingungen formuliert, unter denen eine Folge (bezüglich μ) orthonormaler Funktionen $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis für $(C[-1,1], ||\cdot||_\infty)$ bildet.

Lemma 3.2 *Es sei* μ *ein endliches positives Borel-Maß mit* $\operatorname{supp}\mu \subseteq [-1,1]$ *und Momenten* $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mathrm{d}\mu(x)$*, die für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *existieren und endlich sind. Es sei ferner* $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein Orthonormalsystem bezüglich* μ *in* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$*.*
1. Konvergiert die Summe $\sum_{k=0}^{m} c_k p_{\mu,k}$ *gleichmäßig gegen ein* $f \in C[-1,1]$*, so gilt für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*, dass* $c_k = \langle f, p_{\mu,k}\rangle$ *ist.*
2. Wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind, dann ist die Folge $(p_{\mu,k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine Schauder-Basis für* $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$*:*
a) Für jedes Polynom q *existiert ein* $n_q \in \mathbb{N}_0$ *mit* $q = \sum_{k=0}^{n_q} \langle q, p_{\mu,k}\rangle p_{\mu,k}$*.*
b) Es gibt eine Zahl $A > 0$*, so dass* $\|\sum_{k=0}^{m} \langle f, p_{\mu,k}\rangle p_{\mu,k}\|_\infty \le A\|f\|_\infty$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *und alle* $f \in C[-1,1]$ *ist.*
3. Bedingung 2.b) ist äquivalent zu $\sup_{x\in[-1,1]}\|\sum_{k=0}^{m} p_{\mu,k}(x)p_{\mu,k}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} \le A$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis: Siehe [17, Lemma 2]. ■

Als „*Lebesgue-Konstanten*“ bezeichnet man für $m \in \mathbb{N}_0$ - wie üblich - die Normen

$$L_m := \sup_{x\in[-1,1]}\|\sum_{n=0}^{m} p_{\mu,n}(x)p_{\mu,n}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]}. \tag{3.4}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wird nun eine Folge $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ (bezüglich μ) orthonormaler Polynome mit grad $p_{\mu,n} = n(1+\varepsilon)$ konstruiert, für die im Fall der Jacobi-Gewichte $\omega_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ und $\max\{\alpha,\beta\} > -\frac{1}{2}$) gezeigt wird, dass es sich um eine Schauderbasis von $C[-1,1]$ handelt. Zum Beweis dieser Eigenschaft verwendet man Methoden aus der Wavelet-Theorie, d.h. die Polynome $p_{\mu,n}$ werden im Sinne einer Multiskalen-Analyse für $C[-1,1]$ konstruiert (ausführlich beschrieben in [22], [17]). Dazu werden endlichdimensionale, polynomiale Unterräume $V^{(j)}, W^{(j)} \subseteq C[-1,1]$ so gewählt, dass die $V^{(j)}$ aufsteigend sind und die $W^{(j)}$ das orthogonale Komplement von $V^{(j-1)}$ in $V^{(j)}$ sind, d.h.

$$\begin{array}{ccccccccccc} V^{(0)} & \subseteq & V^{(1)} & \subseteq & \cdots & \subseteq & V^{(j-1)} & \subseteq & V^{(j)} \subseteq & \cdots, \\ V^{(0)} & \oplus & W^{(1)} & \oplus & & \cdots & & \oplus & W^{(j)} = & V^{(j)}. \end{array} \tag{3.5}$$

Nun definiert man $n_j, m_j \in \mathbb{N}_0$ durch $\dim V^{(j)} = n_j + 1$ und $\dim W^{(j)} = 2m_j = n_j - n_{j-1}$ und bezeichnet mit $(\varphi_k^{\mu,(j)})_{k=0}^{n_j}$ bzw. $(\psi_k^{\mu,(j)})_{k=0}^{2m_j-1}$ eine orthonormale Basis von $V^{(j)}$ bzw. $W^{(j)}$; die Folge der $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ergibt sich aus den in dieser Reihenfolge angeordneten Basisfunktionen von $V^{(0)}$, $W^{(1)}$, $W^{(2)}$,..., d.h.

$$\begin{aligned} p_{\mu,k} &:= \varphi_k^{\mu,(0)} \text{ für } k = 0, ..., n_0 \\ p_{\mu,n_{j-1}+k+1} &:= \psi_k^{\mu,(j)} \text{ für } j \in \mathbb{N}, k = 0, ..., 2m_j - 1. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die so konstruierte Folge $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C[-1,1]$ ist, müssen die Bedingungen aus Lemma 3.2, 2.a) und 3. bewiesen werden. Diese Bedingungen ebenso wie die Bedingung grad $p_{\mu,n} \leq n(1+\varepsilon)$ lassen sich umformulieren als Bedingungen an die Räume $V^{(j)}$, $W^{(j)}$, so dass man in (3.5) nicht mehr die ganze Kette betrachten muss, sondern sich auf die Betrachtung einzelner Räume aus ihr beschränken kann.

Man fängt mit der Grad-Bedingung an und erhält aus den Grad-Schranken für die Polynome der Räume $V^{(0)}$ und $W^{(j)}$ allgemeine Grad-Schranken für beliebige $p_{\mu,n}$. Wäre für $V^{(0)}$ etwa

$$\text{grad } \varphi_k^{\mu,(0)} = k \text{ für } k = 0, ..., n_0,$$

also grad $p_{\mu,n} = n$ für alle $n = 0, ..., n_0$ und wäre außerdem im Blick auf $W^{(j)}$ etwa

$$\text{grad } \psi_k^{\mu,(j)} \leq n_j + m_j \text{ für } j \in \mathbb{N}, k = 0, ..., 2m_j - 1,$$

so gäbe es zu jedem $n > n_0$ ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $p_{\mu,n} \in W^{(j)}$ und damit $n \geq n_{j-1}$, grad $p_{\mu,n} \leq n_j + m_j$ und insbesondere

$$\frac{\text{grad } p_{\mu,n}}{n} \leq \frac{n_j + m_j}{n_{j-1}} = 1 + \frac{3m_j}{n_{j-1}} \tag{3.6}$$

erfüllt wäre. Unter der Annahme

$$\frac{3m_j}{n_{j-1}} \leq \varepsilon \quad \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

würde dann tatsächlich grad $p_{\mu,n} \leq n(1+\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Die Bedingung aus Lemma 3.2, 2.a) ist offensichtlich äquivalent zu: Für alle Polynome q gibt es ein $j = j(q)$ mit $q \in V^{(j)}$.

Für die Bedingung aus Lemma 3.2, 3. sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$, d.h. mit $n_{j-1} < n \leq n_j$ bzw. $n = n_j + h + 1$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $h \in \{0, ..., 2m_j - 1\}$. Die Einschränkung der orthogonalen Projektion $\mathcal{O}_n$ auf die Räume $\operatorname{span}\{p_{\mu,0},\ldots,p_{\mu,n_{j-1}}\} = V^{(j-1)}$ und $\operatorname{span}\{p_{\mu,n_{j-1}+1},\ldots,p_{\mu,n}\} \subseteq W^{(j)}$ liefert:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n} p_{\mu,i}(x)p_{\mu,i}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} \\
&\leq \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n_{j-1}} p_{\mu,i}(x)p_{\mu,i}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} + \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n} p_{\mu,i}(x)p_{\mu,i}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} \\
&\leq \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \varphi_k^{\mu,(j-1)}(x)\varphi_k^{\mu,(j-1)}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} + \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{h} \psi_k^{\mu,(j)}(x)\psi_k^{\mu,(j)}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} \\
&\leq \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \varphi_k^{\mu,(j-1)}(x)\varphi_k^{\mu,(j-1)}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]} + \sup_{x\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{2m_j-1} |\psi_k^{\mu,(j)}(x)| \cdot \|\psi_k^{\mu,(j)}(\cdot)\|_{L^1_\mu[-1,1]},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei für den Raum $V^{(j-1)}$ ausgenutzt wird, dass eine orthogonale Projektion auf den gesamten Raum nicht von der gewählten orthogonalen Basis abhängt. Würden nun Konstanten $A_1, A_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_j} \varphi_k^{\mu,(j)}(x)\varphi_k^{\mu,(j)}(\cdot) \|_{L^1_\mu[-1,1]} \leq A_1 \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \\
&\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{h} \psi_k^{\mu,(j)}(x)\psi_k^{\mu,(j)}(\cdot) \|_{L^1_\mu[-1,1]} \leq A_2 \text{ für alle } j \in \mathbb{N}, h = 0,...,2m_j - 1,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

existieren, so müssten die Lebesgue-Konstanten für die $(p_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt sein durch die Zahl $\max\{A_1 + A_2, A_3\}$, wenn für $A_3 > 0$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{h} \varphi_k^{\mu,(0)}(x)\varphi_k^{\mu,(0)}(\cdot) \|_{L^1_\mu[-1,1]} \leq A_3 \quad \text{für } h = 0,\ldots,n_0 \tag{3.10}$$

erfüllt wäre.

Bemerkung 3.3 *1. In den Kapiteln 4 und 5 wird bewiesen, dass die Konstanten A_1 und A_2 vom Quotienten m_j/n_j abhängen. Je näher dieser Quotient an der Null liegt, desto größer werden A_1 und A_2 sein. Deshalb müssen die Dimensionen m_j und n_j so gewählt werden, dass $\inf\{m_j/n_j\} > 0$ ist oder - noch besser - so, dass die Menge $\{m_j/n_j\}$ sogar endlich ist.*
2. In Abschnitt 3.2 und den Kapiteln 4 und 5 untersucht man zunächst nur gewisse allgemeine Räume $V^{(N,M)}$, $W^{(N,M)}$, deren Basisfunktionen $\varphi_k^{(N,M)}$ bzw. $\psi_k^{(N,M)}$ mit Hilfe der Parameter $N, M \in \mathbb{N}$ definiert werden. Erst im Kapitel 6 wird gezeigt, wie sich aus den Parametern N, M Folgen $(n_j, m_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ und damit die oben beschriebenen Räume $V^{(j)}$ und $W^{(j)}$ gewinnen lassen, so dass wieder die gesamte Kette der Räume $V^{(j)}, W^{(j)}$ im Sinn von (3.5) betrachtet wird.

3.2 Die Räume $V^{(N,M)}$ und $W^{(N,M)}$

In diesem Abschnitt werden zunächst allgemeinere Klassen von Räumen $V^{(N,M)}$, $W^{(N,M)}$ $(N, M \in \mathbb{N},\ N > 3M)$ betrachtet; sie bestehen aus gewissen Linearkombinationen der p_n^μ, die sich im Fall der $W^{(N,M)}$ aus einer verallgemeinerten Translationsoperation (für eine ausführliche Diskussion hierzu vgl. [17, S. 33]) ergeben und es werden Bedingungen formuliert, die die Orthogonalität ihrer Basisfunktionen $\varphi_k^{(N,M)}$, $\psi_k^{(N,M)}$ implizieren. Dabei ist μ wieder ein positives Borel-Maß, dessen Träger $\operatorname{supp}\mu = [-1,1]$ ist und dessen Momente $\int_{-1}^{1} |x|^n \mathrm{d}\mu(x)$ existieren und endlich sind und die p_n^μ sind (bezüglich μ) orthonormale Polynome mit $\operatorname{grad} p_n^\mu = n$ und positiven Leitkoeffizienten.

Zur Konstruktion der $V^{(N,M)}$ und $W^{(N,M)}$ benötigt man Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit bestimmten Symmetrie- und Differenzierbarkeitseigenschaften. Im Vorgriff auf Erfordernisse der folgenden Kapitel werden diese Funktionen und ihr Existenzbeweis schon jetzt allgemein gegeben.

Definition 3.4 *1. Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt charakteristische Funktion, wenn $g \in C_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$, $g(0) = 1$ und für alle $x \in [0,1]$*

$$g^2(1+x) + g^2(1-x) = 1 \quad \textit{und} \quad g^2(-1+x) + g^2(-1-x) = 1 \tag{3.11}$$

ist. Eine Funktion g heißt darüberhinaus charakteristische Funktion vom Grad m ($m \in \mathbb{N}$), wenn g m-fach stetig differenzierbar ist mit $g^{(k)}(0) = 0$ für alle $k = 1, ..., m$.
2. Es sei g eine charakteristische Funktion. Die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 1. Art $\widetilde{g}$ wird definiert durch

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} 0 & \textit{für } x \leq -3/2, \\ g(2x+1) & \textit{für } -3/2 \leq x \leq -1/2, \\ 1 & \textit{für } -1/2 \leq x \leq 0, \\ g(x) & \textit{für } x \geq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

3. Es seien $0 < a < 1$ und g eine charakteristische Funktion. Die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art $g^*(a,x) := g^*(x)$ wird definiert durch

$$g_a^*(x) := g^*(a,x) := g^*(x) := \begin{cases} g(0) & \textit{für } 0 \leq x \leq 1-a, \\ g(\frac{1}{a}(x-1)+1) & \textit{für } x > 1-a, \\ g^*(-x) & \textit{für } x \leq 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Es folgen einige Existenzbehauptungen zu charakteristischen Funktionen.

Lemma 3.5 *1. Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ existiert eine gerade, charakteristische Funktion vom Grad m.*
2. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und sei g eine charakteristische Funktion vom Grad m. Dann ist auch die Funktion $g^*(a,x)$ für alle $0 < a < 1$ eine charakteristische Funktion vom Grad m. Darüberhinaus ist $g^*(a,x)$ eine gerade Funktion.
3. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und sei g eine gerade, charakteristische Funktion vom Grad m, dann ist auch die Funktion $\widetilde{g}$ eine charakteristische Funktion vom Grad m.

Beweis: Beweis zu 1.: Man betrachtet zunächst die Funktion

$$g_0(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{2^{2m}} - \frac{1}{2^{2m} - x^{2m}}} & \text{für } x \in (-2,2), \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-2,2). \end{cases}$$

Bekanntlich ist g_0 eine gerade, unendlich oft differenzierbare Funktion mit $g_0(0) = 1$, $g_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (-2,2)$, $g_0(x) > 0$ für alle $x \in (-2,2)$ und $g_0^{(j)}(0) = 0$ für alle $j = 1, ..., m$ (vgl. [23, S. 156]). Nun definiert man die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \frac{g_0(x)}{\sqrt{g_0^2(2-x)+g_0^2(x)}} & \text{für } 2 \geq x \geq 0, \\ \frac{g_0(-x)}{\sqrt{g_0^2(-2-x)+g_0^2(-x)}} & \text{für } -2 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]. \end{cases}$$

Durch eine einfache Rechnung lässt sich jetzt zeigen, dass g eine charakteristische Funktion vom Grad m ist. Damit ist die 1. Teilaussage bewiesen.
Beweis zu 3.: Aus der abschnittweisen Definition von $\widetilde{g}$ und wegen $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$ folgt sofort: $\operatorname{supp} \widetilde{g} \subseteq [-\frac{3}{2}, 2]$. Die Differenzierbarkeitsbehauptung ist im Inneren der einzelnen Abschnitte von $\widetilde{g}$ unmittelbar klar. An den Rändern dieser Abschnitte ergibt sie sich unmittelbar aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von g. Zu zeigen bleibt somit nur noch (3.11): Für $1 \geq x \geq 0$ ist $1 + x > 0$ und $1 - x \geq 0$, so dass nach Voraussetzung an g

$$\widetilde{g}^2(1+x) + \widetilde{g}^2(1-x) = g^2(1+x) + g^2(1-x) = 1$$

ist, was die linke Gleichung von (3.11) beweist. Für $1 \geq x \geq 1/2$ ist $-1 - x \leq -3/2$ und $-1/2 \leq -1 + x \leq 0$, so dass nach Definition von $\widetilde{g}$

$$\widetilde{g}^2(-1+x) + \widetilde{g}^2(-1-x) = 1 + 0 = 1$$

folgt. Für $0 \leq x \leq 1/2$ ist $-1 \geq -1 - x \geq -3/2$, $-1/2 \geq -1 + x \geq -1$ und $0 \leq 2x \leq 1$, so dass nach Definition von $\widetilde{g}$ und der Richtigkeit von (3.11) für g

$$\begin{aligned} \widetilde{g}^2(-1+x) + \widetilde{g}^2(-1-x) &= g^2\left(2(-1+x)+1\right) + g^2\left(2(-1-x)+1\right) \\ &= g^2(-1+2x) + g^2(-1-2x) = 1 \end{aligned}$$

und damit insgesamt auch die Richtigkeit der 2. Gleichung von (3.11) für $\widetilde{g}$ folgt. Der Beweis der 2. Teilaussage verläuft analog dazu und wird hier nicht eigens ausgeführt. ■

Die Räume $W^{(N,M)}$ werden nun als Erzeugnis gewisser Funktionen $\psi_k^{(N,M)}$ definiert.

Definition 3.6 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, $\theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi$ und g eine charakteristische Funktion gemäß Definition 3.4. Dann definiert man die Funktionen $\psi_{g,k}^{\mu,(N,M)} = \psi_k^{\mu,(N,M)} = \psi_k^{(N,M)}$ und den Raum $W_g^{(N,M)} = W^{(N,M)}$ durch*

$$\psi_k^{\mu,(N,M)} := \psi_k^{(N,M)} := \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{s}{M}\right) \cos\left((3M+s)\theta_k\right) p_{N-M+s}^{\mu}, \tag{3.14}$$

wobei die p_n^μ die (bezüglich μ) orthonormierten Polynome mit grad $p_n^\mu = n$ *und positiven Leitkoeffizienten sind, und setzt*

$$W^{(N,M)} := \operatorname{span}\left\{\psi_k^{(N,M)} : k = 0, ..., 2M-1\right\}. \tag{3.15}$$

Jetzt beweist man, dass die $\psi_k^{(N,M)}$ für gegebene N, M und alle $k = 0, ..., 2M-1$ orthonormal zueinander sind. Es gilt das

Lemma 3.7 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, $\theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi$, g eine charakteristische Funktion gemäß Definition 3.4 und $\psi_{g,k}^{(N,M)} = \psi_k^{(N,M)}$ gemäß Definition 3.6 gegeben. Dann gilt*

$$\left\langle \psi_l^{(N,M)}, \psi_k^{(N,M)} \right\rangle = \delta_{lk} \text{ für alle } l, k = 0, ..., 2M-1,$$

d.h. die $\psi_k^{(N,M)}$ bilden ein aus $2M$ Elementen bestehendes Orthonormalsystem bezüglich μ.

Beweis: Der Beweis orientiert sich stark an [17, Lemma 3]. Aus der Wahl von θ_k folgt

$$\begin{aligned} \cos\left((2M-s)\theta_k\right) &= -\cos\left((2M+s)\theta_k\right), && (3.16) \\ \cos\left((4M-s)\theta_k\right) &= \cos\left((4M+s)\theta_k\right) && (3.17) \end{aligned}$$

für alle $s = 1, ..., M$ und insbesondere

$$\cos(2M\theta_k) = \sin(4M\theta_k) = 0. \tag{3.18}$$

Im Fall $k \neq l$ liefert die Parsevalsche Gleichung für das Orthonormalsystem der $(p_n^\mu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zusammen mit (3.16), (3.18) und (3.11)

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_k^{(N,M)}, \psi_l^{(N,M)} \right\rangle &= \frac{1}{M} \sum_{s=-2M}^{2M} g^2\left(\frac{s}{M}\right) \cos\left((3M+s)\theta_k\right) \cos\left((3M+s)\theta_l\right) \\ &= \frac{1}{2M} \cos(2M\theta_k)\cos(2M\theta_l) + \frac{1}{M} \sum_{s=2M+1}^{4M-1} \cos(s\theta_k)\cos(s\theta_l) \\ &\quad + \frac{1}{2M}\cos(4M\theta_k)\cos(4M\theta_l) \\ &= \frac{1}{2M} \frac{\sin\theta_l \cos(4M\theta_k)\sin(4M\theta_l) - \sin\theta_k \sin(4M\theta_k)\cos(4M\theta_l)}{\cos\theta_k - \cos\theta_l} \\ &\quad - \frac{1}{2M} \frac{\sin\theta_l \cos(2M\theta_k)\sin(2M\theta_l) - \sin\theta_k \sin(2M\theta_k)\cos(2M\theta_l)}{\cos\theta_k - \cos\theta_l} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im Fall $k = l$ erhält man mit ähnlichen Argumenten

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_k^{(N,M)}, \psi_k^{(N,M)} \right\rangle &= \frac{1}{M} \sum_{s=-2M}^{2M} g^2\left(\frac{s}{M}\right) \cos^2\left((3M+s)\theta_k\right) \\ = 1 + \frac{\cos\theta_k \cos(4M\theta_k)\sin(4M\theta_k)}{2M\sin\theta_k} &- \frac{\cos\theta_k \cos(2M\theta_k)\sin(2M\theta_k)}{2M\sin\theta_k} = 1. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma insgesamt bewiesen. ■

Im nächsten Lemma wird eine andere Basis für die $W^{(N,M)}$ vorgelegt, mit deren Hilfe die Orthogonalität zwischen verschiedenen Räumen leichter bewiesen werden kann.

Lemma 3.8 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, $\theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi$, g eine charakteristische Funktion gemäß Definition 3.4 und $\psi_{g,k}^{(N,M)} = \psi_k^{(N,M)}$, $W_g^{(N,M)} = W^{(N,M)}$ gemäß Definition 3.6 gegeben. Dann gilt*

$$W^{(N,M)} = \operatorname{span}\Bigg(\left\{g\left(-\frac{M-k}{M}\right)p^\mu_{N-2M+k} - g\left(-\frac{M+k}{M}\right)p^\mu_{N-2M-k} : k = 1, ..., M\right\} \\ \cup \left\{g\left(\frac{M-k}{M}\right)p^\mu_{N-k} + g\left(\frac{M+k}{M}\right)p^\mu_{N+k} : k = 0, ..., M-1\right\}\Bigg). \tag{3.19}$$

Insbesondere ist

$$\dim W^{(N,M)} = 2M. \tag{3.20}$$

Beweis: Der Beweis des Lemmas orientiert sich stark an [17, Lemma 4]. Zunächst zeigt man (1.), dass die erzeugenden Funktionen auf der rechten Seite von (3.19) orthogonal und damit linear unabhängig voneinander sind. Dann zeigt man (2.), dass die $\psi_k^{(N,M)}$ als Linearkombination der erzeugenden Funktionen darstellbar sind. Aus Dimensionsgründen ist der Satz damit dann insgesamt bewiesen.
(1.) Aus der Orthogonalität der $(p_n^\mu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zueinander und der Tatsache, dass die Ungleichungen

$$N - 2M + k \le N - M < N - (M-1) \le N - l$$

für alle $k = 1, ..., M$ und alle $l = 0, ..., M-1$, die Ungleichungen

$$N - 2M - k_2 < N - 2M - k_1 \le N - 2M + k_1 < N - 2M + k_2$$

für alle $k_1, k_2 \in \{1, ..., M\}$ mit $k_1 < k_2$ und die Ungleichungen

$$N - k_2 < N - k_1 \le N + k_1 < N + k_2$$

für alle $k_1, k_2 \in \{0, ..., M-1\}$ mit $k_1 < k_2$ erfüllt sind, folgt die Orthogonalität und damit die lineare Unabhängigkeit der erzeugenden Funktionen auf der rechten Seite von (3.19).
(2.) Jetzt zeigt man

$$W^{(N,M)} \subseteq \operatorname{span}\Bigg(\left\{g\left(-\frac{M-k}{M}\right)p^\mu_{N-2M+k} - g\left(-\frac{M+k}{M}\right)p^\mu_{N-2M-k} : k = 1, ..., M\right\} \\ \cup \left\{g\left(\frac{M-k}{M}\right)p^\mu_{M-k} + g\left(\frac{M+k}{M}\right)p^\mu_{N+k} : k = 0, ..., M-1\right\}\Bigg). \tag{3.21}$$

Beweis zu (3.21): Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \psi_k^{(N,M)} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{s}{2M}\right) \cos\left((3M+s)\theta_k\right) p^\mu_{N-M+s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(\frac{-s}{M}\right) \cos\left((3M-s)\theta_k\right) p^\mu_{N-M-s} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=M+1}^{2M-1} g\left(\frac{-s}{M}\right) \cos\left((3M-s)\theta_k\right) p^\mu_{N-M-s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(\frac{s}{M}\right) \cos\left((3M+s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N-M+s} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=M+1}^{2M-1} g\left(\frac{s}{M}\right) \cos\left((3M+s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N-M+s} \\
&+ \cos(3M\theta_k) p^{\mu}_{N-M} + g(-1)\cos(2M\theta_k) p^{\mu}_{N-2M} + g(1)\cos(4M\theta_k) p^{\mu}_{N} \\
&+ g(2)\cos(5M\theta_k) p_{N+M} + g(-2)\cos(M\theta_k) p^{\mu}_{N-3M}.
\end{aligned}
$$

Durch Umkehrung der Summationsreihenfolge und unter Beachtung von $g(-2) = g(2) = 0$ und (3.18) erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
\psi_k^{(N,M)} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(-\frac{M-s}{M}\right) \cos\left((2M+s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N-2M+s} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(-\frac{M+s}{M}\right) \cos\left((2M-s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N-2M-s} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(\frac{M-s}{M}\right) \cos\left((4M-s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N-s} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} g\left(\frac{M+s}{M}\right) \cos\left((4M+s)\theta_k\right) p^{\mu}_{N+s} \\
&+ \cos(3M\theta_k) p^{\mu}_{N-M} + g(1)\cos(4M\theta_k) p^{\mu}_{N}
\end{aligned}
$$

und wegen (3.16) schließlich

$$
\begin{aligned}
\psi_k^{(N,M)} = &\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} \cos\left((2M+s)\theta_k\right) \left(g\left(-\frac{M-s}{M}\right) p^{\mu}_{N-2M+s} - g\left(-\frac{M+s}{M}\right) p^{\mu}_{N-2M-s}\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^{M-1} \cos\left((4M-s)\theta_k\right) \left(g\left(\frac{M-s}{M}\right) p^{\mu}_{N-s} + g\left(\frac{M+s}{M}\right) p^{\mu}_{N+s}\right) \\
&+ \cos(3M\theta_k) p^{\mu}_{N-M} + g(1)\cos(4M\theta_k) p^{\mu}_{N}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Die Auswertung der rechten Seite von (3.21) für $k = M$ und $k = 0$ liefert unter Beachtung von $g(0) = 1$ und $g(-2) = g(2) = 0$

$$
\begin{aligned}
p^{\mu}_{N-M},\ 2g(1)p^{\mu}_{N} \in &\left\{ g\left(-\frac{M-k}{M}\right) p^{\mu}_{N-2M+k} - g\left(-\frac{M+k}{M}\right) p^{\mu}_{N-2M-k} : k = 1, ..., M \right\} \\
&\cup \left\{ g\left(\frac{M-k}{M}\right) p^{\mu}_{N-k} + g\left(\frac{M+k}{M}\right) p^{\mu}_{N+k} : k = 0, ..., M-1 \right\},
\end{aligned}
$$

woraus sich zusammen mit (3.22) tatsächlich (3.21) und aus Dimensionsgründen dann das Lemma insgesamt ergibt. ■

Jetzt definiert man die Räume $V_g^{(N,M)} = V^{(N,M)}$.

Definition 3.9 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, g eine charakteristische Funktion und $g^*(\cdot) := g^*(\frac{M}{N}, \cdot)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art gemäß Definition 3.4, 1. und 3. Die Funktionen $\varphi_{g,k}^{\mu,(N,M)} = \varphi_k^{\mu,(N,M)} = \varphi_k^{(N,M)}$ und die Räume $V_g^{(N,M)} = V^{(N,M)}$ werden definiert durch*

$$\varphi_{g,k}^{\mu,(N,M)} := \varphi_k^{(N,M)} := \begin{cases} g^*(\frac{k}{N})p_k^\mu + g^*(\frac{2N-k}{N})p_{2N-k}^\mu & \text{für } k = 0, ..., N-1, \\ p_N^\mu & \text{für } k = N \end{cases} \tag{3.23}$$

und

$$V^{(N,M)} := \operatorname{span}\left\{\varphi_k^{(N,M)} : k = 0, ..., N\right\}. \tag{3.24}$$

Als nächstes zeigt man das

Lemma 3.10 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, g eine charakteristische Funktion und $g^*(\cdot) := g^*(\frac{M}{N}, \cdot)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art gemäß Definition 3.4, 1. und 3. sowie die Funktionen $\varphi_{g,k}^{\mu,(N,M)} = \varphi_k^{(N,M)}$ und der Raum $V_g^{(N,M)} = V^{(N,M)}$ gemäß Definition 3.9,* (3.23), (3.24) *gegeben. Dann ist $\left\{\varphi_k^{(N,M)} : k = 0, ..., N\right\}$ eine Orthonormalbasis von $V_g^{(N,M)}$ und insbesondere gilt*

$$\dim V^{(N,M)} = N + 1. \tag{3.25}$$

Beweis: Für $k_1, k_2 \in \{0, ..., N-1\}$ mit $k_1 \neq k_2$ folgt $2N - k_1 \neq k_2$ bzw. $2N - k_2 \neq k_1$, woraus sich unter Beachtung der Orthonormalität der p_n^μ

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi_{k_1}^{(N,M)}, \varphi_{k_2}^{(N,M)} \right\rangle &= \left\langle g^*(\frac{k_1}{N})p_{k_1}^\mu + g^*(\frac{2N-k_1}{N})p_{2N-k_1}^\mu, g^*(\frac{k_2}{N})p_{k_2}^\mu + g^*(\frac{2N-k_2}{N})p_{2N-k_2}^\mu \right\rangle \\ &= \left\langle g^*(\frac{2N-k_1}{N})p_{2N-k_1}^\mu, g^*(\frac{k_2}{N})p_{k_2}^\mu \right\rangle + \left\langle g^*(\frac{2N-k_2}{N})p_{2N-k_2}^\mu, g^*(\frac{k_1}{N})p_{k_1}^\mu \right\rangle = 0\end{aligned}$$

ergibt. Der Fall, dass k_1 oder k_2 gleich N sind und $k_2 \neq k_1$ ist, ergibt sich analog unter Beachtung von (3.23). Damit ist die Orthogonalität der Basiselemente insgesamt bewiesen. Die Normalität gleicher Basiselemente zeigt man so: Für $k_1 = k_2 = N$ gilt nach (3.23) $\left\langle \varphi_N^{(N,M)}, \varphi_N^{(N,M)} \right\rangle = \langle p_N^\mu, p_N^\mu \rangle = 1$ und für $0 \leq k := k_1 = k_2 < N$ gilt $2N - k \neq k$ und damit

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi_k^{(N,M)}, \varphi_k^{(N,M)} \right\rangle &= \left\langle g^*(\frac{k}{N})p_k^\mu + g^*(\frac{2N-k}{N})p_{2N-k}^\mu, g^*(\frac{k}{N})p_k^\mu + g^*(\frac{2N-k}{N})p_{2N-k}^{(\alpha,\beta)} \right\rangle \\ &= g^{*2}(\frac{2N-k}{N}) + g^{*2}(\frac{k}{N}) = 1,\end{aligned}$$

wobei man im letzten Schritt (3.11) verwendet hat. Damit ist auch die Orthonormalität der $\varphi_k^{(N,M)}$ bewiesen. ■

Zwischen g und g^* besteht ein Zusammenhang, der zu einem vereinfachten Erzeugendensystem für $V^{(N,M)}$ führt.

Lemma 3.11 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, $k = 0, ..., 2M-1$, g eine charakteristische Funktion und $g^*(\cdot) := g^*(\frac{M}{N}, \cdot)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art gemäß Definition 3.4, 1. und 3. gegeben. Ferner sei $V_g^{(N,M)} = V^{(N,M)}$ gemäß Definition 3.9 gegeben. Dann gilt*

$$V^{(N,M)} = \operatorname{span}\left(\left\{g(\frac{M-k}{M})p^\mu_{N-k} + g(\frac{M+k}{M})p^\mu_{N+k} : k = 0, ..., M-1\right\} \cup \left\{p^\mu_k : k = 0, ..., N-M\right\}\right).$$

Beweis: Für $k = 0, ..., N-M$ ist $0 \leq \frac{k}{N} \leq 1 - \frac{M}{N}$ und $\frac{2N-k}{N} \geq 1 + \frac{M}{N}$. Zusammen mit (3.13) ergibt sich daraus $g^*(\frac{k}{N}) = g(0) = 1$ und wegen $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$ auch $g^*(\frac{2N-k}{N}) = 0$ und damit

$$\varphi_k^{(N,M)} = g^*(\frac{k}{N})p^\mu_k + g^*(\frac{2N-k}{N})p^\mu_{2N-k} = p^\mu_k$$

für alle $k = 0, ..., N-M$. Für $N \geq k > N-M$ ist $\frac{k}{N} > 1 - \frac{M}{N}$ und $\frac{2N-k}{N} > 1$. Zusammen mit (3.13) folgt daraus also $g^*(\frac{k}{N}) = g(\frac{M-(N-k)}{M})$, $g^*(\frac{2N-k}{N}) = g(\frac{M+(N-k)}{M})$ und damit

$$\begin{aligned}&\left\{g^*(\frac{k}{N})p^\mu_k + g^*(\frac{2N-k}{N})p^\mu_{2N-k} :\ k = N-M+1, ..., N\right\}\\ &= \left\{g(\frac{M-k}{M})p^\mu_{N-k} + g(\frac{M+k}{M})p^\mu_{N+k} : k = 0, ..., M-1\right\}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit

$$V^{(N,M)} \subseteq \operatorname{span}\left(\left\{g(\frac{M-k}{M})p^\mu_{N-k} + g(\frac{M+k}{M})p^\mu_{N+k} : k = 0, ..., M-1\right\} \cup \left\{p^\mu_k : k = 0, ..., N-M\right\}\right),$$

woraus sich nach einem Dimensionsvergleich die gewünschte Gleichheit ergibt. ■

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich die Orthogonalität zwischen den einzelnen Räumen beweisen.

Lemma 3.12 *Es seien $N_1, N_2, M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ mit $N_1 > 3M_1$, $N_2 > 3M_2$, g_1, g_2 charakteristische Funktionen gemäß Definition 3.4, 1., $V_{g_1}^{(N_1,M_1)} = V^{(N_1,M_1)}$, $V_{g_2}^{(N_2,M_2)} = V^{(N_2,M_2)}$ gemäß Definition 3.9 und $W_{g_2}^{(N_2,M_2)} = W^{(N_2,M_2)}$ gemäß Definition 3.6 gegeben. Dann gilt*

$$V^{(N_1,M_1)} \oplus W^{(N_2,M_2)} = V^{(N_2,M_2)}, \tag{3.26}$$

wenn $N_1 = N_2 - 2M_2$, $M_2 \geq M_1$ und

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 - \frac{M_1}{M_2}, \\ g_1(1 - \frac{M_1}{M_2}(x+1)) & \text{für } -1 - \frac{M_2}{M_1} < x < 0, \\ 1 & \text{für } -1 + \frac{M_1}{M_2} \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

gesetzt werden.

Beweis: Der Beweis ist eine ausführliche Ausarbeitung von [17, Lemma 5]. Zuerst beweist man

$$V^{(N_1,M_1)} \perp W^{(N_2,M_2)}, \tag{3.28}$$

indem man zeigt, dass alle Basisfunktionen von $V^{(N_1,M_1)}$ orthogonal zu allen Basisfunktionen von $W^{(N_2,M_2)}$ sind.
Beweis von (3.28): Für alle $t = 1, ..., M_2$ und alle $k = 0, ..., N_1 - M_1$ ist

$$N_2 + t \geq N_2 - t > N_1 - M_1 \geq k$$

und damit

$$p_k^\mu \perp g_2(\frac{M_2 - t}{M_2})p_{N_2-t}^\mu + g_2(\frac{M_2 + t}{M_2})p_{N_2+t}^\mu.$$

Die Relation

$$p_k^\mu \perp g_2(-\frac{M_2 - t}{M_2})p_{N_2-2M_2+t}^\mu - g_2(-\frac{M_2 + t}{M_2})p_{N_2-2M_2-t}^\mu \tag{3.29}$$

ist wegen $N_2 - 2M_2 + t = N_1 + t > N_1 - M_1 \geq k$ offenbar für alle t, k erfüllt, für die auch $N_2 - 2M_2 - t \neq k$ gilt. Weil aber für alle t, k mit $N_2 - 2M_2 - t = k$ wegen $k \geq N_1 - M_1$ auch $\frac{M_2+N_1-k}{M_2} \geq \frac{M_2+M_1}{M_2}$ und nach (3.27) somit $g_2(-\frac{M_2+t}{M_2}) = 0$ gilt, ist (3.29) auch für diesen Fall erfüllt. Ferner gilt für alle $t = 0, ..., M_2 - 1$ und alle $k = 0, ..., M_1 - 1$ auch $N_2 - t \geq N_2 - M_2 + 1 > N_1 + M_1 - 1 \geq N_1 + k$, d.h.

$$g_1(\frac{M_1 - k}{M_1})p_{N_1-k}^\mu + g_1(\frac{M_1 + k}{M_1})p_{N_1+k}^\mu \perp g_2(\frac{M_2 - t}{M_2})p_{N_2-t}^\mu + g_2(\frac{M_2 + t}{M_2})p_{N_2+t}^\mu.$$

Nach Lemma 3.11 und Lemma 3.8 und wegen $N_1 = N_2 - 2M_2$ bleibt somit nur noch

$$g_2(-\frac{M_2 - t}{M_2})p_{N_2-2M_2+t}^\mu - g_2(-\frac{M_2 + t}{M_2})p_{N_2-2M_2-t}^\mu \perp g_1(\frac{M_1 - k}{M_1})p_{N_1-k}^\mu + g_1(\frac{M_1 + k}{M_1})p_{N_1+k}^\mu,$$

also

$$g_1(1 - \frac{k}{M_1})g_2(-1 - \frac{k}{M_2}) - g_1(1 + \frac{k}{M_1})g_2(-1 + \frac{k}{M_2}) = 0 \tag{3.30}$$

für den Fall $k = t$ mit $t, k \in \{0, ..., M_1 - 1\}$ zu zeigen: Nach Voraussetzung (3.27) und wegen $\operatorname{supp} g_1 \subseteq [-2, 2]$ gilt aber für alle $k = 0, ..., M_1 - 1$

$$g_2(-1 + \frac{k}{M_2}) = g_1(1 - \frac{k}{M_1}) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad g_2(-1 - \frac{k}{M_2}) = g_1(1 + \frac{k}{M_1}),$$

womit (3.30) und damit (3.28) insgesamt bewiesen ist. Jetzt zeigt man

$$V^{(N_2,M_2)} \subseteq V^{(N_1,M_1)} \oplus W^{(N_2,M_2)}, \tag{3.31}$$

woraus zusammen mit (3.20) und (3.25)

$$\dim V^{(N_1,M_1)} + \dim W^{(N_2,M_2)} = N_1 + 1 + 2M_2 = 1 + N_2 = \dim V^{(N_2,M_2)} \tag{3.32}$$

und damit die gewünschte Gleichheit (3.26) folgt.
Beweis von (3.31): Zunächst zeigt man, dass die Basispolynome p_k^μ für $k = 0, ..., N_2 - M_2$ in der direkten Summe $V^{(N_1,M_1)} \oplus W^{(N_2,M_2)}$ liegen: Für p_k^μ mit $k = 0, ..., N_1 - M_1$ folgt diese Behauptung unmittelbar aus Lemma 3.11. Für $k = N_1 - M_1 + 1, ..., N_1$ erhält man aus Lemma 3.11 zunächst

$$\begin{aligned} Q_1 &:= g_1(1 + \frac{k - N_1}{M_1})p_k^\mu + g_1(1 - \frac{k - N_1}{M_1})p_{2N_1-k}^\mu \\ &= g_1(1 - \frac{N_1 - k}{M_1})p_{N_1-(N_1-k)}^\mu + g_1(1 - \frac{k - N_1}{M_1})p_{N_1+(N_1-k)}^\mu \in V^{(N_1,M_1)}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

und mit Lemma 3.8 auch

$$\begin{aligned} Q_2 :=& g_2(-1 - \frac{k - N_2 + 2M_2}{M_2})p^\mu_{2N_2-4M_2-k} - g_2(-1 + \frac{k - N_2 + 2M_2}{M_2})p^\mu_k \\ =& g_2(-1 + \frac{k^*}{M_2})p^\mu_{N_2-2M_2+k^*} - g_2(-1 - \frac{k^*}{M_2})p^\mu_{N_2-2M_2-k^*} \in W^{(N_2,M_2)}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

wobei $k^* := N_2 - 2M_2 - k$ gesetzt wurde und man

$$0 \le k^* \le N_2 - 2M_2 - (N_1 - M_1 + 1) = M_1 - 1 < M_2$$

zu beachten hat. Schließlich ergibt sich für $k = N_1 - M_1 + 1, ..., N_1$ aus (3.27) noch

$$g_2(-1 \mp \frac{k - N_2 + 2M_2}{M_2}) = g_1(1 \pm \frac{k - N_1}{M_1})$$

und wegen $N_1 = N_2 - 2M_2$ auch

$$p^\mu_{2N_2-4M_2-k} = p^\mu_{2N_1-k}.$$

Daraus und unter Beachtung von (3.11) folgt nun nach einer einfachen Rechnung

$$g_1(1 + \frac{k - N_1}{M_1})Q_1 - g_1(1 - \frac{k - N_1}{M_1})Q_2 = p^\mu_k \in V^{(N_1,M_1)} \oplus W^{(N_2,M_2)}$$

und

$$g_1(1 - \frac{k - N_1}{M_1})Q_1 + g_1(1 + \frac{k - N_1}{M_1})Q_2 = p^\mu_{2N_1-k} \in V^{(N_1,M_1)} \oplus W^{(N_2,M_2)}.$$

Für $k = N_1+M_1, ..., N_2-M_2$ folgt aus der Setzung $k = N_2-2M_2+k^*$, dass $k^* = M_1, ..., M_2$ sein kann, weshalb nach (3.27) also $g_2(-\frac{M_2+k^*}{M_2}) = 0$ und $g_2(-\frac{M_2-k^*}{M_2}) = 1$ sein muss und wegen (3.19) somit $p^\mu_k = p^\mu_{N_2-2M_2+k^*} \in W^{(N_2,M_2)}$ ist. Für $k = 0, ..., M_2 - 1$ folgt aus (3.19) direkt $g_2(\frac{M_2-k}{M_2})p^\mu_{N_2-k} + g_2(\frac{M_2+k}{M_2})p^\mu_{N_2+k} \in W^{(N_2,M_2)}$, weshalb nach Lemma 3.11 auch (3.31) und damit das Lemma insgesamt bewiesen ist. ■

Kapitel 4

Die Lebesgue-Konstanten der $W^{(N,M)}$

In diesem Kapitel werden zu fest gewählten $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ nur die einzelnen, gemäß Definition 3.6, (3.15), (3.14) definierten Räume $W^{(N,M)}$ und ihre Basisfunktionen $\psi_k^{\mu,(N,M)}$ betrachtet, wobei als Orthogonalitätsmaße μ in diesem und dem nächsten Kapitel nur noch Jacobi-Maße $\mu_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2})$ betrachtet werden. Als wesentliches Ergebnis dieses Kapitels beweisen wir in Hauptsatz 4.21 die gleichmäßige Beschränktheit der gemäß (3.4) definierten Lebesgue-Konstanten der $W^{(N,M)}$ für diese Orthogonalitätsmaße $\mu_{\alpha,\beta}$. Wir zeigen

$$\sup_{x\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(x)| \cdot \|\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(\cdot)\|_{L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}[-1,1]} \leq c_{\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1} \tag{4.1}$$

für alle $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, wobei $c_{\alpha,\beta} > 0$ eine insbesondere von N, M unabhängige Konstante ist. Der Beweis von (4.1) beruht auf einer Vertiefung und Verallgemeinerung von Methoden, wie sie Skopina in [42] zur Herleitung einer entsprechenden Behauptung für den Legendre-Fall, also für das Jacobi-Gewicht $\omega_{\alpha,\beta}$ mit $\alpha = \beta = 0$ und die Legendre-Polynome P_n bzw. die orthonormierten Legendre-Polynome p_n entwickelt hat.
Im Folgenden werden einige wesentliche Elemente von Skopinas Vorgehensweise kurz skizziert und daran anschließend wichtige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu der hier verfolgten Beweisstrategie benannt und kommentiert. Schon in der Konstruktion der Schauderbasis gibt es wichtige Parallelen zu [42] und dem hier verfolgten Ansatz: Auch Skopina verwendet für die Konstruktion ihrer Schauder-Basis Methoden aus der Wavelet-Analysis. Ausgehend von den komplexifizierten Legendre-Polynomen $X_n := p_{2n} + \mathrm{i}p_{2n-1}$ und $X_{-n} = \overline{X_n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ werden die Basisfunktionen ψ_k^{Skop} für gewisse, analog zu den Räumen $V^{(M,N)}$ und $W^{(M,N)}$ zu definierende Teilräume konstruiert. Aus diesen Funktionen kann schließlich die Schauder-Basis ausgewählt werden, wenn neben einigen weiteren einfachen Vollständigkeitsbedingungen der Nachweis für die gleichmäßige Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten auf eben diesen Teilräumen gelingt. Das zu (4.1) analoge Resultat wird von Skopina in [42] nun so bewiesen, dass man zunächst die Polynome X_n auf trigonometrische Funktionen und dadurch dann die ψ_k^{Skop} auf gewisse verallgemeinerte Kernfunktionen oder Dirichlet-Kerne der Form $K_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_{k,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ zurückführt, wobei die Koeffizienten $a_{k,n}$ als Abtastwerte einer hinreichend glatt gewählten Funktion g mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$ interpretiert werden. Bekanntlich besitzen solche verallgemeinerten Kernfunktionen ein gutes Wachstums- und Lokalisierungsverhalten (vgl (1.7)), was für die Abschätzung der Lebesgue-Konstanten von zentraler Bedeutung

ist. Nun entspricht aber die allgemeine Struktur der ψ_k^{Skop} gerade diesen verallgemeinerten Dirichlet-Kernen. Sie lassen sich nämlich als Ergebnis einer verallgemeinerten Translation verstehen, die durch Einfügen gewisser trigonometrischer Funktionen als Koeffizienten in die Fourier-Reihe (bezüglich $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$) eines beliebigen Polynoms p wirkt. Deshalb ist es naheliegend, dass Skopina in [42] die in ψ_k^{Skop} eingehenden Legendre-Polynome auf trigonometrische Funktionen zurückführt. Im Folgenden wird Skopinas Ansatz hierzu ausführlicher dargestellt und es werden Möglichkeiten und Grenzen seiner Übertragbarkeit auf einen Beweis von (4.1) im allgemeinen Jacobi-Fall diskutiert.

Zur Rückführung der X_n auf trigonometrische Funktionen werden folgende bekannte Eigenschaften der Legendre-Polynome verwendet, deren Beweise etwa in [43, Kap. 4 und Kap. 8] zu finden sind: Die Dirichlet-Mehler-Formel

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\pi}{2}\int_0^\theta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\phi}{(2\cos\phi - 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\phi, \quad \theta\in(0,\pi), \tag{4.2}$$

die Volterra-Gleichung

$$\begin{aligned}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\, p_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right)\\ - \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})(\theta-t)\right)}{4\sin^2 t}(\sin t)^{\frac{1}{2}}\, p_n(\cos t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4.3}$$

die bekannte Asymptotik

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} p_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sin\theta}\right) \text{ für } n\to\infty \tag{4.4}$$

und ihre Verschärfung

$$\begin{aligned}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} p_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\lambda_n}{8(n+\frac{1}{2})}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cot\theta\\ + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\sin^2\theta}\right) \text{ für } n\to\infty,\end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei stets $\theta\in(0,\pi)$, $\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ und mit p_n die orthonormierten Legendre-Polynome bezeichnet werden. Diese Formeln werden zu neuen Asymptotiken für die komplexifizierten Legendre-Polynome X_n für $\theta\in(0,\pi)$ verknüpft. Beispielsweise erhält man in [42, Lemma 5] für $n\to\infty$

$$X_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\left(A_1(\theta)\xi_1(n)\mathrm{e}^{2in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)\mathrm{e}^{-2in\theta}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}X_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\left(A_1(\theta)\xi_1(n)\mathrm{e}^{2in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)\mathrm{e}^{-2in\theta}\right)\\ + \frac{1}{n\sqrt{\sin^3\theta}}\left(A_3(\theta)\xi_3(n)\mathrm{e}^{2in\theta} + A_4(\theta)\xi_4(n)\mathrm{e}^{-2in\theta}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}}\right),\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}X_n(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\cos\tau - \cos\theta}}\Big(\sqrt{n}A_5(\tau)\xi_5(n)\mathrm{e}^{2in\tau} + A_6(\tau)\xi_6(n)\mathrm{e}^{-2in\tau}\\ + \frac{1}{\sqrt{n}}A_7(\tau)\xi_7(n)\mathrm{e}^{2in\tau} + A_8(\tau)\xi_8(n)\mathrm{e}^{-2in\tau}\Big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned} \tag{4.8}$$

und

$$
\begin{aligned}
X_n(\cos\theta) = &\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\left(A_1(\theta)\xi_1(n)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}n\theta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&+\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^{\frac{3}{2}}t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos t}}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}A_9(t)\xi_9(n)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n(\tau+t-\theta)}\\
&+\frac{1}{\sqrt{n}}A_{10}(t)\xi_{10}(n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}n(\tau+t-\theta)} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}A_{11}(t)\xi_{11}(n)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n(\tau+t-\theta)}\\
&+\frac{1}{\sqrt{n^3}}A_{12}(t)\xi_{12}(n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}n(\tau+t-\theta)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)\Big)\Big),
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

wobei die ξ_l analytische Funktionen auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und die Funktionen A_l und A_{1l} für $\theta\in(0,\pi)$ absolut beschränkt sind, für die also eine Konstante $C>0$ existiert mit $|A_l(\theta)|,|A_{1l}(\theta)|\leq C$. Mit diesen Asymptotiken lassen sich die Funktionen ψ_k^{Skop} auf verallgemeinerte trigonometrische Dirichlet-Kerne zurückzuführen. Bei der weiteren Anwendung dieser so gewonnenen Abschätzungen zur Auswertung der zu (4.1) entsprechenden Lebesgue-Konstante hat Skopina eine für ihren Beweis in [42] zentrale Beobachtung gemacht, die sich stark vereinfacht so beschreiben lässt: Zunächst ersetzt man in (4.1) die Basisfunktionen $\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}$ durch ihre Entsprechungen ψ_k^{Skop}, transformiert $x=\cos s$ und wählt θ als Integrationsvariable zur Berechnung der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm. Dann wendet man die Asymptotik in (4.6) auf $\psi_k^{\mathrm{Skop}}(\cos s)$ und $\psi_k^{\mathrm{Skop}}(\cos\theta)$ an. Die Multiplikation und Addition der entstehenden Terme unter Berücksichtigung des $\sin\theta$-Faktors von der $L^1_{\omega_{0,0}}$-Norm liefert dann Summen verallgemeinerter Dirichlet-Kerne und gewisser $\mathcal{O}$-Terme. Die in (4.1) entstehenden Terme lassen sich gerade für solche θ gut abschätzen, die die gleiche Größenordnung wie s besitzen, beispielsweise also höchstens $\frac{3}{2}$-fach so groß sind wie s. Dann lassen sich nämlich die entstehenden $\sin s$- und $\sin\theta$-Potenzen beziehungsweise die s- und θ-Potenzen zu $\frac{\theta}{s}$-Potenzen mit positiven Exponenten zusammenfassen, so dass sie beschränkt bleiben unabhängig von der tatsächlichen Größe von s. Dieses Argument bleibt insbesondere auch für kleine s richtig, was sich im Wesentlichen aus der Tatsache ergibt, dass die Gültigkeit der verwendeten Asymptotiken und Formeln auf kompakten Teilintervallen von $[0,\pi)$ und nicht etwa nur auf kompakten Teilintervallen von $(0,\pi)$ erfüllt ist. Kombiniert man demgegenüber die Asymptotiken (4.8) und (4.9), so erhält man Abschätzungen, die für solche θ gut kontrollierbar sind, die von s hinreichend weit entfernt sind.

Im Folgenden wird begründet, warum im hier zu führenden Beweis die Strategie, die Basisfunktionen $\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(\cos\theta)$ auf verallgemeinerte trigonometrische Dirichlet-Kerne zurückzuführen, übernommen wird. In [30, Lemma 4.6], [31, Satz 5.1 und Korollar 5.1], [35, Satz 2.1 und Satz 2.4] und [4, Lemma 3.3.] werden zwar gleichmäßige Schranken der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm für Kernfunktionen der Form

$$K_{M,h}^{(\alpha,\beta)}(\cdot) := \sum_{k=0}^{\infty} h(\frac{k}{M})p_k^{(\alpha,\beta)}(1)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos(\cdot)) \tag{4.10}$$

und allgemeiner der Form

$$K_{M,h}^{(\alpha,\beta)}(\theta,\cdot) := \sum_{k=0}^{\infty} h(\frac{k}{M})p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos(\cdot)) \tag{4.11}$$

hergeleitet, wobei an $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit kompaktem Träger und gewissen Glattheitsbedingungen ist. Eine direkte Anwendung dieser Ergebnisse auf den hier zu analysierenden Fall scheint aber nicht möglich zu sein: diese Kernfunktionen unterscheiden sich nämlich strukturell von den hier betrachteten Basisfunktionen $\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(N,M)}(\cos\theta)$. Der Translationsoperator, also die $\cos(3M+s)\theta_k$-Faktoren müssten dann als Faktor einer Abtastfunktion g gedeutet werden, in die der k-Index mit einem Wert zwischen 0 und $2M-1$ eingeht und die dadurch auf eine bisher nicht kontrollierbare Weise weitere M-Potenzen in der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von $\widehat{g}$ liefert. Im Sinne der Gesamtkonstruktion der $W^{(N,M)}$, insbesondere also bei wachsendem M ist bisher nicht zu sehen, wie auf diesem Weg eine gleichmäßige Schranke für die Lebesgue-Konstanten zu gewinnen wäre. Die Taylor-Entwicklung dieser Faktoren, also die Rückführung auf Potenzen verschärfte noch das Problem, insofern der k-Index dann in die Argumente der Potenzen einginge und dadurch das Wachstum der M-Potenzen beschleunigte. Wie entsprechende Terme zu kontrollieren wären, scheint bislang nicht bekannt zu sein bzw. untersucht worden zu sein. Ausnutzen könnte man die Abschätzungen in (4.10) und (4.11) wohl nur, wenn man den Translationsoperator zur Konstruktion der $\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(N,M)}$ verändern und statt der Tchebyscheff-Polynome Jacobi-Polynome mit den gleichen Jacobi-Exponenten verwenden würde. Eine solche Konstruktion konnte aber in der Literatur bislang nicht gefunden werden. Deshalb übernehmen wir die Strategie aus [42] und [17], d.h. auch wir werden die Basisfunktionen auf verallgemeinerte Dirichlet-Kerne zurückführen. In diesem Sinn besteht ein wesentlicher Schritt im Nachweis von (4.1) darin, nach geeigneten Zusammenhängen zwischen den Jacobi-Polynomen und trigonometrischen Funktionen zu suchen: Der Dirichlet-Mehler-Formel in (4.2) entsprechen dabei in natürlicher Weise zwei in Satz 2.41 und Korollar 2.42 formulierte allgemeine Integraldarstellungen vom Dirichlet-Mehler-Typ. Im Unterschied zum Legendre-Fall gehen in diese Formeln hypergeometrische Funktionen ein, deren Differenzierbarkeit und gleichmäßige Beschränktheit von den Jacobi-Exponenten α,β abhängen und im Allgemeinen nur auf kompakten Teilintervallen von $[-1,1]$ bzw. $[0,\pi]$ gegeben ist. Dass und wie die komplizierten Differenzierbarkeits- und Beschränktheitseigenschaften kontrollierbar sind, wurde wohl zuerst, allerdings in einem etwas anderen Zusammenhang, von Petrushev und Xu in [35] gesehen. Während sowohl in [42] als auch in [35] nur eine Art von Dirichlet-Mehler-Intergralen verwendet wird, ist es in dem hier zu führenden Beweis von zentraler Bedeutung, zwei Versionen dieser Formeln miteinander zu verküpfen.

Schwieriger ist es, eine Entsprechung für die Formeln (4.3), (4.4) und (4.5) zu finden. Die für den allgemeinen Jacobi-Fall gegebenen Abschätzungen der Lebesgue-Konstanten beruhen auf der Möglichkeit, die Jacobi-Polynome asymptotisch von beliebig großer, selbstverständlich von α,β abhängender Ordnung zu entwickeln und dabei zugleich Terme in Abhängigkeit von Quotienten der Form $\frac{N}{M}$ zu erzeugen. Der Ansatz von Skopina scheint in dieser Hinsicht nicht auf den allgemeinen Jacobi-Fall übetragbar zu sein: Die Volterra-Gleichung (4.3) besitzt zwar ein allgemeines Analogon in der Formel (vgl. [43, (8.63.2)])

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \\
&c_1\theta^{\frac{1}{2}}J_\alpha(N\theta) + c_2\theta^{\frac{1}{2}}J_{-\alpha}(N\theta) + \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{N}\int_{\theta_0}^{\theta} t^{-\frac{1}{2}}\frac{J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) - J_{-\alpha}(N\theta)J_\alpha(Nt)}{J'_\alpha(Nt)J_{-\alpha}(Nt) - J'_{-\alpha}(Nt)J_\alpha(Nt)} \\
&\quad\times\left(\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{t}{2}} + (\frac{1}{4}-\alpha^2)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right)\right)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Wie sich daraus aber sukzessiv eine Formel mit höherer Approximationsordnung gewinnen lässt, scheint aber bislang nicht bekannt zu sein. Außerdem dürften die entsprechenden Koeffizienten der Asymptotik, insbesondere also die Terme mit den Bessel-Funktionen wohl nur sehr schwer in $\frac{N}{M}$-Terme zerlegbar sein, wodurch die Abschätzung der L^1-Norm der Fourier-Transformierten $\widehat{g}$ einer entsprechend konstruierten Abtast-Funktion g sicher sehr erschwert wird.

Die Asymptotik aus Satz 2.36

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = 2\Re\left\{\sum_{m=0}^{q-1} A_m(\theta)(n+1)^{-m-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right\} + \mathcal{O}\left((n+1)^{-q-\frac{1}{2}}\right) \quad \theta \in (0,\pi),$$

wobei die A_m komplexwertige, stetige Funktionen auf $(0,\pi)$ sind, wäre zwar eine Verallgemeinerung von (4.3), (4.4) und (4.5), mit der Jacobi-Polynome auf trigonometrische Funktionen in beliebiger Approximationsordnung zurückführbar sind. Ihr entscheidender Nachteil besteht aber darin, dass der $\mathcal{O}$-Term nur auf kompakten Teilintervallen von $(0,\pi)$ gleichmäßig und damit auf gewissen Teilintervallen von $[0,\pi]$ keine Asymptotik zur Auswertung des $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}[-1,1]$-Integrals zur Verfügung steht. Auch die Asymptotik vom Hilb-Typ aus Satz 2.37

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) &= N^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} J_\alpha(N\theta) \\ &\quad + \begin{cases}\theta^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{falls } cn^{-1} \le \theta \le \pi-\varepsilon, \\ \theta^{\alpha+2}\mathcal{O}\left(n^{\alpha}\right) & \text{falls } 0 < \theta \le cn^{-1},\end{cases}\end{aligned} \tag{4.12}$$

für $N := \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}$, $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$ und feste $c, \varepsilon > 0$ kann letztlich nicht angewendet werden: Sie liefert zwar, kombiniert mit der Bessel-Asymptotik (vgl. Satz 2.11 und Korollar 2.12) eine gleichmäßige Asymptotik beliebiger Ordung für Teilintervalle $[0,\pi-\varepsilon]$. Ihr entscheidender Nachteil besteht aber darin, dass ihr $\mathcal{O}$-Term nicht klein genug ist. Eine Schwäche, die etwa bei der Untersuchung der Jacobi-Gewichte $\omega_{\alpha,\beta}$ mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ (vgl. die Beweise von (4.131) und (4.49)) nur durch einen größeren Argumentationsaufwand behoben werden kann. Diese Schwierigkeiten lassen sich aber überwinden - und darin besteht eine wichtige Einsicht der vorliegenden Arbeit, wenn man die auf Hankel zurückgehende Asymptotik zur Darstellung der Bessel-Funktionen durch trigonometrische Funktionen (vgl. Satz 2.11) mit einer von Bai und Zhao bewiesenen Asymptotik verknüpft, mit der Jacobi-Polynome durch Bessel-Funktionen (1. Art) (vgl. Satz 2.38) approximiert werden.

Abschließend bleibt noch ein mündlicher Hinweis von Prof. H. N. Mhaskar vom 06.08.09 in Lübeck zu kommentieren: Er hat vorgeschlagen, die sogenannten Verbindungsformeln zwischen Jacobi-Polynomen mit verschiedenen Jacobi-Exponenten anzuwenden, um Jacobi-Polynome auf trigonometrische Funktionen zurückzuführen. So gilt beispielsweise für alle $x \in [-1,1]$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta > -1$

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} P_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

wenn

$$c_{nk} = \frac{(n+\gamma+\delta+1)_k(k+\gamma+1)_{n-k}(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{(n-k)!\Gamma(2k+\alpha+\beta+2)} \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+k, n+k+\gamma+\delta+1, k+\alpha+1\\ k+\gamma+1, 2k+\alpha+\beta+2\end{matrix};1\right)$$

gesetzt wird (vgl. Satz 2.35). Für $\gamma = \delta = -\frac{1}{2}$ wäre also eine Übersetzung von Jacobi-Polynomen mit beliebigen Exponenten in trigonometrische Funktionen möglich und zwar mit dem großen Vorteil, dass keine $\mathcal{O}$-Terme zu berücksichtigen wären. Jedoch nur in einigen Spezialfällen, wenn beispielsweise $\alpha = \beta$ ist (vgl. [2, S. 356]), lässt sich diese Formel deutlich vereinfachen. Im Allgemeinen wird die hypergeometrische Funktion ${}_3F_2$ in Abhängigkeit vom Summationsindex k als Koeffizient vor den $\cos\theta$-Termen stehen und die Zerlegung in $\frac{N}{M}$-Terme sowie die Auswertung entsprechender Kernfunktionen deutlich erschweren.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 4.1 werden zunächst verallgemeinerte Basisfunktionen $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ definiert, auf verallgemeinerte Kernfunktionen zurückgeführt und durch diese abgeschätzt. Als Hauptresultate erhält man hier die Sätze 4.4 und 4.5. In Abschnitt 4.2 werden mit den Sätzen 4.8 und 4.12 die Lokalisierungs- und Wachstumseigenschaften der verallgemeinerten Kernfunktionen aus Abschnitt 4.1 hergeleitet. Schließlich wird in Abschnitt 4.3 Hauptsatz 4.21 bewiesen. Dazu wird die $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}[-1,1]$-Norm in (4.136) in Abhängigkeit von s abschnittweise abgeschätzt (vgl. Sätze 4.16, 4.17, 4.18). Dabei müssen die Fälle $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta > -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ einzeln untersucht werden, weil einige Asymptotiken nur im Fall $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ gültig sind (vgl. Sätze 4.19, 4.20). Die verschiedenen Teilresultate werden dann im Beweis von Hauptsatz 4.21 zusammengeführt, womit als Hauptresultat dieses Kapitels die gleichmäßige Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten der Räume $W^{(N,M)}$ bewiesen ist.

4.1 Abschätzungen verallgemeinerter Basisfunktionen $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$

In diesem Abschnitt werden die Basisfunktionen $\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(N,M)}$ der $W^{(N,M)}$-Räume (vgl. Definition 3.6) auf verschiedene verallgemeinerte Dirichlet-Kerne zurückgeführt. Zum Beweis von (4.1) ist es nicht erforderlich, dass g eine charakteristische Funktion ist (vgl. Definition 3.4, 1.). Vielmehr lassen sich die Abschätzungen des gesamten Kapitels für eine umfassendere Klasse *verallgemeinerter Basisfunktionen* beweisen, die man wie folgt definiert:

Definition 4.1 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit* $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$ *gegeben. Dann bezeichnet man die Funktionen*

$$\psi_{k,g}^{(\alpha,\beta)}(x) := \psi_k^{(\alpha,\beta)}(x) := M^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) \cos((3M+j)\theta_k) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{4.13}$$

als verallgemeinerte Basisfunktionen, wobei $k = 0, ..., 2M-1$ und $x \in [-1,1]$ ist.

Bemerkung 4.2 *Die Forderung $N > 4M$ wäre häufig abschwächbar zu $N > 3M$ oder komplett verzichtbar. Der besseren Lesbarkeit soll hier aber der Vorzug vor der Darstellung möglichst allgemeiner Resultate gegeben werden, weshalb einheitlich die stärkere Forderung $N > 4M$ aufgestellt wird.*

Diese verallgemeinerten Basisfunktionen $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ lassen sich nach der Transformation $x = \cos\theta$ ($|\theta| \leq \pi$) auf vier Typen verallgemeinerter Kernfunktionen zurückführen.

Definition 4.3 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$. Für $\theta \in \mathbb{R}$ definiert man*

$$K_M^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}, \tag{4.14}$$

$$K_{M,\gamma_1,\gamma_2}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N}{M} - 1 + \frac{j}{M}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{N}{M} - 1 + \frac{\lambda}{M} + \frac{j}{M}\right)^{\gamma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}, \tag{4.15}$$

$$K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(1)\left(\frac{N+\alpha}{M} - 1 + \frac{j}{M}\right)\frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M} + \frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M} + \frac{j}{M}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}, \tag{4.16}$$

$$K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(1)\left(\frac{N}{M} - 1 + \frac{j}{M}\right)\frac{\frac{N+\beta}{M} + \frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M} + \frac{j}{M}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}. \tag{4.17}$$

Mit den Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ in Satz 2.41 und Korollar 2.42 sowie den Stetigkeitseigenschaften der hypergeometrischen Funktionen aus Abschnitt 2.6 ergibt sich als erstes Hauptresultat dieses Abschnitts der

Satz 4.4 *Es seien $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, $K_M^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ gemäß Definition 4.3 und $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ ($k = 0, ..., 2M-1$) gemäß Definition 4.1 gegeben.*

1. Für $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta < \pi$ gilt:

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{\alpha,\beta}\int_\theta^\pi \frac{|K_M^{(\beta,\alpha)}(\phi \pm \theta_k)|(\cos\theta - \cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^\beta(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi, \tag{4.18}$$

2. Für $\alpha > 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta < \pi$ gilt:

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{\alpha,\beta}\int_\theta^\pi \frac{|K_M^{(\beta,\alpha)}(\phi \pm \theta_k)|(\cos\theta - \cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^\beta(1-\cos\theta)^\alpha(1-\cos\phi)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\phi, \tag{4.19}$$

3. Für $\alpha = 0$, $\beta > -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta < \pi$ gilt:

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{\alpha,\beta}\int_\theta^\pi \frac{|K_M^{(\beta,\alpha)}(\phi \pm \theta_k)|(\cos\theta - \cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^\beta(1-\cos\theta)^{\alpha+1}(1-\cos\phi)^{\frac{\beta-\alpha-2}{2}}}\mathrm{d}\phi, \tag{4.20}$$

4. Für $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -1$ und $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{\alpha,\beta}\int_0^\theta \frac{|K_M^{(\alpha,\beta)}(\phi - \theta_k)|(\cos\phi - \cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^\alpha(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi, \tag{4.21}$$

5. Für $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta \geq \frac{1}{2}$ und $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$|\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)| \leq c_\beta \sqrt{M} \int_0^\theta \frac{|K_{1,M}^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\phi \pm \theta_k)| + |K_{2,M}^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\phi \pm \theta_k)|}{(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}}} \mathrm{d}\phi, \tag{4.22}$$

6. Für $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ und $0 < \theta \leq \pi$ gilt:

$$\begin{aligned} |\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)| \leq c\frac{1}{\sqrt{M}}(1+\cos\frac{\theta}{2})^{-\alpha} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi} \left|K_M^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(2\vartheta \pm \theta_k)\right| & \\ \times \begin{cases} \frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\alpha}}\mathrm{d}\vartheta & \text{für } -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \\ (1-\cos\frac{\theta}{2})^{-\alpha}\frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{0}}\mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha = 0, \\ (1-\cos\frac{\theta}{2})^{-\alpha-1}\frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{-1}}\mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha > 0. \end{cases} & \end{aligned} \tag{4.23}$$

Beweis: Zur Abkürzung setzt man $\tilde{n} := N - M + j$ und $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$. Beweis von (4.18): Wegen $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta-\alpha))$ gilt

$$\begin{aligned} &\cos((3M+j)\theta_k) \cdot \cos((N-M+j)\phi - \lambda(\pi-\phi)) \\ &= \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k+(N-M)\phi-\lambda(\pi-\phi))} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi+\theta_k)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3M\theta_k+(N-M)\phi-\lambda(\pi-\phi))} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi-\theta_k)}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(h_{\tilde{n}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\tilde{n}}^{(\beta,\alpha)}(1)\cos((3M+j)\theta_k)\cos(\tilde{n}\phi - \lambda(\pi-\phi)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(h_{\tilde{n}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\tilde{n}}^{(\beta,\alpha)}(1)\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k+(N-M)\phi-\lambda(\pi-\phi))} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi+\theta_k)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cdot \left(h_{\tilde{n}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\tilde{n}}^{(\beta,\alpha)}(1)\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3M\theta_k+(N-M)\phi-\lambda(\pi-\phi))} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi-\theta_k)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm 3M\theta_k+(N-M)\phi-\lambda(\pi-\phi))} \cdot \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cdot \left(h_{\tilde{n}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\tilde{n}}^{(\beta,\alpha)}(1) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi\pm\theta_k)}\right), \end{aligned}$$

nach (4.14) insgesamt also

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(h_{\tilde{n}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\tilde{n}}^{(\beta,\alpha)}(1)\cos((3M+j)\theta_k)\cos(\tilde{n}\phi - \lambda(\pi-\phi))\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|K_M^{(\beta,\alpha)}(\phi \pm \theta_k)\right|. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Wegen (2.57), (4.25) und weil $h_n^{(\alpha,\beta)} = h_n^{(\beta,\alpha)}$ ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \leq c_{\alpha,\beta} \cdot (1+\cos\theta)^{-\beta} \int_\theta^\pi |K_M^{(\beta,\alpha)}(\phi \pm \theta_k)| \frac{(\cos\theta - \cos\phi)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} & \\ \times \left|{}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \frac{\cos\theta-\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right| \mathrm{d}\phi. & \end{aligned}$$

Schließlich ist wegen $0 < \theta \le \phi \le \pi$ auch $0 \le \frac{\cos\theta - \cos\phi}{1-\cos\phi} \le 1$ und wegen $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$ auch $\beta + \frac{1}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta+1}{2} = -\alpha > 0$, so dass (2.23) angewendet werden kann und damit (4.18) insgesamt bewiesen ist.
Beweis von (4.19) bzw. (4.20), (4.21): Mit den gleichen Argumenten wie beim Beweis von (4.18) zeigt man zunächst (4.25). Dann kombiniert man (2.59) mit (2.24), bzw. (2.59) mit (2.25), bzw. (2.52) mit (2.26), woraus sich die gewünschten Abschätzungen ergeben.
Beweis von (4.22): Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta \ge \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)| &\le \Big|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M})\cos((3M+j)\theta_k)(h_{N-M+j}^{(-\frac{1}{2},\beta)})^{-\frac{1}{2}} P_{N-M+j}^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos\theta)\Big| \\
&\le \Big|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M})\cos((3M+j)\theta_k)(h_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} \frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}} P_{N-M+j}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta)\Big| \\
&\quad + \Big|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M})\cos((3M+j)\theta_k)(h_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} \frac{\frac{N+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}} P_{N-M+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta)\Big| \\
&\le c_1(1-\cos\theta)^{-\alpha-1}\sqrt{M}\int_0^\theta |K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\phi\pm\theta_k)| \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi \\
&\quad + c_2(1-\cos\theta)^{-\alpha-1}\sqrt{M}\int_0^\theta |K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\phi\pm\theta_k)| \frac{(\cos\phi-\cos\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

wobei im zweiten Schritt (2.35) und im dritten Schritt (4.18), die sich aus (2.30) ergebenden Identitäten

$$\begin{aligned}
P_{N-M+j}^{(\alpha+1,\beta)}(1) &= \frac{\Gamma(N-M+j+\alpha+1)}{\Gamma(N-M+j+1)\Gamma(\alpha+1+1)} \\
&= \frac{(N-M+j+\alpha)}{\alpha+1}\frac{\Gamma(N-M+j+\alpha)}{\Gamma(N-M+j+1)\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{N-M+j+\alpha}{\alpha+1}P_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P_{N-M+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(1) &= \frac{\Gamma(N-M+j-1+\alpha+1)}{\Gamma(N-M+j-1+1)\Gamma(\alpha+1+1)} \\
&= \frac{(N-M+j)}{\alpha+1}\frac{\Gamma(N-M+j+\alpha)}{\Gamma(N-M+j+1)\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{N-M+j}{\alpha+1}P_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(1)
\end{aligned}$$

sowie die trigonometrische Identität

$$\begin{aligned}
&\cos((3M+j)\theta_k)\cdot\cos((N-M+j)\theta-\lambda_1(\pi-\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k+(N-M)\theta-\lambda_1(\pi-\theta))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta_k-\theta)}\right) + \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k-(N-M)\theta+\lambda_1(\pi-\theta))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta_k+\theta)}\right)
\end{aligned}$$

mit $\lambda_1 := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ angewendet wurden. Nach Einsetzen von $\alpha = -\frac{1}{2}$ und unter Beachtung von (4.16) und (4.17) erhält man schließlich (4.22).

Beweis von (4.23): Aus Satz 2.31 folgt zunächst

$$\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) \cos((3M+j)\theta_k) p_{N-M+j}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) \cos((3M+j)\theta_k) p_{N-M+j}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(1) \frac{P_{2(N-M+j)}^{(\alpha,\alpha)}(\cos(\frac{\theta}{2})}{P_{2(N-M+j)}^{(\alpha,\alpha)}(1)}.$$

Auf den Quotienten $\frac{P_{2(N-M+j)}^{(\alpha,\alpha)}(\cos(\frac{\theta}{2}))}{P_{2(N-M+j)}^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ wendet man nun im Fall $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ (2.57) und (2.23), im Fall $\alpha > 0$ (2.58) und (2.24) und im Fall $\alpha = 0$ (2.59), (2.25) und die bekannte Ungleichung $\log x \leq x$ $(x > 0)$ an. Daraus erhält man unter Beachtung von

$$\cos((3M+j)\theta_k) \cdot \cos(2(N-M+j)\vartheta - \lambda(\pi - \vartheta))$$
$$= \frac{1}{2} \Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k - \lambda(\pi-\vartheta) + 2(N-M)\vartheta)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(2\vartheta+\theta_k)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3M\theta_k - \lambda(\pi-\vartheta)+2(N-M)\vartheta)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(2\vartheta-\theta_k)})$$

(hier mit $\lambda = \frac{\alpha+\beta+1}{2} = \alpha + \frac{1}{2}$) und (4.14)

$$|\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos\theta)| \leq c \frac{1}{\sqrt{M}} (1 + \cos\frac{\theta}{2})^{-\alpha} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi} \left| K_M^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(2\vartheta \pm \theta_k) \right|$$
$$\times \begin{cases} \frac{(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\alpha}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \\ (1 - \cos\frac{\theta}{2})^{-\alpha} \frac{(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{0}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha = 0, \\ \frac{(1-\cos\vartheta)}{(1-\cos\frac{\theta}{2})} (\cos\frac{\theta}{2} - \cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha > 0, \end{cases}$$

womit auch (4.23) und damit der ganze Satz bewiesen ist. ■

Im nächsten Satz wird der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Basisfunktionen $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ und den Kernfunktionen $K_{M,\gamma_1,\gamma_2}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ hergestellt. Dazu werden eine Asymptotik zur Darstellung der Bessel-Funktionen durch trigonometrische Funktionen (vgl. Satz 2.11) mit Asymptotik verknüpft, mit der Jacobi-Polynome durch Bessel-Funktionen (vgl. Satz 2.38) approximiert werden.

Satz 4.5 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit* supp $g \subseteq [-2, 2]$ *sowie $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $N > \alpha + \beta + 1$. Ferner seien $K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ und $K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ gemäß Definition 4.3 und $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle $\frac{1}{M} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ gilt*

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)| \leq c_1 \theta^{-\alpha} \left(\frac{M}{(M\theta)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(M\theta)^{\frac{1}{2}}} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)|}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}} \right) \tag{4.27}$$

und

$$\begin{aligned} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)| \leq c_2 \theta^{-\alpha} \Bigg(& \frac{1}{M(M\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{M}{(M\theta)^{n+\frac{1}{2}}} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)|}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}} \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)| + |K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)|}{M} \Bigg). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Beweis: Man setzt

$$\widetilde{M} := 3M + j,\ \widetilde{N} := N - M + j \ \text{ und } N^* := N - M + j + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \tag{4.29}$$

woraus sich für $|j| \leq 2M$ die Ungleichungen

$$\frac{1}{4}\frac{N}{M} \leq \frac{\widetilde{N}}{M} \leq 4\frac{N}{M} \text{ und } \frac{1}{4}\frac{N}{M} \leq \frac{N^*}{M} \leq 4\frac{N}{M} \tag{4.30}$$

ergeben.
Beweis zu (4.27): Nach Voraussetzung ist $(N-3M)\theta \geq \frac{N-3M}{M} > 1$, weshalb Korollar 2.12 angewendet werden kann. Zusammen mit Satz 2.38 für $m = 1$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ und (2.44) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\cdot\cos(\widetilde{M}\theta_k)\cdot\left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{n-1} c_{1,l}\Bigg|\sum_{j=-2M}^{2M}\left(\frac{\widetilde{N}}{M}\right)^{\frac{1}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k) && (4.31)\\
&\qquad\times\frac{\cos(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\Bigg| && (4.32)\\
&\quad+\sum_{l=0}^{n-1} c_{2,l}\Bigg|\sum_{j=-2M}^{2M} M^{-1}\left(\frac{\widetilde{N}}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k)\\
&\qquad\times\frac{\cos(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\Bigg| && (4.33)\\
&\quad+\sum_{l=0}^{n-1} c_{3,l}\Bigg|\sum_{j=-2M}^{2M} c_2 M^{-\frac{1}{2}} c\widetilde{N}^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k)\\
&\qquad\times\frac{\cos(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\Bigg| && (4.34)\\
&\quad+\sum_{l=0}^{n-1} c_{4,l}\left|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\cos(\tilde{M}\theta_k)\left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\widetilde{\varepsilon}_n(N^*\theta)\right| && (4.35)\\
&\quad+\sum_{l=0}^{n-1} c_{5,l}\left|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\cos(\tilde{M}\theta_k)\left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\varepsilon_1(\theta)\right|. && (4.36)
\end{aligned}$$

Abschätzung der l-Summanden in (4.32) und (4.33): Wegen

$$\begin{aligned}
\cos(\widetilde{M}\theta_k)\cos\left(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3M\theta_k+(N-M+\frac{\alpha+\beta+1}{2})\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta+\theta_k)}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3M\theta_k+(N-M+\frac{\alpha+\beta+1}{2})\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta-\theta_k)}\right)
\end{aligned}$$

folgt analog zum Beweis von (4.25) und unter Beachtung von (4.29) und (4.15) für die l-Summanden in (4.32)

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=-2M}^{2M} c_0 \left(\frac{\widetilde{N}}{M}\right)^{\frac{1}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k)\frac{\cos(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\right| \\ &\leq \frac{\widetilde{c}_l\theta^{-\alpha}}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\left|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(\theta\pm\theta_k)\right|\end{aligned} \tag{4.37}$$

und für die l-Summanden in (4.33)

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=-2M}^{2M} c_1 M^{-1} \left(\frac{\widetilde{N}}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k)\frac{\cos(N^*\theta-(\alpha+\frac{1}{2}+l)\frac{\pi}{2})}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\right| \\ &\leq \frac{\widetilde{c}_l M^{-1}\theta^{-\alpha}}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\left|K^{(\alpha,\beta)}_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(\theta\pm\theta_k)\right| \leq \widetilde{c}(M\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha},\end{aligned} \tag{4.38}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass nach Voraussetzung $M\theta > 1$ und nach (4.15) auch $\left|K^{(\alpha,\beta)}_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(\theta\pm\theta_k)\right| \leq cM$ ist.
Abschätzung der l-Summanden in (4.34): Es gilt

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=-2M}^{2M} M^{-\frac{1}{2}} c\widetilde{N}^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{j}{M}\right)\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha}\cos(\widetilde{M}\theta_k)\frac{\cos\left(N^*\theta-\left(\alpha+\frac{1}{2}+l\right)\frac{\pi}{2}\right)}{(M\theta)^{l+\frac{1}{2}}}\right| \\ &\leq c(4M+1)\cdot M^{-2}\cdot\left(\frac{\widetilde{N}}{M}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\|g\|_\infty\left(\frac{N^*}{M}\right)^{-l-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}\cdot(M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \\ &\leq cM^{-1}\left(\frac{N}{M}\right)^{-l-2}\theta^{-\alpha}(M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \leq c\cdot M^{-1}\theta^{-\alpha}(M\theta)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{4.39}$$

wobei im letzten Schritt wieder (4.29) verwendet wurde.
Abschätzung der l-Summanden in (4.35): Wegen $\theta \geq \frac{1}{M}$, $N-4M>0$ und (4.29) folgt $N^*\theta \geq 1$ und (2.16) liefert somit $|\widetilde{\varepsilon}_n(N^*\theta)| \leq c_{\alpha,n}(N^*\theta)^{-n-\frac{1}{2}}$ für alle $\theta \geq \frac{1}{M}$ und unter Beachtung von (4.29) damit auch

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right)\cos(\widetilde{M}\theta_k)\left(h^{(\alpha,\beta)}_{\widetilde{N}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot a_{0,0}(\theta^2)\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\cdot\widetilde{\varepsilon}_n(N^*\theta)\right| \\ &\leq cM^{-\frac{1}{2}}(4M+1)\cdot\widetilde{N}^{\frac{1}{2}}\cdot\|a_{0,0}\|_{C[0,\frac{5\pi}{6}]}(N^*\theta)^{-n-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \\ &\leq c\cdot M\left(\frac{N}{M}\right)^{-n}(M\theta)^{-n-\frac{1}{2}}\cdot\theta^{-\alpha}.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Abschätzung der l-Summanden in (4.36): Wegen $\theta \geq \frac{1}{M}$, $N-4M>0$ und (4.29) ist wieder $\widetilde{N}\theta \geq 1$ und nach (2.40) und (2.17) folgt somit $|\varepsilon_1(\theta)| \leq c_\alpha\,(N^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{N^*\theta}}$ für alle

$\frac{1}{M}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{6}$ und man erhält insgesamt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\widetilde{M}\theta_k) \cdot \left(h_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \cdot \varepsilon_1(\theta) \right| \\
&\leq c \cdot M^{-\frac{1}{2}} (4M+1) \cdot \|g\|_\infty \cdot \widetilde{N}^{\frac{1}{2}} \cdot \theta^{-\alpha} \cdot M_1 \cdot (N^*)^{-1} \cdot (N^*\theta)^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{-1} \cdot \theta^{-\alpha} \cdot (M\theta)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Aus (4.37), (4.38), (4.39), (4.40) und (4.41) folgt nun unmittelbar (4.27).
Beweis von (4.28): Aus Satz 2.38 für $m = 2$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ und (2.14) folgt

$$\begin{aligned}
\left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cdot \cos(\widetilde{M}\theta_k) \cdot \left(h_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \right| \\
&\leq c_1 \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\widetilde{M}\theta_k) \left(h_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \right. \\
&\qquad \left. \times J_\alpha(N^*\theta) \left(1 + \frac{1}{N^*} + \frac{1}{(N^*)^2}\right) \right| \\
&\quad + c_2 \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\widetilde{M}\theta_k) \left(h_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \right. \\
&\qquad \left. \times \theta \left(\frac{\alpha}{N^*\theta} J_\alpha(N^*\theta) - J_{\alpha+1}(N^*\theta)\right) \frac{1}{N^*} \right| \\
&\quad + c_3 \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\widetilde{M}\theta_k) \left(h_{\widetilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \varepsilon_2(\theta) \right|,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

wobei man ausnutzt, dass die Funktionen $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $b_{0,0}$ und $b_{1,0}$ insbesondere unabhängig von $\widetilde{N}$, gemäß Satz 2.38 analytisch auf dem kompakten Intervall $[0, \frac{5\pi}{6}]$ und ihre Beträge deshalb dort auch beschränkt sind. Nun wendet man auf (4.42) Korollar 2.12 an und die gleichen Rechnungen, mit denen man die l-Summanden im Beweis aus (4.27) abgeschätzt hat, liefern jetzt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\tilde{M}\theta_k) \left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(N^*\theta) \right| \\
&\leq c_1 \sum_{l=0}^{n-1} (M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \left(\left| K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) + M^{-1} K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \right) \theta^{-\alpha} \\
&\quad + c_2 (M\theta)^{-\frac{1}{2}} M^{-1} \theta^{-\alpha} + c_3 M (M\theta)^{-n-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha},
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\tilde{M}\theta_k) \left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(N^*\theta) \frac{1}{N^*} \right| \\
&\leq c_1 \sum_{l=0}^{n-1} M^{-1} (M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \left(\left| K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + M^{-1} \left| K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \right) \theta^{-\alpha} \\
&\quad + c_3 M^{-2} (M\theta)^{-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha} + c_4 (M\theta)^{-n-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\tilde{M}\theta_k) \left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+1}(N^*\theta)\frac{1}{N^*} \right|$$
$$\leq c_1 \sum_{l=0}^{n-1} M^{-1}(M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \left(\left| K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + M^{-1} \left| K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \right) \theta^{-\alpha}$$
$$+c_3 M^{-2}(M\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha} + c_4(M\theta)^{-n-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha} \tag{4.45}$$

und

$$\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\tilde{M}\theta_k) \left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(N^*\theta)\frac{1}{N^{*2}} \right|$$
$$\leq c_1 \sum_{l=0}^{n-1} M^{-2}(M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \left(\left| K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{5}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + M^{-1} \left| K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{5}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \right) \theta^{-\alpha}$$
$$+c_2 M^{-3}(M\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha} + c_4 M^{-1} \cdot (M\theta)^{-n-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}. \tag{4.46}$$

Für den letzten Summanden in (4.42) folgt aus (2.40), Bemerkung 2.13 und (4.30) zunächst $|\varepsilon_2(\theta)| \leq C_2 M^{-2} \left(\frac{N}{M}\right)^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{M\theta}}$ und damit

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos(\widetilde{M}\theta_k) \left(h_{\tilde{N}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \varepsilon_2(\theta) \right| \\ &\leq c(4M+1)\theta^{-\alpha} M^{-2} \left(\frac{N}{M}\right)^{-2} \frac{1}{\sqrt{(M\theta)}} \leq cM^{-1}(M\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass $\left| K_{M,-\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \leq cM$ gemäß (4.15) und der Voraussetzung, dass $M\theta > 1$ ist, ergibt sich (4.28) schließlich aus (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) und (4.47). ■

Für den Sonderfall $\alpha = -\frac{1}{2}$ lassen sich die Abschätzungen aus Satz 4.5 verbessern und sind nicht nur auf $[\frac{1}{M}, \frac{5}{6}\pi]$, sondern sogar auf $[0, \frac{5}{6}\pi]$ gültig, was für die Abschätzung der Lebesgue-Konstanten für diese Spezialfälle von besonderer Bedeutung ist (vgl. beispielsweise Satz 4.19).

Korollar 4.6 *Es seien $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit* supp $g \subseteq [-2,2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit $N > 3M$, $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0,...,2M-1)$ gemäß Definition 4.1 und $K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)$, $K_{M,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)$, $K_{M,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)$ und $K_{M,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k)$ gemäß Definition 4.3 gegeben. Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, so dass für alle $0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ gilt:*

$$|\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos\theta)| \leq c_1 M^{-\frac{1}{2}} \left| K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + c_2 M^{-\frac{1}{2}} \tag{4.48}$$

und

$$\begin{aligned} |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos\theta)| \leq{}& c_1 M^{-\frac{1}{2}} \left| K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + c_2 M^{-\frac{3}{2}} \left| K_{M,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \\ &+ c_3 M^{-\frac{3}{2}} \left| K_{M,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| + c_4 M^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Beweis: Beweis von (4.48): Analog zum Beweis von (4.27) folgt die Behauptung aus Korollar 2.12 für $n = 1$, Satz 2.38 für $m = 1$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ und (2.44), allerdings mit folgender Vereinfachung: nach (2.13) ist $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\widetilde{\varepsilon}_1(x) \equiv 0$ gemäß Korollar 2.12 ist. Somit sind die Summanden in (4.35) und mit ihnen die $(M\theta)^{-n-\frac{1}{2}}$-Terme aus (4.40) für alle $0 < \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ und aus Stetigkeitsgründen auch für $\theta = 0$ identisch Null. Fasst man die verbleibenden Summanden zusammen, ergibt sich die gewünschte Abschätzung (4.48).
Beweis von (4.49): Wie im Beweis zu (4.28) wendet man zunächst Korollar 2.12 für $n = 1$, Satz 2.38 für $m = 2$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ und (2.44) an. Zusätzlich beachtet man wieder, dass gemäß (2.13) und Korollar 2.12 die $\widetilde{\varepsilon}_1(x) \equiv 0$ sind für $J_{\frac{1}{2}}(x)$ und $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, weshalb die zu (4.35) bzw. zu (4.40) analogen Terme identisch gleich Null sind und die $(M\theta)^{-n-\frac{1}{2}}$-Terme auf der rechten Seite von (4.28) und damit auch in (4.49) verschwinden. Damit ist (4.49) bewiesen. ■

4.2 Lokalisierungseigenschaften der Kernfunktionen

Als Hauptresultat dieses Abschnitts wird das Lokalisierungs- und Wachstumsverhalten der in diesem Kapitel benötigten Kernfunktionen hergeleitet (vgl. Satz 4.12). Dazu orientieren wir uns am Vorgehen von Petrushev und Xu in [35], wobei ihre Methoden allerdings ausgearbeitet und verallgemeinert werden müssen, weil einige der hier betrachteten Kerne im Vergleich zu [35] algebraisch komplexer sind.
Zunächst werden die in in Definition 4.3 betrachteten Funktionen auf eine etwas umfassendere Klasse von Kernen zurückgeführt. Für $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $f := f_{\frac{N}{M},\alpha,\beta} \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq [-2, 2]$, $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ definiert man

$$K^{(\alpha,\beta)}_{f,G,M}(\theta) := \sum_{s=-2M}^{2M} f\Big(\frac{s}{M}\Big) G(N - M + s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}. \tag{4.50}$$

Im Folgenden werden die Lokalisierungseigenschaften dieser verallgemeinerten Kernfunktionen untersucht. Es gilt das

Lemma 4.7 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine analytische Funktion und $C_G \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten $c_k > 0$ existieren mit*

$$\left|G(t)^{(k)}\right| \leq c_k t^{C_G - k} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.51}$$

Es seien ferner $f \in C^r_c(\mathbb{R})$ mit $r \geq 2$ und $\operatorname{supp} f \subseteq [-2, 2]$*, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$,*

$$\widetilde{\phi}_M(t) := \begin{cases} f(\frac{t}{M}) G(N - M + t) & \text{für } t \in [-2M, 2M], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.52}$$

und

$$\phi_M(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_M(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi} \mathrm{d}\xi \tag{4.53}$$

gegeben. Dann gilt

$$\widehat{\phi_M}(t) = \widetilde{\phi}_M(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \tag{4.54}$$

und

$$|\phi_M(t)| \leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \cdot \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|t|)^r} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{4.55}$$

wobei $c_{r,f} = c_r \cdot \max_{0\leq j\leq r} \|f^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *ist.*

Beweis: Nach Definition 2.44 ist

$$\phi_M(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_M(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}(\widetilde{\phi}_M)\hat{}(-t).$$

Weil nach Voraussetzung $\widetilde{\phi}_M$ stetig und eine $L^1(\mathbb{R})$-Funktion ist, kann Satz 2.46 angewendet werden und man erhält

$$\widehat{\phi_M}(t) = \frac{1}{2\pi}((\widetilde{\phi}_M)\hat{}(-t))\hat{} = \frac{1}{2\pi}((\widetilde{\phi}_M)\hat{})\hat{}(-t) = \widetilde{\phi}_M(t),$$

womit (4.54) bewiesen ist.
Nach der Definition von ϕ_M und dem bekannten Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale muß ϕ_M stetig sein. Wie oben gezeigt, ist aber auch $\phi_M(t) = \frac{1}{2\pi}(\widetilde{\phi}_M)\hat{}(-t)$, so dass wegen $\widetilde{\phi}_M \in C_c^2(\mathbb{R})$ nach Satz 2.47 auch $\phi_M(t)$ eine $L^1(\mathbb{R})$-Funktion ist. Aus den Sätzen 2.47 und 2.46 folgt somit für alle $s \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}\xi^s}\left(\widehat{\phi}_M(\xi)\right)\right)\hat{}(-t) = \mathrm{i}^s(-t)^s\left(\widehat{\widehat{\phi_M}}\right)(-t) = 2\pi\mathrm{i}^s(-t)^s\phi_M(t)$$

und nach Definition 2.44 also

$$t^s\phi_M(t) = \frac{\mathrm{i}^s}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}\xi^s}(\tilde{\phi}_M(\xi))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{d}\xi \tag{4.56}$$

für alle $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Mit der Produktregel von Leibniz ergibt sich aus (4.56) nun

$$\begin{aligned}
|t^r\phi_M(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\xi^r}\left(f(\frac{\xi}{M})G(N-M+\xi)\right)|\mathrm{d}\xi \\
&\leq \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{1}{M^j}\int_{\mathbb{R}}|f^{(j)}(\frac{\xi}{M})G^{(r-j)}(N-M+\xi)|\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{M}{M^j}\int_{-2}^{2}|f^{(j)}(u)G^{(r-j)}(N-M+Mu)|\mathrm{d}u \\
&\leq \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{M}{M^j}\int_{-2}^{2}|f^{(j)}(u)c_{r-j}(N-M+Mu)^{C_G-r+j}|\mathrm{d}u \\
&\leq c_r\sum_{j=0}^{r}\frac{M}{M^j}M^{C_G-r+j}\int_{-2}^{2}|f^{(j)}(u)(\frac{N}{M}-1+u)^{C_G-r+j}|\mathrm{d}u \\
&\leq c_r\left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} M^{C_G+1-r}\max_{0\leq j\leq r}\|f^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

und somit

$$|\phi_M(t)| \leq c_{r,f}\left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} M^{C_G+1-r}\cdot|t|^{-r} \tag{4.58}$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dabei konnte wegen $N - 4M \geq 1$ im vierten Schritt von (4.57) die Voraussetzung (4.51) angewendet werden. Im sechsten Schritt wurde benutzt, dass wegen $\operatorname{supp} f \subseteq [-2, 2]$ und $N > 4M$ die Ungleichung $2\frac{N}{M} \geq \frac{N}{M} - 1 + u \geq \frac{N}{M} - 3 \geq \frac{1}{4}\frac{N}{M} > 1$ für alle $u \in [-2, 2]$ erfüllt ist, also keine Singularitäten im Integrationsbereich zu befürchten sind. Analog und sogar einfacher erhält man direkt aus (4.52) und (4.53)

$$|\phi_M(t)| \leq c_0 \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} M^{C_G+1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{4.59}$$

Für $|t| \geq \frac{1}{M}$ ist $\frac{1+M|t|}{2} \leq M|t|$ und für $0 < |t| \leq \frac{1}{M}$ ist $1 \leq \frac{2}{(1+M|t|)}$, woraus zusammen mit (4.58) unmittelbar die Richtigkeit von (4.55) folgt. Der Sonderfall $t = 0$ ergibt sich direkt aus der Ungleichung (4.59). Damit ist auch (4.55) und das Lemma insgesamt bewiesen.■

Nun lassen sich für uns wichtige Lokalisierungseigenschaften der verallgemeinerten Kerne aus (4.50) herleiten. Es gilt der

Satz 4.8 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine analytische Funktion und $C_G \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten $c_k > 0$ existieren mit*

$$\left|G(t)^{(k)}\right| \leq c_k t^{C_G - k} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.60}$$

Es seien ferner $f \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r \geq 2$ und $\operatorname{supp} f \subseteq [-2, 2]$ *und $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$. Dann gilt für alle $|\theta| \leq \pi$*

$$|K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)| \leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1 + M|\theta|)^r} \tag{4.61}$$

und für alle $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$|K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \varphi)| \leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1 + M|\theta - \varphi|)^r}, \tag{4.62}$$

wobei $c_{r,f} = c(\alpha, \beta, r) \cdot \max_{0 \leq \nu \leq r} \|f^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ist.

Beweis: Beweis von (4.61): Wie in (4.52) und (4.53) definiert man ϕ_M und $\widetilde{\phi}_M$ und beweist wie in Lemma 4.7 die Identität $\widehat{\phi_M}(t) = \widetilde{\phi}_M(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist $\widehat{\phi_M}$ reellwertig, hat einen kompakten Träger und ist mindestens zweimal stetig differenzierbar, weshalb nach Satz 2.47 schließlich auch $(\widehat{\phi_M})\widehat{\ }$ eine $L^1(\mathbb{R})$-Funktion ist. Insgesamt lässt sich nun die Summationsformel von Poisson aus Satz 2.50, 2. mit $\omega = 1$ anwenden und man erhält unter Beachtung von $\operatorname{supp} f \subseteq [-2, 2]$ und der Definition in (4.50)

$$K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \sum_{j=-2M}^{2M} \widetilde{\phi}_M(j) e^{\mathrm{i}j\theta} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{\phi}_M(j) e^{\mathrm{i}j\theta} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}_M(j) e^{\mathrm{i}j\theta} = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_M(2\pi j + \theta). \tag{4.63}$$

Nach (4.55) existiert ein $c_{r,f} > 0$, so dass für $|\theta| \leq \pi$ gilt

$$\begin{aligned}
|K_M^{(\alpha,\beta)}(\theta)| &\leq 2\pi|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_M(2\pi j+\theta)| \leq c_{r,f} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|2\pi j+\theta|)^r} \\
&\leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|\theta|)^r} + c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M(2j-1)\pi)^r} \\
&\leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|\theta|)^r} + c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M)^r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-r} \\
&\leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|\theta|)^r}. \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich (4.64) wie folgt: Für $|\theta| \leq 1$ gilt offensichtlich $\frac{1}{1+M} \leq \frac{1}{1+M|\theta|}$; für $|\theta| \geq 1$ gilt offensichtlich:

$$\frac{1}{(1+M)^r} \leq |\theta|^r \frac{1}{(|\theta|+M|\theta|)^r} \leq \pi^r \frac{1}{(1+M|\theta|)^r} \leq c_r \frac{1}{(1+M|\theta|)^r}.$$

Nach Voraussetzung ist aber auch $r \geq 2$ und somit $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-r} < \infty$, was insgesamt (4.64) beweist. Damit ist auch (4.61) bewiesen.
Beweis von (4.62): Es seien $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$. Für $\theta+\varphi \leq \pi$ ist $|\theta-\varphi| \leq |\theta+\varphi|$, woraus sich (4.62) durch direktes Einsetzen in (4.64) ergibt.
Für $2\pi \geq \theta+\varphi \geq \pi$ ist auch $|2\pi-\theta-\varphi| \leq \pi$. Ferner ist

$$|\theta+\varphi-2\pi| \geq |\theta-\varphi|, \qquad (4.65)$$

denn für $\theta \geq \varphi$ gilt

$$|\theta+\varphi-2\pi| = 2\pi-\theta-\varphi \geq \theta-\varphi \geq 0,$$

was wegen $\pi \geq \theta$ offensichtlich stimmt, und für $\varphi \geq \theta$ gilt

$$|\theta+\varphi-2\pi| = 2\pi-\theta-\varphi \geq \varphi-\theta \geq 0,$$

was wegen $\pi \geq \varphi$ offensichtlich auch stimmt. Damit ist (4.65) bewiesen.
Wegen (4.64), (4.65) und weil $K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ nach Definition in (4.50) ein trigonometrisches Polynom ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
|K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta+\varphi)| &= |K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta+\varphi-2\pi)| \\
&\leq c_{r,f} \cdot \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|\theta+\varphi-2\pi|)^r} \\
&\leq c_{r,f} \cdot \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|\theta-\varphi|)^r},
\end{aligned}$$

womit (4.62) und damit der gesamte Satz bewiesen ist. ■

Aus dem vorangegangenen Satz erhält man unmittelbar das

Korollar 4.9 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.8 gilt*

$$\left\| K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c_f N^{C_G}, \qquad (4.66)$$

wobei $c_{r,f} = c(\alpha,\beta,r) \cdot \max_{0\leq\nu\leq r} \|f^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *ist.*

Beweis: Die gewünschte Abschätzung ergibt sich nach einer einfachen Integration unmittelbar aus (4.61). ∎

Im nächsten Lemma werden nützliche Abschätzungen für die $L^1(\mathbb{T})$-Normen und für Integrale über Summen von Produkten verschiedener verallgemeinerter Kernfunktionen hergeleitet. Es gilt das

Lemma 4.10 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $G_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $G_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ analytische Funktionen und $C_{G_1}, C_{G_2} \in \mathbb{R}$ Konstanten, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Konstanten $c_k > 0$ exitsieren mit*

$$\left|G_1(t)^{(k)}\right| \leq c_k t^{C_{G_1}-k} \text{ und } \left|G_2(t)^{(k)}\right| \leq c_k t^{C_{G_2}-k} \tag{4.67}$$

für alle $t \geq 1$. Es seien ferner $f_1, f_2 \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r \geq 2$ und $\operatorname{supp} f_1, \operatorname{supp} f_2 \subseteq [-2, 2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $\theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi$ für $k = 0, ..., 2M-1$. Dann gibt es eine Konstante $c_{r,f_1,f_2} = c_{\alpha,\beta,r} \max_{0 \leq \nu \leq r}\{\|f_1^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})}, \|f_2^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})}\} > 0$, so dass

$$\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |K_{f_1,G_1,M}^{(\alpha,\beta)}(s \pm \theta_k)| \cdot |K_{f_2,G_2,M}^{(\alpha,\beta)}(t \pm \theta_k)| \mathrm{d}t \leq c_{r,f_1,f_2} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_{G_1}+C_{G_2}} M^{C_{G_1}+C_{G_2}+1} \tag{4.68}$$

für alle $s \in [0, \pi]$ ist.

Beweis: Aus (4.61), Lemma 2.53 angewandt auf $\sigma(x) := \frac{1}{(1+\frac{\pi}{4}|x|)^r}$ und Korollar 4.9 folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |K_{f_1,G_1,M}^{(\alpha,\beta)}(s \pm \theta_k)||K_{f_2,G_2,M}^{(\alpha,\beta)}(t \pm \theta_k)| \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} c_{r,f_1,f_2} \frac{\left(\frac{N}{M}\right)^{C_{G_1}} M^{C_{G_1}+1}}{(1+\frac{\pi}{4}|\frac{4Ms}{\pi}-(2k+1)|)^r} \frac{\left(\frac{N}{M}\right)^{C_{G_2}} M^{C_{G_2}+1}}{(1+\frac{\pi}{4}|\frac{4Mt}{\pi}-(2k+1)|)^r} \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_0^\pi c_{r,\mu,f_1,f_2} \frac{\left(\frac{N}{M}\right)^{C_{G_1}+C_{G_2}} M^{C_{G_1}+C_{G_2}+2}}{(1+\frac{\pi}{16}|\frac{4Ms}{\pi}-\frac{4Mt}{\pi}|)^r} \mathrm{d}t \leq c_{r,\mu,f_1,f_2} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_{G_1}+C_{G_2}} M^{C_{G_1}+C_{G_2}+1}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Damit ist (4.68) und das Lemma insgesamt bewiesen. ∎

Jetzt können die Lokalisierungseigenschaften der Kernfunktionen aus Definition 4.3 hergeleitet werden. Zur Abschätzung der Kerne in (4.14), (4.16) und (4.17) benötigt man ein technisches Lemma, zu dessen Beweis man Methoden aus [35] anwendet. Diese Methoden müssen allerdings verfeinert werden, da im Unterschied zu [35] nicht nur $G(t)$ mit $G(n) = h_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ zu betrachten ist, sondern die algebraisch komplexere Funktion $G(t)$ mit $G(n) = (h_n^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ zu untersuchen ist.

Lemma 4.11 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ und die Funktion $G_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sei definiert durch*

$$G_{\alpha,\beta}(t) := \left((t + \frac{\alpha+\beta+1}{2}) \cdot \frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+1)} \cdot \frac{\Gamma(t+(\alpha+\beta+1))}{\Gamma(t+\beta+1)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.70}$$

Dann ist $G_{\alpha,\beta}$ analytisch auf $\mathbb{R}^+$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ existieren Konstanten $c_k > 0$ mit

$$\left|G_{\alpha,\beta}^{(k)}(t)\right| \leq c_{k,\alpha,\beta} \cdot t^{\alpha+\frac{1}{2}-k} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.71}$$

Beweis: Nach Satz 2.5, 1. ist die Γ-Funktion holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$, insbesondere also analytisch auf $\mathbb{R}^+$ und nach Satz 2.5, 2. ist $\Gamma(x) > 0$ für alle $x > 0$. Wegen $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ ist auch $\alpha+\beta+1 \geq 0$, $\frac{\alpha+\beta+1}{2} \geq 0, \alpha+1 > 0, \beta+1 > 0$, also $G_{\alpha,\beta}(t) > 0$ für alle $t > 0$. Nach einem bekannten Satz über die Komposition und Inversion von Potenreihen (vgl. [23, Kap. 14.2, Satz und Folgerung 1]) folgt nun die Analytizität von $G_{\alpha,\beta}(t)$ für alle $t > 0$.
Beweis von (4.71): Mit $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$ für alle $t > 0$ erhält man durch Erweitern

$$\begin{aligned}
G_{\alpha,\beta}(t) &= \left(\frac{(t+1)(t+\lambda)\Gamma(t+2\lambda)}{\Gamma(t+2)}(t+\beta+1)\frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\beta+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big((t+1)(t+\lambda)(t+2\lambda-1)\cdots(t+a_1)\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)} \\
&\quad \times (t+\beta+1)(t+\alpha+1)\cdots(t+a_2)\frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+\beta+2)}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(p(t)\cdot\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}\cdot\frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+\beta+2)}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.72}$$

wobei

$$a_1 := (\alpha+\beta+1) - \lfloor\alpha+\beta+1\rfloor,\ a_2 := \alpha+1-\lfloor\alpha+1\rfloor \text{ und } \lambda := \frac{1+\alpha+\beta}{2}$$

gesetzt wird und $\lfloor x \rfloor$ diejenige größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner ist als x. Offensichtlich ist dann

$$0 < a_1, a_2 \leq 1 \tag{4.73}$$

und $p(t)$ ein Polynom mit

$$\operatorname{grad} p = \lfloor\alpha+\beta+1\rfloor + 2 + 1 + \lfloor\alpha+1\rfloor. \tag{4.74}$$

Jetzt zeigt man, dass für alle $l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq l \leq k$ Konstanten $c_k > 0$ existieren mit

$$\left|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\left(\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}}\right)\right| \leq c_k \cdot t^{-(2-a_1)\frac{1}{2}-l} \text{ für alle } t \geq 1, \tag{4.75}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\left(\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+\beta+2)}}\right)\right| \leq c_k \cdot t^{-(\beta+2-a_2)\frac{1}{2}-l} \text{ für alle } t \geq 1, \tag{4.76}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\left(\sqrt{p(t)}\right)\right| \leq c_k \cdot t^{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p-l} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.77}$$

Beweis zu (4.75): Wegen (4.73) ist $2 > a_1 > 0$, so dass mit $\sigma := \alpha+\beta-\lfloor\alpha+\beta+1\rfloor$ Satz 2.8, 3. verwendet werden kann. Deshalb und wegen der Analytizität von $\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}}$ auf $\mathbb{R}^+$ existieren also für alle $l \geq 1$ Zahlen $c_l > 0$ mit

$$\left|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\left(\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}\right)\right| \leq c_l t^{-(2-a_1)-l} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.78}$$

Speziell für $l = 0$ ist $B_0^{(\sigma)}(a) = 1$ nach (2.9), weshalb insbesondere ein $\widetilde{t_0} > 0$ existiert mit

$$0 < \frac{1}{2} B_0^{(\sigma)}(a_1) \frac{1}{t^{2-a_1}} \leq \frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)} \leq 2B_0^{(\sigma)}(a_1) \frac{1}{t^{2-a_1}} \text{ für alle } t \geq \widetilde{t_0}.$$

Wegen der Analytizität von $\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}$ existieren somit zwei Konstanten $c_{1,l}, c_{2,l} > 0$, so dass

$$0 < c_{1,l} \frac{1}{t^{2-a_1}} \leq \frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)} \leq c_{2,l} \frac{1}{t^{2-a_1}} \text{ für alle } t \geq 1. \tag{4.79}$$

Es bezeichne jetzt $S(l)$ $(l \in \mathbb{N}_0, 0 \leq l \leq k)$ die Menge aller l-Tupel α, bestehend aus ganzen Zahlen $\alpha_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{l} i\alpha_i = l$. Aus Lemma 2.51 zusammen mit den Ungleichungen (4.78) und (4.79) folgt nun für alle l mit $0 \leq l \leq k$ und alle $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} \left(\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}} \right) \right| &\leq \left| \sum_{\alpha \in S(l)} c_\alpha \left(\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)} \right)^{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \alpha_i} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} \left(\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)} \right) \right)^{\alpha_i} \right| \\
&\leq \sum_{\alpha \in S(l)} c_{\alpha,l} t^{-(2-a_1)\frac{1}{2} + (2-a_1)\sum_{i=1}^k \alpha_i} \prod_{i=1}^{k} t^{(-(2-a_1)-i)\alpha_i} \\
&\leq \sum_{\alpha \in S(l)} c_{\alpha,l} t^{-(2-a_1)\frac{1}{2} + (2-a_1)\sum_{i=1}^k \alpha_i - (2-a_1)\sum_{i=1}^k \alpha_i - l} \leq c_{\alpha,l} t^{-(2-a_1)\frac{1}{2} - l}
\end{aligned}$$

womit (4.75) bewiesen ist. Analog beweist man (4.76).
Beweis zu (4.77): Weil $p(t)$ ein Polynom ist, gibt es für jedes $l \geq 1$ offensichtlich eine Konstante $c_l > 0$ mit

$$\left| \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} (p(t)) \right| \leq c_l t^{\operatorname{grad} p - l} \text{ für alle } t \geq 1.$$

Nach (4.72) ist $p(t)$ ein normiertes Polynom mit

$$n := \operatorname{grad} p = \lfloor 2\lambda \rfloor + 2 + 1 + \lfloor \alpha + 1 \rfloor,$$

dessen Koeffizienten sämtlich positiv sind, so dass $p(t) > 0$ für alle $t > 0$ ist und Konstanten $c_0, \widetilde{c_0} > 0$ existieren mit

$$0 < \widetilde{c_0} t^{\operatorname{grad} p} \leq p(t) \leq c_0 t^{\operatorname{grad} p} \text{ für alle } t \geq 1.$$

Aus Lemma 2.51 erhält man somit für alle $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} \left(\sqrt{p(t)} \right) \right| \leq c_{\alpha,\beta,l} \sum_{\alpha \in S(l)} (p(t))^{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \alpha_i} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} p(t) \right)^{\alpha_i} \\
&\leq c_{\alpha,\beta,l} \sum_{\alpha \in S(l)} t^{\frac{1}{2}n - n\sum_{i=1}^k \alpha_i} t^{\sum_{i=1}^k (n-i)\alpha_i} \leq c_{\alpha,\beta,l}\, t^{\frac{1}{2}n - n\sum_{i=1}^k \alpha_i - l + n\sum_{i=1}^k \alpha_i} \leq c_{\alpha,\beta,l}\, t^{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p - l},
\end{aligned}$$

womit auch (4.77) bewiesen ist.
Aus (4.75), (4.76), (4.77) sowie (4.72) folgt mit der Produkt-Regel von Leibniz für alle

$t \geq 1$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(G_{\alpha,\beta}(t)\right)\right| \\
&\quad \leq c_k \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\left|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\left(\sqrt{p(t)}\right)\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}^{k-i-j}}{\mathrm{d}t^{k-i-j}}\left(\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_1)}{\Gamma(t+2)}}\right)\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(\sqrt{\frac{\Gamma(t+a_2)}{\Gamma(t+\beta+2)}}\right)\right| \\
&\quad \leq c_{\alpha,\beta,k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} t^{(\lfloor 2\lambda\rfloor+2+\lfloor\alpha+1\rfloor+1)\frac{1}{2}-i-(2-a_1)\cdot\frac{1}{2}-(k-i-j)-(\beta+2-a_2)\frac{1}{2}-j} \\
&\quad = c_{\alpha,\beta,k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} t^{\frac{1}{2}\lfloor 2\lambda\rfloor+\frac{1}{2}\lfloor\alpha+1\rfloor-\frac{1}{2}+(2\lambda-\lfloor 2\lambda\rfloor)\frac{1}{2}-k-\beta\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\alpha+1)-\frac{1}{2}\lfloor\alpha+1\rfloor} \\
&\quad = c_{\alpha,\beta,k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} t^{\alpha+\frac{1}{2}-k} \leq c_{\alpha,\beta,k}\cdot t^{\alpha+\frac{1}{2}-k}.
\end{aligned}
$$

Damit ist (4.71) und das Lemma insgesamt bewiesen. ■

Jetzt können wir das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

Satz 4.12 *Es seien $\alpha,\beta \geq -\frac{1}{2}$, $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $N > \alpha+\beta+1$. Ferner sei $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r \geq 2$ und $K_M^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{M,\gamma_1,\gamma_2}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ und $K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ seien gemäß Definition 4.3 gegeben. Dann gilt für alle $\theta,\varphi \in [0,\pi]$*

$$|K_M^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\varphi)| \leq c_r\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{M^{\alpha+\frac{3}{2}}}{(1+M|\theta-\varphi|)^r}, \tag{4.80}$$

$$|K_{M,\gamma_1,\gamma_2}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\varphi)| \leq c_r\left(\frac{N}{M}\right)^{\gamma_1+\gamma_2}\frac{M}{(1+M|\theta-\varphi|)^r}, \tag{4.81}$$

$$|K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\varphi)| \leq c_r\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}}\frac{M^{\alpha+\frac{3}{2}}}{(1+M|\theta-\varphi|)^r}, \tag{4.82}$$

$$|K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\varphi)| \leq c_r\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}}\frac{M^{\alpha+\frac{3}{2}}}{(1+M|\theta-\varphi|)^r}, \tag{4.83}$$

wobei $c_r = c_{\alpha,\beta,r}\cdot\max_{0\leq\nu\leq r}\|g^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ist.

Beweis: Beweis von (4.80): Es gilt $G_{\alpha,\beta}(n) = (h_n^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(1)2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gemäß (2.30) und (2.32). Wegen Lemma 4.11 kann Satz 4.8 mit $f(t) := g(t)$ und $C_{G_{\alpha,\beta}} = \alpha+\frac{1}{2}$ angewendet werden, woraus sich schließlich auch (4.80) ergibt.
Analog beweist man (4.82) bzw. (4.83), wobei man $f_1(t) := g(t)\left(\frac{N+\alpha}{M}-1+t\right)$ bzw. $f_2(t) := g(t)\left(\frac{N}{M}-1+t\right)$ setzt und beachtet, dass sich aus den Träger- und Differenzierbarkeitseigenschaften von f_1 bzw. f_2 unmittelbar $\max_{0\leq\nu\leq r}\|f_1^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c_g\frac{N}{M}$ bzw. $\max_{0\leq\nu\leq r}\|f_2^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c_g\frac{N}{M}$ ergibt. Der Beweis von (4.81) folgt wieder aus Satz 4.8, wenn man $G(t) \equiv 1$ und $f(t) := g(t)\left(\frac{N}{M}-1+t\right)^{\gamma_1}\left(\frac{N}{M}-1+\frac{\lambda}{M}+t\right)^{\gamma_2}$ setzt, also $C_G = 0$ und $\max_{0\leq\nu\leq r}\|f^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c_g\left(\frac{N}{M}\right)^{\gamma_1+\gamma_2}$ ist, was sich unmittelbar aus den Träger- und Differenzierbarkeitseigenschaften von g sowie aus $1 < \frac{1}{4}\frac{N}{M} \leq \frac{N}{M}-1+t \leq 2\frac{N}{M}$ und

$1 < \frac{1}{4}\frac{N}{M} \leq \frac{N+\lambda}{M} - 1 + t \leq 2\frac{N}{M}$ $(t \in [-2,2])$ ergibt. Damit ist Satz 4.12 bewiesen. ∎

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich das

Korollar 4.13 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.12 gilt*

$$\|K_M^{(\alpha,\beta)}\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c_r \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} M^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad \|K_{M,\gamma_1,\gamma_2}^{(\alpha,\beta)}\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c_r \left(\frac{N}{M}\right)^{\gamma_1+\gamma_2},$$
$$\|K_{1,M}^{(\alpha,\beta)}\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c_r \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} M^{\alpha+\frac{1}{2}} \text{ und } \|K_{2,M}^{(\alpha,\beta)}\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c_r \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} M^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

wobei $c_r = c_{\alpha,\beta,r} \cdot \max_{0\leq\nu\leq r} \|g^{(\nu)}\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$ *eine von* N, M *unabhängige Konstante ist.*

Beweis: Diese Abschätzungen ergeben sich nach Anwendung von Satz 4.12 und Integration der entsprechenden Terme. ∎

4.3 Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten von $W^{(N,M)}$

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass die Lebesgue-Konstanten der Räume $W^{(N,M)}$ gleichmäßig beschränkt sind (vgl. Hauptsatz 4.21). Der Beweisansatz besteht darin, das Integrationsintervall der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}[-1,1]$-Norm in Teilintervalle zu zerlegen, die von s abhängen und auf diesen Teilintervallen die in den letzten Abschnitten bewiesenen Abschätzungen geeignet zu kombinieren. Der Beweis der Sätze 4.16 und 4.17 beruht dabei insbesondere auf Satz 4.4, d.h. mit solchen Abschätzungen kombiniert, die von den Dirichlet-Mehler-Formeln aus Kapitel 2.8 Gebrauch machen. Der Beweis von Satz 4.18 beruht insbesondere auf Satz 4.5, d.h. auf der Kombination der Asymptotiken aus Satz 2.38, Satz 2.11 und Korollar 2.12.
Im nächsten Lemma zeigen wir, dass das Supremum der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von (4.1) nur noch auf $x \in [0,1]$ zu untersuchen ist.

Lemma 4.14 *Es seien* $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $g \in C_c(\mathbb{R})$ *mit* supp $g \subseteq [-2,2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$, $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ *gemäß Definition 4.1 gegeben und* $s^* := \pi - s$. *Dann gilt für alle* $s \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\beta,\alpha)}(\cos s^*)| \cdot |\psi_k^{(\beta,\alpha)}(\cos t)| \omega_{\beta,\alpha}(\cos t) \sin t dt.\end{aligned} \tag{4.84}$$

Beweis: Man setzt $k^* := 2M - k - 1$ und $\widetilde{j} := N - M + j$. Wegen (2.29) und weil $h_n^{(\alpha,\beta)} = h_n^{(\beta,\alpha)}$ ist, folgt unter Beachtung von (3.14)

$$\begin{aligned}\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos(\pi-u)) &= \sum_{j=-2M}^{2M} \cos((3M+j)\theta_k)\left(h_{\widetilde{j}}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{\widetilde{j}}^{(\alpha,\beta)}(\cos(\pi-u))\\ &= \sum_{j=-2M}^{2M} \cos((3M+j)\theta_k)\left(h_{\widetilde{j}}^{(\beta,\alpha)}\right)^{-1/2} (-1)^{N-M+j} P_{\widetilde{j}}^{(\beta,\alpha)}(\cos u)\\ &= \sum_{j=-2M}^{2M} \cos((3M+j)(\pi-\theta_k))(-1)^{N-4M}\left(h_{\widetilde{j}}^{(\beta,\alpha)}\right)^{-1/2} P_{\widetilde{j}}^{(\beta,\alpha)}(\cos u)\\ &= (-1)^{N-4M}\psi_{2M-k-1}^{(\beta,\alpha)}(\cos u).\end{aligned}$$

Nach der Variablentransformation $t = \pi - t^*$ und unter Beachtung von $s = \pi - s^*$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)|\cdot|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^0 \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_{k^*}^{(\beta,\alpha)}(\cos s^*)|\cdot|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos(\pi-t^*))|\omega_{\alpha,\beta}(\cos(\pi-t^*))\sin(\pi-t^*)(-1)\mathrm{d}t^* \quad (4.85)\\ &= \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\beta,\alpha)}(\cos s^*)|\cdot|\psi_k^{(\beta,\alpha)}(\cos t^*)|\omega_{\beta,\alpha}(\cos t^*)\sin t^*\mathrm{d}t^*.\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 4.14 bewiesen. ■

In die folgenden Rechnungen geht wiederholt ein eher technisches Lemma ein, das zunächst bewiesen werden soll.

Lemma 4.15 *Für alle $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$ ist*

$$\sup_{s\in(0,\frac{\pi}{2}]} (1-\cos s)^{-\alpha}\int_0^s \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi < \infty. \quad (4.86)$$

Beweis: Bekanntlich gilt $1 - \cos s = 2\sin^2(\frac{s}{2})$, $\cos\phi - \cos s = 2\sin(\frac{s-\phi}{2})\sin(\frac{s+\phi}{2})$ und $\frac{2}{\pi}\phi \leq \sin\phi \leq \phi$ für alle $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Zusammen mit der Variablentransformation $\phi = u \cdot s$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}(1-\cos s)^{-\alpha}\int_0^s \frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi \quad &\leq c\int_0^s s^{-2\alpha}(s^2-\phi^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\phi\\ \leq cs^{-2\alpha}\cdot s^{2\alpha-1}\cdot s\int_0^1 (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u &\leq c\int_0^1 (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u < c,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Voraussetzung $\alpha > -\frac{1}{2}$ zur Auswertung des Integrals ausgenutzt wurde und die Konstanten $c > 0$ insbesondere von s unabhängig sind. Damit ist (4.86) bewiesen. ■

Jetzt beweist man den

Satz 4.16 *Es seien* $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ *mit* $r \geq 2$ *und* supp $g \subseteq [-2, 2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$ *und* $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ *(*$k = 0, ..., 2M-1$*) gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante* $c_{g,r,\alpha,\beta} > 0$ *mit*

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_0^{\frac{3}{2M}} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \leq c_{g,r,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{4.87}$$

Beweis: Man beweist die Abschätzung zunächst für alle $s \in (0, \frac{\pi}{2}]$, der Fall $s = 0$ ergibt sich dann unmittelbar aus der Stetigkeit der Basisfunktionen. Sei also $0 < s \leq \frac{\pi}{2}$. Zuerst zeigt man

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\right| \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \leq c_{g,r,\alpha,\beta} M^{\alpha+\frac{3}{2}} N^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{4.88}$$

Beweis zu (4.88): Wegen $M \geq 1$ ist $\frac{3}{2M} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ und aus den Sätzen 2.29 und 2.27 folgt $\left|P_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \leq c_{\alpha,\beta} N^\alpha$ und $(h_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}} \leq c_{\alpha,\beta}\sqrt{N}$ für alle $j = -2M, ..., 0, ..., 2M$ und alle $0 \leq t \leq \frac{3}{2M}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{M}} \left| \sum_{j=-2M}^{2M} g(\frac{j}{M}) \cos{(3M+j)\theta_k} \left(h_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1/2} P_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \right| \\ &\leq c_{\alpha,\beta} \frac{1}{\sqrt{M}} (4M+1) \|g\|_\infty \sqrt{N} N^\alpha \leq c_{g,\alpha,\beta} M^{\frac{1}{2}} N^{\alpha+\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Aus Definition 4.50 und Satz 4.4, 4. ergibt sich unmittelbar

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \leq c_{g,r,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_0^s \frac{M^{\alpha+1}(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos s)^\alpha (1+M|\phi-\theta_k|)^r (1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} d\phi. \tag{4.90}$$

Schließlich gilt wegen $r \geq 2$ die elementar zu beweisende Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \frac{1}{(1+M|\phi-\theta_k|)^r} \leq c_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \infty \tag{4.91}$$

für alle $0 \leq \phi \leq \pi$. Nun setzt man (4.89) und (4.90) in die linke Seite von (4.88) ein, fasst den entstehenden Term mit (4.91) zusammen und wendet Lemma 4.15 an. Damit ist (4.88) bewiesen. Wegen $\frac{3}{2M} \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t \sim t^{2\alpha+1}$, so dass sich nach Integration (4.87) ergibt. ■

Im Beweis des folgenden Satzes wird eine Grundidee der gesamten Arbeit erkennbar. Er beruht wesentlich auf den Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ aus Satz 2.41 und Korollar 2.42 und ist einer der umfangreichsten Beweise dieser Arbeit. Insbesondere in (4.105) wird deutlich, weshalb das $L^1_{\alpha,\beta}$-Integrationsintervall aus (4.1) in der Regel in drei Absschnitte zu unterteilen und das Integral dort jeweils einzeln abzuschätzen ist.

Satz 4.17 *Es seien* $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ *mit* $r > \max\{\alpha+\beta+2, 2\}$ *und* $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$ *und* $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ *gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante* $c = c_{g,r,\alpha,\beta} > 0$ *mit*

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2}s}^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1} \tag{4.92}$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac{1}{M}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{4.93}$$

Beweis: Beweis von (4.92) für $\alpha > 0$: Zuerst zeigt man

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \leq \int_t^{\pi} \frac{c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} M^{\alpha+\beta+2}(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+M|\vartheta|)^r(1+\cos t)^{\beta}(1-\cos t)^{\alpha}(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \mathrm{d}\vartheta. \tag{4.94}$$

Beweis zu (4.94): Aus (4.14), (4.80) und Satz 4.4, 4. bzw. Satz 4.4, 2. erhält man

$$\left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\right| \leq \int_0^s \frac{c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} M^{\alpha+1}(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos s)^{\alpha}(1+M|\phi-\theta_k|)^r(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\phi \tag{4.95}$$

bzw.

$$\left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \leq \int_t^{\pi} \frac{c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} M^{\beta+1}(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos t)^{\beta}(1-\cos t)^{\alpha}(1+M|\vartheta-\theta_k|)^r(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \mathrm{d}\vartheta. \tag{4.96}$$

Aus Lemma 2.53 zusammen mit den Argumenten, mit denen auch (4.69) in Lemma 4.10 bewiesen wurde, folgt

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \frac{1}{(1+M|\phi-\theta_k|)^r} \frac{1}{(1+M|\vartheta-\theta_k|)^r} \leq c \frac{1}{(1+M|\phi-\vartheta|)^r}, \tag{4.97}$$

wobei $c = c_f > 0$ eine nur von der Funktion $f(x) := \frac{1}{(1+|x|)^r}$ abhängige Konstante ist. Aus $\pi \geq \vartheta \geq t \geq \frac{3}{2}s$ und $0 \leq \phi \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ folgt $\vartheta \geq \frac{3}{2}\phi$ und damit

$$\vartheta - \phi \geq \frac{\vartheta}{3}. \tag{4.98}$$

Nach dem Einsetzen von (4.95) und (4.96) in die linke Seite von (4.94), dem Vereinfachen durch (4.97) und (4.98) sowie der Anwendung von Lemma 4.15 erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2M-1} \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\right| \cdot \left|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \\
&\leq c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} M^{\alpha+\beta+2} \int_t^{\pi}\int_0^s \sum_{k=0}^{2M-1} \frac{1}{(1+M|\phi-\theta_k|)^r} \frac{1}{(1+M|\vartheta-\theta_k|)^r} \\
&\quad \times (1-\cos s)^{-\alpha} \frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} (1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha} \frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta \\
&\leq c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} \int_t^{\pi}\int_0^s \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\phi-\vartheta|)^r} (1-\cos s)^{-\alpha} \frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
&\quad \times (1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha} \frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1}\int_t^\pi\int_0^s\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1-\cos s)^{-\alpha}\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\\
&\quad\times(1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta\\
&\leq c_{g,r,\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1}\int_t^\pi\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta,
\end{aligned}
\tag{4.99}
$$

womit (4.94) im Fall $\alpha > 0$ bewiesen ist.
Jetzt zeigt man für alle $\frac{3}{2}s \leq t \leq \pi$:

$$
\int_t^\pi\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\vartheta)^{(\beta-\alpha)/2}}\mathrm{d}\vartheta \leq c\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}. \tag{4.100}
$$

Beweis von (4.100) für $\frac{3}{2}s \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: Bekanntlich ist $\pi x(1-x) \leq \sin \pi x \leq \pi x$ für alle $0 \leq x \leq 1$, woraus

$$
\frac{t+\vartheta}{8} \leq \sin\frac{\vartheta+t}{2} \leq \frac{\vartheta+t}{2} \quad\text{und}\quad \frac{\vartheta-t}{8} \leq \sin\frac{\vartheta-t}{2} \leq \frac{\vartheta-t}{2} \tag{4.101}
$$

für alle t, ϑ mit $\frac{3}{2M} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ und $t \leq \vartheta \leq \pi$ folgt. Außerdem gilt auch

$$
\cos t-\cos\vartheta = 2\sin\frac{t+\vartheta}{2}\cdot\sin\frac{\vartheta-t}{2},\ 1-\cos\vartheta = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \ \text{ und }\ 1+\cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{4.102}
$$

Aus der Anwendung von (4.101) und (4.102) auf die letzte Zeile von (4.99) erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\pi\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta\\
&\leq c_{\alpha,\beta}\int_t^\pi\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}t^{-2\alpha}\frac{(\vartheta^2-t^2)^{\beta-\frac{1}{2}}}{\vartheta^{\beta-\alpha}}\mathrm{d}\vartheta &(4.103)\\
&\leq c_{\alpha,\beta}\int_1^{\frac{\pi}{t}}\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(Mt)^r u^r}t^{-2\alpha}\frac{t^{2\beta-1}(u^2-1)^{\beta-\frac{1}{2}}}{t^{\beta-\alpha}u^{\beta-\alpha}}t\mathrm{d}u &(4.104)\\
&\leq c_{\alpha,\beta}M^{\alpha+\beta+2}\frac{t^{-2\alpha}t^{2\beta-1}t}{(Mt)^r t^{\beta-\alpha}}\int_1^{\frac{\pi}{t}}\frac{(u^2-1)^{\beta-\frac{1}{2}}}{u^{r+\beta-\alpha}}t\mathrm{d}u\\
&\leq c_{\alpha,\beta}M^{\alpha+\beta+2}\frac{M^{\alpha-\beta}}{(Mt)^r(Mt)^{\alpha-\beta}}\int_1^{\frac{\pi}{t}}\frac{(u^2-1)^{\beta-\frac{1}{2}}}{u^{r+\beta-\alpha}}\mathrm{d}u\\
&\leq c_{\alpha,\beta}\frac{M^{2\alpha+2}}{(Mt)^{r+\alpha-\beta}}\int_1^\infty\frac{(u^2-1)^{\beta-\frac{1}{2}}}{u^{r+\beta-\alpha}}\mathrm{d}u\\
&\leq c_{\alpha,\beta}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}. &(4.105)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde in (4.103) ausgenutzt, dass aus $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ unmittelbar $1 \leq 1+\cos t \leq 2$ folgt. In (4.104) führt man die Variablentransformation $\vartheta = u\cdot t$ durch. In (4.105) beachtet man einerseits, dass wegen $t \geq \frac{3}{2M}$ auch $\frac{1+Mt}{2} \leq Mt \leq 1+Mt$ ist. Andererseits folgt die Beschränktheit des Integrals, weil nach Voraussetzung $\beta > -\frac{1}{2}$ und $r > \alpha+\beta$ ist. Damit ist (4.100) für den Fall $\frac{3}{2}s \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ bewiesen.

Beweis von (4.100) für $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$: Man setzt $t' := \pi - t$ und substituiert $\vartheta' = \pi - \vartheta$. Dann gilt $0 \leq t' \leq \frac{\pi}{2}$ und wegen $t \leq \vartheta \leq \pi$ auch $0 \leq \vartheta' \leq t' \leq \frac{\pi}{2}$. Aus (4.101) und (4.102) folgt nun

$$\begin{aligned}
&\int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta \\
&\leq c\int_t^\pi \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta \qquad (4.106)\\
&\leq \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\int_0^{t'}(1-\cos t')^{-\beta}\frac{(\cos\vartheta' - \cos t')^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\vartheta')^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta' \\
&\leq c\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\int_0^{t'} t'^{-2\beta}(t'^2-\vartheta'^2)^{\beta-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\vartheta' \\
&\leq c\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\int_0^{1} t'^{-2\beta}t'^{2\beta-1}(1-u^2)^{\beta-\frac{1}{2}}t'\mathrm{d}u \qquad (4.107)\\
&\leq c_{\alpha,\beta}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}, \qquad (4.108)
\end{aligned}$$

wobei in (4.106) $\vartheta \geq t \geq \frac{\pi}{2}$ verwendet und in (4.107) die weitere Variablentransformation $\vartheta' = u \cdot t'$ durchgeführt wurde. Wegen $\beta > -\frac{1}{2}$ ist das Integral $\int_0^1 (1-u^2)^{\beta-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$ beschränkt, weshalb (4.100) auch für $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ und damit im Fall $\alpha > 0$ insgesamt bewiesen ist.
Jetzt wird das Integral $\int_{\frac{3}{2}s}^{\pi}$ in (4.92) für den Fall $\alpha > 0$ ausgewertet: Aus (4.100) folgt zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2}s}^{\pi}\sum_{k=0}^{2M-1}|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)||\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_{\alpha,\beta}\int_{\frac{3}{2}s}^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t + c_{\alpha,\beta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_{\alpha,\beta}\int_{\frac{3}{2}s}^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}t^{2\alpha+1}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}\mathrm{d}t + c_{\alpha,\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}t^{2\beta+1}}{(1+M(\pi-t))^{r+\alpha-\beta}}\mathrm{d}t. \qquad (4.109)
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden in (4.109) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2}s}^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{3}{2}\frac{1}{M}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\frac{3}{2}}^{\pi M} M^{2\alpha+2}(1+u)^{-r+\beta-\alpha}\frac{u^{2\alpha+1}}{M^{2\alpha+1}}\frac{1}{M}\mathrm{d}u \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\pi M}(1+u)^{-r+\beta-\alpha}u^{2\alpha+1}\mathrm{d}u \qquad (4.110)\\
&\leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(1+u)^{-r+\beta-\alpha}u^{2\alpha+1}\mathrm{d}u \leq c_{\alpha,\beta},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt $t = \frac{u}{M}$ substituiert wurde und das Integral in der vorletzten Zeile wegen der Voraussetzung $r > \alpha + \beta + 2$ existiert und endlich ist. Für den zweiten Summanden in (4.109) ergibt sich ferner

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+M(\pi-t))^{r+\alpha-\beta}}t^{2\beta+1}\mathrm{d}t \leq c_{\alpha,\beta}\frac{M^{2\alpha+2}}{M^{r+\alpha-\beta}}(\frac{\pi}{2})^{2\beta+1}\frac{\pi}{2} \leq c_{\alpha,\beta}, \qquad (4.111)$$

wobei man verwendet, dass nach Voraussetzung $r > \alpha+\beta+2$ und damit $M^{-r+\alpha+\beta+2} \leq 1$ ist. Insgesamt ist damit (4.92) für $\alpha > 0$ bewiesen.
Beweis von (4.92) für $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ bzw. $\alpha = 0$: Mit (4.18) bzw. (4.20) zeigt man analog zum Beweis von (4.94)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{g,r,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} \int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r} \\ \times (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\vartheta\end{aligned} \tag{4.112}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq & c_{g,r,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} (1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha-1} \\ & \times \int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\vartheta)^{(\beta-\alpha-2)/2}} \mathrm{d}\vartheta.\end{aligned} \tag{4.113}$$

Im Vergleich zu (4.94) haben sich zwar die Exponenten der Kosinusterme von (4.112) bzw. (4.113) verändert, trotzdem erhält man nach entsprechenden Rechnungen, die zu (4.100) analogen Abschätzungen

$$\int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r} (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\vartheta \leq c \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}} \tag{4.114}$$

bzw.

$$\int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\vartheta|)^r} (1+\cos t)^{-\beta}(1-\cos t)^{-\alpha-1} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\vartheta)^{(\beta-\alpha-2)/2}} \mathrm{d}\vartheta \leq c \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}} \tag{4.115}$$

für alle $\frac{3}{2}s \leq t \leq \pi$. Die Abschätzung des Integrals $\int_{\frac{3}{2}s}^\pi$ in (4.92) erfolgt nun völlig analog zu (4.109), (4.110) und (4.111), wobei die Bedingungen für die Existenz und Endlichkeit der entsprechenden Integrale, $r > \beta - \alpha$ bzw. $r > \alpha + \beta + 2$ nach Voraussetzung erfüllt sind. Insgesamt ist (4.92) damit auch für die Fälle $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ und $\alpha = 0$ bewiesen.
Beweis von (4.93): Für $s \in (0, \frac{1}{M}]$ kann der Beweis von (4.92) nahezu unverändert übertragen werden: Wegen $0 \leq \phi \leq s \leq \frac{1}{M}$ und $\pi \geq \vartheta \geq t \geq \frac{3}{2M}$ ist insbesondere (4.98) erfüllt, weshalb der für den gesamten Beweis wesentliche Übergang auf (4.105) mit den dort verwendeten Argumenten gerechtfertigt werden kann. Schließlich bleibt auch die Abschätzung (4.110) in den vorliegenden Fällen gültig, weil sie lediglich der Einsetzung von $s = \frac{1}{M}$ in die untere Integrationsgrenze entspricht. Ist die Abschätzung bereits für alle $0 < s \leq \frac{1}{M}$ bewiesen, so folgt sie aus Stetigkeitsgründen dann auch für $s = 0$, womit (4.93) und damit der Satz insgesamt bewiesen ist. ■

Der Beweis des nächsten Satzes beruht im Wesentlichen darauf, ihn in die zwei Teilbehauptungen (4.122) und (4.123) zu zerlegen, um dann auf (4.122) Satz 4.5 und auf (4.123) Satz 4.5, Satz 4.4 und Lemma 2.40 anzuwenden.

Satz 4.18 *Es seien $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r > 2$ und $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante $c_{g,\alpha,\beta} > 0$ mit*

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}}. \quad (4.116)$$

Beweis: Nach Voraussetzung an s und t ist $\frac{3}{2M} \leq t \leq \frac{3}{2}s \leq \frac{3}{4}\pi$ und damit

$$\omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \sim t^{2\alpha+1}, \ \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \text{ und } (Mt)^{-l} \leq 1 \quad (l \in \mathbb{N}_0). \quad (4.117)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq l \leq n-1$ definiert man nun

$$\begin{aligned} I_{1,l}(\theta) &:= (M\theta)^{-l-\frac{1}{2}} \left| K_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta \pm \theta_k) \right| \theta^{-\alpha}, \\ I_{2,n}(\theta) &:= M(M\theta)^{-n-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha}, \\ I_3(\theta) &:= (M\theta)^{-\frac{1}{2}} \theta^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Aus (4.27) mit $n = 1$ und den Abkürzungen in (4.118) folgt

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \leq c_{g,\alpha,\beta} \left(I_{1,0}(s) + I_{2,1}(s) + I_3(s)\right) \quad (4.119)$$

und aus (4.27) mit einem

$$n > \alpha + \frac{3}{2} \quad (4.120)$$

und den Abkürzungen in (4.118) folgt ferner

$$|\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_{n,g,\alpha,\beta} \left(\sum_{l=0}^{2M-1} I_{1,l}(t) + I_{2,n}(t) + I_3(t) \right). \quad (4.121)$$

Jetzt zeigt man für alle $l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq l \leq n$

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \left(I_{1,l}(t) + I_3(t)\right) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \leq c_{g,\alpha,\beta} \quad (4.122)$$

und

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| I_{2,n}(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \leq c_{g,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2}}, \quad (4.123)$$

wobei die Konstanten $c_{\alpha,\beta,g} > 0$ insbesondere von N, M und $\frac{N}{M}$ unabhängig sind.
Beweis von (4.122): Zunächst setzt man (4.119) in die rechte Seite von (4.122) ein. Nach dem Ausmultiplizieren der Klammern erhält man eine Summe von Produkten je zweier I-Terme aus (4.118). Diese Produkte werden im Folgenden einzeln abgeschätzt. Als Abkürzung wird dabei beispielsweise durch $I_{1,0}(s) \otimes I_{1,l}(t)$ der Summand bezeichnet, der sich

als Produkt der Faktoren $I_{1,0}(s)$ und $I_{1,l}(t)$ ergibt.
Abschätzung von $I_{1,0}(s)\otimes I_{1,l}(t)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\sum_{k=0}^{2M-1} I_{1,0}(s)\cdot I_{1,l}(t)\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t\\
&\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}(Ms)^{-\frac{1}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}s^{-\alpha}t^{-\alpha}t^{2\alpha+1}\sum_{k=0}^{2M-1}|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(s\pm\theta_k)|\cdot|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(t\pm\theta_k)|\mathrm{d}t\\
&\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}M^{-1}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}(Mt)^{-l}\sum_{k=0}^{2M-1}|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(s\pm\theta_k)|\cdot|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(t\pm\theta_k)|\mathrm{d}t\le c,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Lemma 4.10, (4.81) und (4.117) angewendet wurden.
Abschätzung von $I_{2,1}(s)\otimes I_{1,l}(t)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\sum_{k=0}^{2M-1} I_{2,1}(s)\cdot I_{1,l}(t)\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t\\
&\quad\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\sum_{k=0}^{2M-1} M(Ms)^{-\frac{3}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(t\pm\theta_k)|s^{-\alpha}t^{-\alpha}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t\\
&\quad\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} M(Ms)^{-\frac{3}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{2M-1}|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(t\pm\theta_k)|s^{-\alpha}t^{-\alpha}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t\\
&\quad\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cM(Ms)^{-\frac{3}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}\left(\frac{8M}{2\pi}+2M\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(\theta)\right|\mathrm{d}\theta s^{-\alpha}t^{-\alpha}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t\\
&\quad\le \left(\frac{N}{M}\right)^{-l}\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cM(Ms)^{-\frac{3}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}Ms^{-\alpha}t^{\alpha+1}\mathrm{d}t\le\left(\frac{N}{M}\right)^{-l}c\left[t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}s^{-\alpha-\frac{3}{2}}\le c,
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass $K^{(\alpha,\beta)}_{M,\gamma_1,\gamma_2}(s\pm\theta_k)$ ein trigonometrisches Polynom in den Variablen θ_k und s vom Grad höchstens gleich $2M$ ist, so dass im dritten Schritt Lemma 2.54 mit $m=8M$ sowie die Periodizität von $K^{(\alpha,\beta)}_{M,\gamma_1,\gamma_2}(s\pm\theta_k)$ und im vierten Schritt schließlich Korollar 4.13 angewendet wurde. Im letzten Schritt beachtet man, dass $Mt>1$ und damit $(Mt)^{-l}<1$ für alle $t\ge\frac{3}{2M}$ ist.
Abschätzung von $I_3(s)\otimes I_{1,l}(t)$: Analog zu $I_{2,1}(s)\otimes I_{1,l}(t)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\sum_{k=0}^{2M-1} I_3(s)\cdot I_{1,l}(t)\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\ \mathrm{d}t\\
&\qquad\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}(Ms)^{-\frac{1}{2}}(Mt)^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{2M-1}|K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-l-\frac{1}{2}}(t\pm\theta_k)|s^{-\alpha}t^{-\alpha}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t\le c.
\end{aligned}$$

Abschätzung von $I_{1,0}(s)\otimes I_3(t)$: Aus den Voraussetzungen an t, s und α folgt wieder $\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\sim t^{2\alpha+1}$ und $\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\le\frac{3}{2}$. Mit den Bezeichnungen in (4.118) erhält man nun

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} I_{1,0}(s) \cdot I_3(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} c\,(Ms)^{-\frac{1}{2}} s^{-\alpha} t^{-\alpha} (Mt)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} |K_{M,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(s \pm \theta_k)| t^{2\alpha+1} \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cM^{-1} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \sum_{k=0}^{2M-1} |K_{M,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(s \pm \theta_k)| \\
&\quad \leq cM^{-1} M \int_{-\pi}^{\pi} |K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(s \pm \theta)| \mathrm{d}\theta \leq c \int_{-\pi}^{\pi} |K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)| \mathrm{d}\theta \leq c,
\end{aligned}
$$

wobei im dritten Schritt Lemma 2.54 mit $m = 8M$ und im vierten Schritt Korollar 4.13 auf das in θ_k und s trigonometrische Polynom $K_{M,\gamma_1,\gamma_2}(s \pm \theta_k)$ vom Grad höchstens gleich $2M$ angewandt wurde. Außerdem nutzt man im dritten Schritt aus, dass nach Voraussetzung $\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ ist.
Abschätzung von $I_{2,1}(s) \otimes I_3(t)$: Mit (4.117) und (4.118) erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} I_{2,1}(s) \cdot I_3(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cM \cdot M\,(Ms)^{-\frac{3}{2}} s^{-\alpha} t^{-\alpha} (Mt)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{2\alpha+1} \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cM^{2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} s^{-\alpha-\frac{3}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \leq cs^{-\alpha-\frac{3}{2}} \left[t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \leq c,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt zu beachten ist, dass $\alpha + \frac{3}{2} > 0$ und damit $\left[t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \leq s^{\alpha+\frac{3}{2}}$ ist.
Abschätzung von $I_3(s) \otimes I_3(t)$: Mit (4.117) und (4.118) erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} I_3(s) \cdot I_3(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} cMs^{-\alpha} (Ms)^{-\frac{1}{2}} t^{-\alpha} (Mt)^{-\frac{1}{2}} t^{2\alpha+1} \mathrm{d}t \leq c \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \leq c,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt wieder $\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{3}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}$ verwendet wird. Damit ist (4.122) bewiesen.

Beweis von (4.123): Aus (4.14), (4.15) und (2.45) folgt zunächst

$$
\begin{aligned}
|K_M^{(\alpha,\beta)}(\phi)| \leq & \left| \sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{s}{M}\right) P_{N-M+s}^{(\alpha,\beta)}(1) \left(h_{N-M+s}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\phi} \right| \\
& \leq d_0 \cdot M^{\alpha+\frac{1}{2}} \left| \sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{s}{M}\right) \left(\frac{N-M+s}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\phi} \right| \\
& \qquad + d_1 M^{\alpha-\frac{1}{2}} \left| \sum_{s=-2M}^{2M} g\left(\frac{s}{M}\right) \left(\frac{N-M+s}{M}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\phi} \right| \\
& \qquad + (4M+1) d_2 \cdot (N-M+s)^{\alpha-\frac{3}{2}} \\
& \leq d_0 M^{\alpha+\frac{1}{2}} |K_{M,0,\alpha+\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi)| + d_1 M^{\alpha-\frac{1}{2}} |K_{M,0,\alpha-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi)| + d_2 \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} M^{\alpha-\frac{1}{2}}, \qquad (4.124)
\end{aligned}
$$

wobei $d_0, d_1, d_2 > 0$ ausschließlich von α, β abhängende Konstanten sind. Mit den Definitionen

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_1(s) &:= d_{\alpha,\beta} M^{\alpha} (1-\cos s)^{-\alpha} \int_0^s |K_{M,0,\alpha+\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi \pm \theta_k)| \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\phi, \\
\widetilde{I}_2(s) &:= d_{\alpha,\beta} M^{\alpha-1} (1-\cos s)^{-\alpha} \int_0^s |K_{M,0,\alpha-\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi \pm \theta_k)| \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\phi, \qquad (4.125) \\
\widetilde{I}_3(s) &:= d_{\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} M^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

ergibt sich nach Einsetzen von (4.124) in (4.21) zunächst

$$
\left| \psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s) \right| \leq \widetilde{I}_1(s) + \widetilde{I}_2(s) + \widetilde{I}_3(s). \qquad (4.126)
$$

Weiter erhält man durch Einsetzen von (4.126) in die rechte Seite von (4.123) und nach dem Ausmultiplizieren mit $I_{3,n}(t)$ drei Summanden, die jetzt abzuschätzen sind.
Abschätzung von $\widetilde{I}_1(s) \otimes I_{3,n}(t)$:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} \widetilde{I}_1(s) \cdot I_{3,n}(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \\
& \quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} d_{\alpha,\beta} \cdot M^{\alpha} (1-\cos s)^{-\alpha} M (Mt)^{-n-\frac{1}{2}} t^{\alpha+1} \int_0^s \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
& \qquad \times \sum_{k=0}^{2M-1} |K_{M,0,\alpha+\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi \pm \theta_k)| \mathrm{d}\phi \mathrm{d}t \\
& \quad \leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} d_{\alpha,\beta} M^{\alpha+1} (1-\cos s)^{-\alpha} (Mt)^{-n-\frac{1}{2}} t^{\alpha+1} \int_0^s \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\
& \qquad \times M \int_{-\pi}^{\pi} |K_{M,0,\alpha+\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\phi \pm \theta)| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$\leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} d_{\alpha,\beta} M^{\alpha+1}(1-\cos s)^{-\alpha}(Mt)^{-n-\frac{1}{2}} t^{\alpha+1} \int_0^s \frac{(\cos\phi - \cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$
$$\times M \int_{-\pi}^{\pi} |K_{M,0,\alpha+\frac{1}{2}}^{(\alpha,\beta)}(\theta)| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}t$$
$$\leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} d_{\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} M^{\alpha+2-n-\frac{1}{2}} t^{\alpha+1-n-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \leq d_{\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}. \qquad (4.127)$$

Dabei ist zu beachten, dass $K_{M,\gamma_1,\gamma_2}(s \pm \theta_k)$ ein trigonometrisches Polynom in den Variablen θ_k und ϕ vom Grad höchstens gleich $2M$ ist, so dass im zweiten Schritt Lemma 2.54 mit $m = 8M$, im dritten Schritt die Periodizität von $K_{M,\gamma_1,\gamma_2}(s \pm \theta_k)$ und im vierten Schritt schließlich Korollar 4.9 ausgenutzt wurde. Außerdem wurde im vierten Schritt Lemma 4.15 angewendet. Im fünften und letzten Schritt geht die Voraussetzung an n ein: Wegen $\alpha + \frac{3}{2} - n < 0$ und $s \geq \frac{1}{M}$ gilt nämlich $\left[t^{\alpha+\frac{3}{2}-n}\right]_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}-n} M^{-\alpha-\frac{3}{2}+n}$.

Abschätzung von $\widetilde{I}_2(s) \otimes I_{3,n}(t)$: Die gleichen Argumente und Rechnungen führen in diesem Fall zur Abschätzung

$$\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} \widetilde{I}_2(s) \cdot I_{3,n}(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq d_{\alpha,\beta}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}}. \qquad (4.128)$$

$\widetilde{I}_3(s) \otimes I_{3,n}(t)$:

$$\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} \sum_{k=0}^{2M-1} I_3(s) \cdot I_{3,n}(t) \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t$$
$$\leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} (2M+1) \cdot c \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} \cdot M^{\alpha-1} \cdot M \cdot (Mt)^{-n-\frac{1}{2}} t^{\alpha+1} \mathrm{d}t$$
$$\leq \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} c \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}} (Mt)^{\alpha+\frac{1}{2}-n} \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha-\frac{3}{2}}, \qquad (4.129)$$

wobei im letzten Schritt wieder $(Mt)^{\alpha+\frac{1}{2}-n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}-n}$ wegen $\alpha + \frac{1}{2} - n < 0$ verwendet werden konnte. Mit (4.127), (4.128) und (4.129) ist (4.123) bewiesen. Mit (4.119), (4.121), (4.122) und (4.123) ist (4.116) und somit Satz 4.18 insgesamt bewiesen. ■

Die folgenden zwei Sätze behandeln die Sonderfälle $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta > -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$. Um die Lebesgue-Konstante der Räume $W^{(N,M)}$ im Sinn von Hauptsatz 6.1, (6.10) zu minimieren, müssen im Beweis des nächsten Satzes die zwei Fälle $\beta \geq \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ unterschieden werden.

Satz 4.19 *Es seien $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r \geq \alpha + \beta + 3$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, und $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante $c = c_{g,r,\alpha,\beta} > 0$ mit*

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_0^{\frac{5}{6}\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)| \omega_{-\frac{1}{2},\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \qquad (4.130)$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)| \omega_{-\frac{1}{2},\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\beta+1}. \quad (4.131)$$

Beweis: Beweis von (4.130): Man wendet (4.48) an auf $\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)$ und $\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)$. Mit den gleichen Argumenten und Rechnungen zum Beweis von Satz 4.18 ergibt sich dann (4.130).
Beweis von (4.131): 1. Fall: Es seien $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \geq \beta > -\frac{1}{2}$. Aus (4.49), angewandt auf $|\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)|$, und (4.18), angewandt auf $|\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)|$, folgt zunächst

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{2M-1} c_1 M^{-\frac{1}{2}} \left(|K_{M,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(s \pm \theta_k)| + \frac{1}{M} |K^{(\alpha,\beta)}_{M,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}(s \pm \theta_k)| \right) \\
&\qquad \times M^{-\frac{1}{2}} \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} |K_M^{(\beta,-\frac{1}{2})}(\theta \pm \theta_k)| \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2M-1} c_2 M^{-\frac{1}{2}} M^{-1} \left(|K^{(-\frac{1}{2},\beta)}_{M,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(s \pm \theta_k)| + \frac{1}{M} |K^{(-\frac{1}{2},\beta)}_{M,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}(s \pm \theta_k)| \right) \\
&\qquad \times M^{-\frac{1}{2}} \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} |K_M^{(\beta,-\frac{1}{2})}(\theta \pm \theta_k)| \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2M-1} c_5 M^{-1} M^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} |K_M^{(\beta,-\frac{1}{2})}(\theta \pm \theta_k)| \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
\tag{4.132}
$$

Nun wendet man unter Beachtung der Tatsache, dass wegen $\vartheta \geq t \geq \frac{5}{6}\pi > \frac{\pi}{2} \geq s$ auch $\vartheta - s \geq \frac{\pi}{3}$ ist, auf die ersten zwei Summanden (4.80), (4.81) und Lemma 2.53 und auf den dritten Summanden (2.66) an. Aus (4.132) erhält man damit dann weiter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(-\frac{1}{2},\beta)}(\cos t)| \\
&\leq c_1 M^{\beta+\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+M\pi)^r} + \frac{1}{M} \left(\frac{N}{M}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+M\pi)^r} \right) \\
&\qquad \times \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta \\
&\quad + c_2 M^{\beta+\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+M\pi)^r} + \left(\frac{N}{M}\right)^{\beta-\frac{3}{2}} \frac{1}{M} \frac{1}{(1+M\pi)^r} \right) \\
&\qquad \times \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta \\
&\quad + c_3 \cdot M^{-1} \left(\frac{N}{M}\right)^{-2} M^{-\frac{1}{2}} M^{\beta+1} \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Genau so wie in der Rechung zu (4.108) beweist man wieder

$$
\sup_{t\in[\frac{5\pi}{6},\pi]} \int_t^{\pi} (1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta < \infty.
$$

Außerdem gilt wegen $r > 2 \geq \beta + \frac{3}{2}$ und $\beta - \frac{1}{2} \leq 0$ auch $\frac{M^{\beta+\frac{3}{2}}}{(1+M\pi)^r} \leq 1$, $\frac{M^{\beta+\frac{1}{2}}}{(1+M\pi)^r} \leq 1$, $\frac{M^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+M\pi)^r} \leq 1$ und $M^{-\frac{3}{2}} \leq 1$, woraus sich die zu beweisende Behauptung für den 1. Fall ergibt.
2. Fall: Es seien $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta > \frac{1}{2}$. In (4.131) wendet man (4.22) auf $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)$ und (4.18) auf $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)$ an. Analog zum Beweis von (4.94) zeigt man zunächst

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \\ &\qquad \leq c_{g,r,\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+2} \int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+3}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\vartheta.\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von (4.108) zeigt man für alle $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

$$\int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+3}}{(1+M|\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta} \frac{(\cos t - \cos\vartheta)^{\beta-1/2}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\vartheta \leq c \frac{M^{2\alpha+4}}{(1+Mt)^{r+\alpha+1-\beta}},$$

woraus die Beschränktheit des Integrals $\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$ analog zu (4.109) und (4.111) und unter Beachtung der Voraussetzung $r \geq \alpha+\beta+3$ folgt. Wegen $\beta \geq \frac{1}{2}$ und $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist außerdem $\alpha+\beta+2 = \beta+\frac{3}{2} \leq 2\beta+1$. Damit ist (4.131) auch für den 2. Fall, also Satz 4.19 insgesamt bewiesen. ■

Satz 4.20 *Es seien $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r > \max\{2\alpha+2, 2\}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante $c = c_{g,r,\alpha,\beta} > 0$ mit*

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2}s}^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1} \tag{4.133}$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac{1}{M}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{4.134}$$

Beweis: Beweis von (4.133): Auf $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)$ wird (4.23) und auf $\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)$ wird (4.21) angewandt. Analog zum Beweis von (4.94) zeigt man dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos s)\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)| &\leq c_{\alpha,\frac{1}{2}} (\frac{N}{M})^{2\alpha+1} \int_{\frac{t}{2}}^{\pi} \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+2M|\vartheta|)^r}(1+\cos\frac{t}{2})^{-\alpha} \\ &\quad \times \begin{cases} \frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{\alpha}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha} \frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{0}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha > 0, \\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha-1} \frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\vartheta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\vartheta)^{-1}} \mathrm{d}\vartheta & \text{für } \alpha = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von (4.100) im Fall $\alpha = \beta$ zeigt man für alle $s \in [\frac{1}{M}, \frac{\pi}{2}]$ und alle $\frac{3}{2}s \leq t \leq \pi$

$$\sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)| \leq c_{\alpha,\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt|)^r}. \tag{4.135}$$

Unter Beachtung der Voraussetzung $r \geq 2\alpha + 2$ folgt daraus die Beschränktheit des Integrals $\int_{\frac{3}{2}s}^{\pi}$ analog zu den Beweisen von (4.109), (4.110) und (4.111). ■

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

Hauptsatz 4.21 *Es seien* $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ *mit* $\max\{\alpha, \beta\} > -\frac{1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$, $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ *mit* $r > \max\{\alpha + \beta + 3, 2\alpha + 2, 2\beta + 2, 2\}$ *und* $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$ *sowie* $\psi_k^{(\alpha,\beta)}$ $(k = 0, ..., 2M-1)$ *gemäß Definition 4.1 gegeben. Dann gibt es eine Konstante* $c = c_{g,r,\alpha,\beta} > 0$ *mit*

$$\sup_{s\in[0,\pi]} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{2M-1} |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)| \cdot |\psi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t dt \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{4.136}$$

Beweis: Es sei zunächst $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$. In Abhängigkeit von α, β und s zerlegt man das Integral in (4.136) wie folgt:

$$\int_0^{\pi} = \begin{cases} \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} & \text{für } \alpha, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{1}{M}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} + \int_{\frac{3}{2}s}^{\pi} & \text{für } \alpha, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [\frac{1}{M}, \frac{\pi}{2}], \\ \int_0^{\frac{5}{6}\pi} + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} & \text{für } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} & \text{für } \alpha > -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{1}{M}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} + \int_{\frac{3}{2}s}^{\pi} & \text{für } \alpha > -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, s \in [\frac{1}{M}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

1. Fall: Der linke Summand ist nach Satz 4.16, der rechte Summand nach (4.93) beschränkt. 2. Fall: Der linke Summand kann nach Satz 4.16, der mittlere Summand nach Satz 4.18 und der rechte Summand nach (4.92) abgeschätzt werden. 3. Fall: Der linke Summand wird mit (4.130), der rechte Summand mit (4.131) abgeschätzt. 4. Fall: Der linke Summand wird mit Satz 4.16, der rechte Summand wird mit (4.134) abgeschätzt. 5. Fall: Der linke Summand wird mit Satz 4.16, der mittlere Summand mit Satz 4.18 und der rechte Summand mit (4.133) abgeschätzt. Im Fall $s \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ führt man das Integral (4.136) mittels Lemma 4.14 auf einen der fünf Fälle zurück. Damit ist der Hauptsatz 4.21 bewiesen. ■

Kapitel 5

Die Lebesgue-Konstanten der $V^{(N,M)}$

In diesem Kapitel werden zu fest gewählten $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ nur die einzelnen, gemäß (3.23) und (3.24) definierten Räume $V^{(N,M)}$ und ihre Basisfunktionen $\varphi_k^{\mu,(N,M)}$ betrachtet, wobei als Orthogonalitätsmaße μ auch in diesem Kapitel nur die Jacobi-Maße $\mu_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2})$ zugelassen werden. In diesem Kapitel wird die gleichmäßige Beschränktheit der gemäß (3.4) definierten Lebesgue-Konstanten dieser Räume bezüglich dieser Maße $\mu_{\alpha,\beta}$ bewiesen. Wir zeigen

$$\sup_{x\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{N} \|\varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(x)\ \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(\cdot)\|_{L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}[-1,1]} \leq c_{\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1} \tag{5.1}$$

für alle $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, wobei $c_{\alpha,\beta} > 0$ eine insbesondere von N und M unabhängige Konstante ist. Der Beweis von (5.1) ist ähnlich aufgebaut und verwendet nahezu die gleichen Methoden und Argumente wie der Beweis von Hauptsatz 4.21 im vorangegangenen Kapitel. Auch das vorliegende Kapitel beruht auf einer Vertiefung und Verallgemeinerung von Methoden, wie sie von Girgensohn in [17] und Skopina in [42] zur Herleitung der entsprechenden Behauptungen für die vier Tschebyscheff- und den Legendre-Fall entwickelt wurden (vgl. die Diskussion am Anfang des 4. Kapitels).

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Zunächst wird die mit $y = \cos s$ und $x = \cos t$ transformierte Summe aus (5.1)

$$\sum_{k=0}^{N} |\varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(\cos s)\ \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(M,N)}(\cos t)|$$

durch die zwei Terme

$$\sum_{k=-M}^{M} g(\frac{M-k}{M}) g(\frac{M+k}{M}) p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \tag{5.2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{2N} g^{*2}_{\frac{M}{N}}(\frac{k}{N}) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \tag{5.3}$$

abgeschätzt (vgl. Lemma 5.1). Die Summe in (5.2) wird dabei zunächst mit Hilfe der Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ aus Satz 2.41 und Korollar 2.42 bzw. durch die Verknüpfung der Asymptotiken aus den Sätzen 2.11 und 2.38, auf verallgemeinerte trigonometrische Dirichlet-Kerne zurückgeführt. Durch die Kombination der so gewonnenen Abschätzungen auf gewissen, in Abhängigkeit von s gewählten Teilintervallen von $[0,\pi]$ kann die $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von (5.2) zunächst abschnittweise abgeschätzt werden (vgl. die Sätze 5.3, 5.4, 5.5). Zur vollständigen Behandlung der Sonderfälle $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta > -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, weil einige Asymptotiken wie beispielsweise die Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ nur im Fall $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ problemlos anwendbar sind (vgl. Satz 2.41 und Korollar 2.42). Diese Sonderfälle werden in den Sätzen 5.6 und 5.7) behandelt. Schließlich werden die verschiedenen Teilresultate im Beweis von Hauptsatz 5.8 zusammengeführt, womit das erste Hauptresultat des Kapitels bewiesen ist.
Die Summe in (5.3) ist ein verallgemeinerter Dirichlet-Kern mit Jacobi-Polynomen. Diese Kerne lassen sich unter verschiedene allgemeinere Klassen von Funktionen zusammenfassen (für ein Beispiel vgl. man die Summe auf der linken Seite der Ungleichung aus (2.38)), deren Lokalisierungseigenschaften bereits von Mhaskar in [30], [31], Brown und Dai in [4] und Petrushev und Xu in [35] untersucht wurden. Zur Abschätzung der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von (5.3) zeigt man zunächst das eher technische Lemma 5.9. Unter Verwendung von Methoden und Argumenten, wie sie Mhaskar in [30] und [31] benutzt, beweist man schließlich als zweites Hauptresultat des Kapitels Hauptsatz 5.10.

Im ersten Lemma dieses Kapitels wird die Lebesgue-Konstante der Räume $V^{(N,M)}$ und ihrer Basisfunktionen $\varphi^{\mu_{\alpha,\beta},(N,M)}$ zunächst auf zwei verallgemeinerte Dirichlet-Kerne zurückgeführt, die dann im Folgenden getrennt untersucht und abgeschätzt werden.

Lemma 5.1 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 3M$, g eine charakteristische Funktion, $g^*_{\frac{M}{N}}(x) = g^*(\frac{M}{N}, x) = g^*(x)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art (vgl. Definition 3.4, 1., 3.) und $\varphi^{\mu_{\alpha,\beta},(N,M)} = \varphi^{(\alpha,\beta)}$ gemäß Definition 3.9 gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{N} \varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \leq &\left|\sum_{k=-M}^{M} g\!\left(\frac{M-k}{M}\right) g\!\left(\frac{M+k}{M}\right) p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \\ &+ \left|\sum_{k=1}^{2N} g^{*2}\left(\frac{k}{N}\right) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| + \left(p_0^{(\alpha,\beta)}\right)^2 .\end{aligned} \tag{5.4}$$

Beweis: Der Beweis folgt [17, Lemma 6b), S. 42]. Es gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N} \varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \\ &= \left(p_0^{(\alpha,\beta)}\right)^2 + p_N^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_N^{(\alpha,\beta)}(\cos t) + \sum_{k=1}^{N-M-1} p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=N-M}^{N-1}\left(g^*\left(\frac{k}{N}\right)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)+g^*\left(\frac{2N-k}{N}\right)p_{2N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)\right)\\
&\qquad\times\left(g^*\left(\frac{k}{N}\right)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)+g^*\left(\frac{2N-k}{N}\right)p_{2N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right)\\
=&\left(p_0^{(\alpha,\beta)}\right)^2+\frac{1}{2}p_N^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_N^{(\alpha,\beta)}(\cos t)+\sum_{k=1}^{2N}g^{*2}\left(\frac{k}{N}\right)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
&+\sum_{k=1}^{M}g^*\left(\frac{N-k}{N}\right)g^*\left(\frac{N+k}{N}\right)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
&+\sum_{k=1}^{M}g^*\left(\frac{N-k}{N}\right)g^*\left(\frac{N+k}{N}\right)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
=&\left(p_0^{(\alpha,\beta)}\right)^2+\sum_{k=1}^{2N}g^{*2}\left(\frac{k}{N}\right)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
&+\sum_{k=-M}^{M}g^*\left(\frac{N-k}{N}\right)g^*\left(\frac{N+k}{N}\right)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
=&\left(p_0^{(\alpha,\beta)}\right)^2+\sum_{k=1}^{2N}g^{*2}\left(\frac{k}{N}\right)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\\
&+\sum_{k=-M}^{M}g\left(\frac{M-k}{M}\right)g\left(\frac{M+k}{M}\right)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t).
\end{aligned}
$$

Dabei wendet man im ersten Schritt (3.23) an sowie die Tatsache, dass gemäß Definition 3.4, 3. $g^*(\frac{k}{N})=1$ für alle $k<N-M$ und $g^*(\frac{j}{N})=0$ für alle $j\geq N+M$ ist. Im zweiten Schritt wendet man wieder Definition 3.4, 3. an und beachtet außerdem, dass nach Lemma 3.5 mit g auch g^* eine charakteristische Funktion und nach (3.11) also $g^*(1)^2=\frac{1}{2}$ ist. Im letzten Schritt nutzt man aus, dass $g^*(\frac{N-k}{N})=g(\frac{M-k}{M})$ und $g^*(\frac{N+k}{N})=g(\frac{M+k}{M})$ gemäß Definition 3.4, 3. für alle $|k|\leq M$ erfüllt ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

In den nächsten Sätzen wird die Abschätzung der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von (5.2) und damit der Beweis von Hauptsatz 5.8 vorbereitet. Zum Beweis dieser Sätze ist es nicht erforderlich, dass g eine charakteristische Funktion ist, insbesondere wird auf die Symmetrie-Forderungen an g gemäß Definition 3.4, 1. verzichtet. In diesem Sinn wird auch die Voraussetzung $N>4M$ einheitlich aufgestellt, obwohl sie in einigen Fällen abgeschwächt werden könnte zu $N>3M$ oder komplett verzichtbar wäre.
Nach dem nächsten Lemma genügt es, das Supremum der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm des ersten Summanden auf der rechten Seite von (5.4) nur für $s\in[0,\frac{\pi}{2}]$ abzuschätzen.

Lemma 5.2 *Es seien $\alpha,\beta\geq-\frac{1}{2}$, $g\in C_c(\mathbb{R})$ mit* $\operatorname{supp} g\subseteq[-2,2]$, *$N,M\in\mathbb{N}$ mit $N>4M$ und $s^*:=\pi-s$. Dann gilt für alle $s\in[\frac{\pi}{2},\pi]$*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi\left|\sum_{k=-M}^{M}g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t dt\\
=&\int_0^\pi\left|\sum_{k=-M}^{M}g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\beta,\alpha)}(\cos s^*)p_{N-k}^{(\beta,\alpha)}(\cos t)\right|\omega_{\beta,\alpha}(\cos t)\sin t dt.
\end{aligned}
$$

Beweis: Nach der Variablentransformation $t = \pi - t^*$ und unter Beachtung von $s^* := \pi - s$ ergibt sich aus (2.29) und weil $h_n^{(\alpha,\beta)} = h_n^{(\beta,\alpha)}$ ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left| \sum_{k=-M}^{M} g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^0 \left| \sum_{k=-M}^{M} g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos(\pi-s^*))p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos(\pi-t^*))\right| \\
&\quad \times\omega_{\alpha,\beta}(\cos(\pi-t^*))\sin(\pi-t^*)(-1)\mathrm{d}t^* \\
&= \int_0^\pi \left| \sum_{k=-M}^{M} g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(-\cos s^*)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(-\cos t^*)\right| \\
&\qquad \times\omega_{\alpha,\beta}(-\cos t^*)\sin t^*\mathrm{d}t^* \\
&= \int_0^\pi \left| \sum_{k=-M}^{M} g(1-\frac{k}{M})g(1+\frac{k}{M})p_{N+k}^{(\beta,\alpha)}(\cos s^*)p_{N-k}^{(\beta,\alpha)}(\cos t^*)\right| \omega_{\beta,\alpha}(\cos t^*)\sin t^*\mathrm{d}t^*.
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

In den nächsten Sätzen wird das Supremum der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Normen von

$$\sum_{k=-M}^{M} g\left(\frac{M-k}{M}\right)g\left(\frac{M+k}{M}\right)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cdot)$$

abschnittweise und in Abhängigkeit von $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ abgeschätzt.

Satz 5.3 *Es seien* $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, $g \in C_c(\mathbb{R})$ *mit* $\operatorname{supp} g \subseteq [-2, 2]$ *und* $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$ *gegeben. Dann gibt es eine insbesondere von* N *und* M *unabhängige Konstante* $c = c_{\alpha,\beta} > 0$ *mit*

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]}\int_0^{\frac{3}{2M}} \left| \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \leq c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}. \tag{5.5}$$

Beweis: Wegen $N > 4M$ gilt für alle $|k| \leq M$ auch $\frac{1}{2}N \leq N \pm k \leq 2N$. Daraus und aus Satz 2.29 folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{3}{2M}} \left| \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\quad \leq c\int_0^{\frac{3}{2M}} \|g\|_\infty M(Nt)^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \leq c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1},
\end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. ■

Zum Beweis des folgenden Satzes benötigt man die Formeln vom Dirichlet-Mehler-Typ gemäß Satz 2.41 und Korollar 2.42, und argumentiert ähnlich wie beispielsweise in den Sätzen 4.4 und 4.17. Die auftretenden Kernfunktionen werden dabei mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Satz 4.12 abgeschätzt.

Satz 5.4 *Es seien* $\alpha,\beta > -\frac{1}{2}$, $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ *mit* $N > 4M$ *und* $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ *mit* $r > \max\{\alpha+\beta+2, 2\}$ *und* $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$. *Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$ *mit*

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]} \int_{\frac{3}{2}s}^{\pi} \Big| \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \Big| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \le c \Big(\frac{N}{M}\Big)^{2\alpha+1} \tag{5.6}$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac{1}{M}]} \int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} \Big| \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) \Big| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \le c \Big(\frac{N}{M}\Big)^{2\alpha+1}. \tag{5.7}$$

Beweis: Beweis von (5.6): Zunächst wendet man Satz 2.41, 1. auf $P_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)$ und Korollar 2.42 auf $P_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)$ an. Zusammen mit der trigonometrischen Identität

$$\begin{aligned}&\cos\left((N-j+\lambda)\,\phi\right)\cdot\cos\left((N+j)\theta-\lambda(\pi-\theta)\right)\\ &= \frac{1}{2}\Re\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N(\theta+\phi)+\lambda(-\pi+\phi+\theta))}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta-\phi)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-N(\theta-\phi)-\lambda(\pi+\phi-\theta))}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta+\phi)}\Big)\end{aligned}$$

und unter Beachtung von Lemma 2.23, 4. ergibt sich daraus zunächst

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big| \\ &\le c_{\alpha,\beta}(1-\cos s)^{-\alpha}(1+\cos t)^{-\beta}\int_t^{\pi}\int_0^s \Big|\widetilde{K}_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\phi)\Big| \frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \\ &\times \begin{cases} \frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta & \text{für } -\frac{1}{2}<\alpha<0, \\ (1-\cos t)^{-\alpha}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha>0, \\ \frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\frac{1-\cos\theta}{1-\cos t}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha=0,\end{cases}\end{aligned} \tag{5.8}$$

wobei

$$\widetilde{K}_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(1) p_{N-j}^{(\beta,\alpha)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta} \tag{5.9}$$

gesetzt wurde. Jetzt beweist man für alle $0 \le \phi,\theta \le \pi$

$$|\widetilde{K}_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\phi\pm\theta)| \le c_{\alpha,\beta,k}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1}\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\phi-\theta|)^r}. \tag{5.10}$$

Beweis von (5.10): Es seien $G_{\alpha,\beta}$ und $G_{\beta,\alpha}$ gemäß (4.70) gegeben. Dann ist die Funktion $G(t) := G_{\alpha,\beta}(N-t)G_{\beta,\alpha}(N+t)$ analytisch auf $[-M,M]$. Aus der Produktregel von Leibniz, aus Lemma 4.11 und unter Beachtung der Tatsache, dass wegen $N > 4M$ auch $2(N+t) \ge N-t \ge \frac{N+t}{2}$ für alle $t \in [-M,M]$ ist, folgt

$$|G(t)^{(r)}| \le c_{\alpha,\beta,j}(N+t)^{\alpha+\beta+1-r}$$

für alle $r \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \in [-M, M]$. Nun setzt man $f(x) := g(1-x)g(1+x)$ und definiert

$$\widetilde{\phi}_M(t) := \begin{cases} f(\frac{t}{M})G(t) & \text{für } t \in [-M, M], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\phi_M(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_M(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Mit den gleichen Argumenten wie zum Beweis von Lemma 4.7 zeigt man

$$\widehat{\phi}_M(t) = \widetilde{\phi}_M(t)$$

und

$$|\phi_M(t)| \leq c_{r,f} \left(\frac{N}{M}\right)^{C_G} \frac{M^{C_G+1}}{(1+M|t|)^r}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $r \geq 2$ und $c_{r,g} = c_r \cdot \max_{0 \leq j \leq r} \|f^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ist. Die Argumente aus Lemma 4.7 lassen sich deshalb übertragen, weil für die vorliegenden Abschätzungen die Differenzierbarkeits- und Trägereigenschaften von $\widetilde{\phi}_M(t)$, d.h. auch von $G(t)$ und zwar nur auf $[-M, M]$ ausschlaggebend sind. Aus diesem Grund führen die gleichen Argumente wie im Beweis zu (4.63) und zu (4.64) zunächst auf

$$\widetilde{K}_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_M(2\pi j + \theta),$$

und schließlich auf die zu beweisende Abschätzung (5.10).
Aus 5.10, (5.8), Lemma 4.15 und weil nach Voraussetzung $\vartheta \geq t \geq \frac{3}{2}s \geq \frac{3}{2}\phi$ und damit auch $|\vartheta - \phi| = \vartheta - \phi \geq \frac{\vartheta}{4}$ ist, folgt schließlich

$$\begin{aligned} &|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| && (5.11) \\ &\leq c_{\alpha,\beta} \left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+1} M^{\alpha+\beta+2}(1+\cos t)^{-\beta} \\ &\times \int_t^\pi \frac{1}{(1+M\theta)^r} \begin{cases} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta & \text{für } -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \\ (1-\cos t)^{-\alpha} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha > 0, \\ \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \frac{1-\cos\theta}{1-\cos t} \mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha = 0. \end{cases} && (5.12) \end{aligned}$$

Genau so wie in den Beweisen zu (4.100), (4.112) und (4.113) zeigt man für alle $\frac{3}{2}s \leq t < \pi$

$$\begin{aligned} &(1+\cos t)^{-\beta} \int_t^\pi \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M\theta)^r} \begin{cases} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta & \text{für } -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \\ (1-\cos t)^{-\alpha} \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}} \mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha > 0, \\ \frac{(\cos t - \cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \frac{1-\cos\theta}{1-\cos t} \mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha = 0 \end{cases} \\ &\leq c_{\alpha,\beta} \cdot \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{r+\alpha-\beta}}, && (5.13) \end{aligned}$$

und genau so wie im Beweis von (4.109) zeigt man auch

$$\int_{\frac{3}{2M}}^{\pi} \frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+Mt)^r}\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \leq c_{\alpha,\beta}. \tag{5.14}$$

Nach Voraussetzung ist $r > \alpha+\beta+2$, so dass sich aus (5.12) zusammen mit (5.13) und (5.14) schließlich die Abschätzung (5.6) ergibt.
Beweis von (5.7): Mit den gleichen Argumenten, mit denen der Beweis von (4.92) auf (4.93) übetragbar war, begründet man jetzt, dass mit (5.6) auch (5.7) bewiesen ist. ■

Zum Beweis des nächsten Satzes kombinieren wir die Asymptotiken aus Satz 2.11 und Satz 2.38, führen so die Jacobi-Polynome auf trigonometrische Funktionen zurück, und argumentieren dann ähnlich wie beispielsweise im Beweis der Sätze 4.5 und 4.18. Dabei werden die auftretenden Kernfunktionen dann mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Korollar 4.13 abgeschätzt.

Satz 5.5 *Es seien $\alpha,\beta \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $N \geq \alpha+\beta+1$ sowie $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r > \max\{\alpha+\beta+2, 2\}$ und $\operatorname{supp} g \subseteq [-2,2]$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\sup_{s\in[\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]}\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\left|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \leq c. \tag{5.15}$$

Beweis: Zunächst zeigt man

$$P_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) = \frac{c_{0,\alpha,\beta}a_{0,0}(t^2)\cos\left((N-j+\lambda)\,t-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)t^{-\alpha}}{\sqrt{(N-j+\lambda)\,t}} + \epsilon_1(t)t^{-\alpha} \tag{5.16}$$

und

$$P_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) = \frac{c_{0,\alpha,\beta}a_{0,0}(s^2)\cos\left((N+j+\lambda)\,s-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)t^{-\alpha}}{\sqrt{(N+j+\lambda)\,s}} + \epsilon_2(s)s^{-\alpha}, \tag{5.17}$$

wobei

$$|\epsilon_1(t)| \leq c_{\alpha,\beta,\varepsilon_0}\frac{1}{Nt\sqrt{Nt}} \quad \text{und} \quad |\epsilon_2(s)| \leq c_{\alpha,\beta,\varepsilon_0}\frac{1}{Ns\sqrt{Ns}} \tag{5.18}$$

für alle $s \in [\frac{1}{M},\frac{\pi}{2}]$ und alle $t \in [\frac{3}{2M},\frac{5}{6}\pi]$ ist.
Beweis von (5.16) und der linken Ungleichung in (5.18): Nach (2.39), (2.40) und (2.41) existieren zu $m = 1$ und $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{6}$ eine Konstante $c_{1,\varepsilon,\alpha,\beta} > 0$ und eine auf $(-\pi,\pi)$ in s^2 analytische Funktion $a_{0,0}(s^2)$, so dass für alle $t \in [0,\frac{5}{6}\pi]$

$$P_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha}\left\{J_\alpha\left((N-j+\lambda)\,t\right)a_{0,0}(t^2)+\varepsilon_1(t)\right\} \tag{5.19}$$

mit

$$|\varepsilon_1(t)| \leq c_{\varepsilon_0,\alpha,\beta}\frac{1}{N\sqrt{Nt}} \tag{5.20}$$

ist. Dabei ist in (5.20) zu beachten, dass wegen $N \geq \alpha+\beta+1$ und $N > 4M$ auch $\frac{1}{2}N \leq N \pm j + \lambda \leq 2N$ und $N \pm j + \lambda > M$, insbesondere also $(N \pm j + \lambda)\, t \geq 1$ für alle $t \geq \frac{3}{2M}$ und $|j| \leq M$ ist. Nach (2.15) und (2.16) existiert zu $n := 1$ also eine Konstante $c_1 > 0$, so dass

$$J_\alpha((N-j+\lambda)t) = \frac{\cos\left((N-j+\lambda)\,t - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{(N-j+\lambda)t}} + \widetilde{\varepsilon}_1(t), \tag{5.21}$$

wobei

$$|\widetilde{\varepsilon}_1(t)| \leq c_1 \frac{1}{Nt\sqrt{Nt}} \tag{5.22}$$

für alle $t \in [\frac{3}{2M}, \frac{3}{2}s]$ ist. Aus (5.21) und (5.19) erhält man schließlich (5.16). Aus (5.20), (5.22) und aus der Tatsache, dass $\sup_{t\in[0,\frac{5\pi}{6}]} |a_{0,0}(t)| < \infty$ ist, folgt schließlich (5.18). Damit sind (5.16) und die linke Ungleichung in (5.18) bewiesen. Der Beweis von (5.17) und der rechten Ungleichung in (5.18) verläuft analog.
Nach (2.44) existiert eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $|j| \leq M$

$$(h_{N-j}^{(\alpha,\beta)})^{-1/2}(h_{N+j}^{(\alpha,\beta)})^{-1/2} = \sqrt{N-j}\sqrt{N+j} + \epsilon_0, \tag{5.23}$$

gilt, wobei

$$\epsilon_0 := |\epsilon_0(N-j, N+j)| \leq c_1 \tag{5.24}$$

ist. Mit der Definition

$$\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M}) \frac{\left(\frac{N}{M}-\frac{j}{M}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{N+\lambda}{M}-\frac{j}{M}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(\frac{N}{M}+\frac{j}{M}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{N+\lambda}{M}+\frac{j}{M}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta} \tag{5.25}$$

und unter Beachtung von

$$\begin{aligned} &\cos\left((N-j+\lambda)t - (\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left((N+j+\lambda)s - (\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((N+\lambda)(t+s)-(2\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(s-t)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((N+\lambda)(-t+s)-(2\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(s+t)}\Big) \end{aligned} \tag{5.26}$$

erhält man zunächst

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{j=-M}^{M} g\left(1-\frac{j}{M}\right) g\left(1+\frac{j}{M}\right)\sqrt{N-j}\sqrt{N+j} \\ &\quad\times \frac{\cos\left((N-j+\lambda)s-(\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{(N-k+\lambda)\,s}} \frac{\cos\left((N+j+\lambda)t-(\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{(N+k+\lambda)\,t}}\Big| \\ &= \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| \end{aligned} \tag{5.27}$$

und insgesamt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=-M}^{M} g\left(1-\frac{j}{M}\right) g\left(1+\frac{j}{M}\right) p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s) p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right| \\
&\quad = \left| \sum_{j=-M}^{M} g\left(1-\frac{j}{M}\right) g\left(1+\frac{j}{M}\right) \left(\sqrt{N-j}\sqrt{N+j}+\epsilon_0\right)\right. \\
&\quad\quad \times\left(\frac{c_{0,\alpha,\beta} a_{0,0}(s^2)\cos\left((N+j+\lambda)s-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)s^{-\alpha}}{\sqrt{(N+j+\lambda)s}} + \epsilon_1 s^{-\alpha}\right) \\
&\quad\quad \left.\times\left(\frac{c_{0,\alpha,\beta} a_{0,0}(t^2)\cos\left((N-j+\lambda)t-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)t^{-\alpha}}{\sqrt{(N-k+\lambda)t}} + \epsilon_2 t^{-\alpha}\right)\right| \\
&\quad \le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| \frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c_1 \sum_{j=-M}^{M}(N+c_1)\left(\frac{1}{\sqrt{Ns}}+\frac{1}{Ns\sqrt{Ns}}\right)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{Nt\sqrt{Nt}} \\
&\quad\quad + c_2\sum_{j=-M}^{M}(N+c_1)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{Ns\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} + c_3\sum_{j=-M}^{M} c_1\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} \qquad (5.28) \\
&\quad \le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| \frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c_1 M(N+c_1)\left(\frac{1}{\sqrt{Ns}}+\frac{1}{Ns\sqrt{Ns}}\right)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{Nt\sqrt{Nt}} \\
&\quad\quad + c_2 M(N+c_1)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{Ns\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} + c_3 M c_1\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} \\
&\quad \le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| \frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c\left(\frac{1}{s\sqrt{st}}+\frac{1}{t\sqrt{st}}\right)s^{-\alpha}t^{-\alpha}. \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

Dabei wurden im ersten Schritt (5.16), (5.17) und (5.23) in die linke Seite von (5.15) eingesetzt. Im zweiten Schritt wurde das entstandene Produkt ausmultipliziert, der einzige Nicht-$\mathcal{O}$-Term wurde durch (5.27), die verbleibenden sieben ε- d.h. $\mathcal{O}$-Terme unter Beachtung der zwei Ungleichungen

$$
\left|\frac{\cos\left((N-k+\lambda)s-(\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\left(N-k+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)s}}\right| \le c_1\frac{1}{\sqrt{Ns}}\ ,\ \left|\frac{\cos\left((N+k+\lambda)t-(\alpha+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\left(N+k+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)t}}\right| \le c_2\frac{1}{\sqrt{Nt}}
$$

sowie von (5.18) und (5.24) abgeschätzt. Im letzten Schritt wurde $\frac{\pi}{t}\ge 1$ sowie $s,t\ge\frac{1}{M}$ bzw. $Nt, Ns\ge 1$ verwendet.

Wegen $0<t\le\frac{3}{2}s\le\frac{3}{4}\pi$ ist $\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\sim t^{2\alpha+1}$ und damit liefert die Integration der rechten Seite von (5.29)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\left(\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right|\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c\left(\frac{1}{s\sqrt{st}}+\frac{1}{t\sqrt{st}}\right)s^{-\alpha}t^{-\alpha}\right)\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right|(\frac{t}{s})^{\alpha+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + c\left(\frac{\left[t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}}{s^{\alpha+\frac{3}{2}}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right) \qquad (5.30) \\
&\le \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} c_0\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right|\mathrm{d}t + c \le \int_{-\pi}^{\pi} c_0\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(t)\right|\mathrm{d}t + c \le c\|g\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde im dritten Schritt verwendet, dass $\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ gemäß (5.25) ein trigonometrisches Polynom ist. Der vierte Schritt ergibt sich, wenn man $G = 1$ und

$$f(t) := g(1-t)g(1+t)(\frac{N}{M}-t)^{\frac{1}{2}}(\frac{N}{M}+t)^{\frac{1}{2}}(\frac{N+\lambda}{M}-t)^{-\frac{1}{2}}(\frac{N+\lambda}{M}+t)^{-\frac{1}{2}}$$

setzt. Offensichtlich ist dann $C_G = 0$ und $\max_{0\le j\le r}\|f^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \le c_{\alpha,\beta,r}\|g\|_\infty$. Wegen $K_{f,G,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ kann jetzt Korollar 4.9 angewendet werden, womit der vierte Schritt legitimiert ist. Damit sind (5.15) und der Satz insgesamt bewiesen. ■

In den folgenden zwei Sätzen wird der Term

$$\sum_{k=-M}^{M} g\left(\frac{M-k}{M}\right)g\left(\frac{M+k}{M}\right)p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)$$

für die zwei Sonderfälle $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta > -\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ abgeschätzt. Insbesondere im Beweis des folgenden Satzes ermöglicht die Fallunterscheidung zwischen $\beta \ge \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ die Rekombination bisheriger Abschätzungen, so dass die Lebesgue-Konstante im Sinn von (6.10) optimiert werden kann.

Satz 5.6 *Es seien $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $N \ge \alpha+\beta+1$ sowie $g \in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r \ge \alpha+\beta+3$ und* supp $g \subseteq [-2,2]$ *gegeben. Dann gilt*

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]}\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\left|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-k}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t dt \le c \tag{5.31}$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac{\pi}{2}]}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t dt \le c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\beta+1}. \tag{5.32}$$

Beweis: Beweis zu (5.31): Man orientiert sich am Beweis von Satz 5.5: Wegen $\alpha = -\frac{1}{2}$ und Lemma 2.10, 2. ist $\widetilde{\varepsilon_1} = 0$ in (5.21). Somit können die Ungleichungen in (5.18) verbessert werden zu

$$\epsilon_1(t) \le c_{\alpha,\beta,\varepsilon_0}\frac{1}{N\sqrt{Nt}} \quad \text{und} \quad \epsilon_2(s) \le c_{\alpha,\beta,\varepsilon_0}\frac{1}{N\sqrt{Ns}} \tag{5.33}$$

und statt (5.28) erhält man nun

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=-M}^{M} g\left(1-\frac{j}{M}\right)g\left(1+\frac{j}{M}\right)p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\\ &\quad\le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right|\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c_1\sum_{j=-M}^{M}(N+c_1)\left(\frac{1}{\sqrt{Ns}}+\frac{1}{N\sqrt{Ns}}\right)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{N\sqrt{Nt}}\\ &\qquad+c_2\sum_{j=-M}^{M}(N+c_1)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{N\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} + c_3\sum_{j=-M}^{M}c_1\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| \frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} + c_1 M\,(N+c_1)\left(\frac{1}{\sqrt{Ns}}+\frac{1}{N\sqrt{Ns}}\right)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{N\sqrt{Nt}}\\
&\quad + c_2 M(N+c_1)\frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{N\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}} + c_3 M c_1 \frac{t^{-\alpha}s^{-\alpha}}{\sqrt{Ns}\sqrt{Nt}}\\
&\le \frac{1}{2}\left|\widetilde{K}_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(s\pm t)\right| + c,
\end{aligned}
$$

woraus sich mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von (5.30) und unter Beachtung der Tatsache, dass $\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t \sim t^{2\alpha+1}$ für alle $0 \le t \le \frac{5}{6}\pi$ ist, die Abschätzung (5.31) ergibt.

Beweis zu (5.32) für den Fall $\beta \ge \frac{1}{2}$: Aus (2.35) erhält man zunächst

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big|\\
&\quad \le \frac{1}{2}\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})(h_{N-j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}}((h_{N+j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}\\
&\qquad \times P_{N+j}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos s)P_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big| \qquad (5.34)\\
&\quad +\frac{1}{2}\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})(h_{N-j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}}((h_{N+j}^{(\alpha,\beta)})^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{N+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}\\
&\qquad \times P_{N+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos s)P_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big|. \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

Jetzt führt man (5.34) bzw. (5.35) auf die verallgemeinerten Kernfunktionen

$$
\widetilde{K}_{3,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\left(\frac{N+\alpha}{M}+\frac{j}{M}\right)\frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(1)p_{N-j}^{(\beta,\alpha)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}
$$

bzw.

$$
\widetilde{K}_{4,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta) := \sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\left(\frac{N}{M}+\frac{j}{M}\right)\frac{\frac{N+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(1)p_{N-j}^{(\beta,\alpha)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}
$$

zurück. Dazu beachtet man, dass nach (2.30)

$$
\begin{aligned}
P_{N+k}^{(\alpha+1,\beta)}(1) &= \frac{\Gamma(N+k+\alpha+1)}{\Gamma(N+k+1)\Gamma(\alpha+1+1)}\\
&= \frac{(N+k+\alpha)}{\alpha+1}\frac{\Gamma(N+k+\alpha)}{\Gamma(N+k+1)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{N+k+\alpha}{\alpha+1}P_{N+k}^{(\alpha,\beta)}(1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
P_{N+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(1) &= \frac{\Gamma(N+j-1+\alpha+1)}{\Gamma(N+j-1+1)\Gamma(\alpha+1+1)}\\
&= \frac{(N+j)}{\alpha+1}\frac{\Gamma(N+j+\alpha)}{\Gamma(N+j+1)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{N+j}{\alpha+1}P_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(1)
\end{aligned}
$$

sowie die trigonometrische Identität

$$
\begin{aligned}
&\cos\left((N+j-1+\lambda_1)\phi\right)\cdot\cos\left((N-j)\theta-\lambda_2(\pi-\theta)\right)\\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}((N-1+\lambda_1)\phi+N\theta-\lambda_2(\pi-\theta))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi-\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}((N-1+\lambda_1)\phi-N\theta+\lambda_2(\pi-\theta))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\phi+\theta)}\right)
\end{aligned}
$$

mit $\lambda_1 := \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ und $\lambda_2 := \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Für (5.34) bzw. (5.35) ergibt sich daraus zusammen mit Satz 2.41, 2., Korollar 2.42, 1. und (2.23)

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}p_{N+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big|\\&\leq c_{\alpha,\beta}(1-\cos s)^{-\alpha-1}(1+\cos t)^{-\beta}M\int_t^\pi\int_0^s|\widetilde{K}_{3,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\phi)|\\&\quad\times\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1+\cos s)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{5.36}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\frac{\frac{N+\beta}{M}+\frac{j}{M}}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+\frac{j}{M}}p_{N+j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big|\\&\leq c_{\alpha,\beta}(1-\cos s)^{-\alpha-1}(1+\cos t)^{-\beta}M\int_t^\pi\int_0^s|\widetilde{K}_{4,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\phi)|\\&\quad\times\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1+\cos s)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Wie in (5.10) beweist man nun für $i = 3, 4$

$$|\widetilde{K}_{i,M}^{(\alpha,\beta)}(\theta\pm\phi)| \leq c_{i,\alpha,\beta,g}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha+\beta+2}\frac{M^{\alpha+\beta+2}}{(1+M|\theta-\phi|)^r}, \tag{5.38}$$

wobei im Fall $i = 3$ die Funktion $f_3(t) := g(1-t)g(1+t)\left(\frac{N+\alpha}{M}+t\right)\frac{\frac{N+\alpha+\beta}{M}+t}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+t}$ und im Fall $i = 4$ die Funktion $f_4(t) := g(1-t)g(1+t)\left(\frac{N}{M}+t\right)\frac{\frac{N+\beta}{M}+t}{\frac{N+\frac{\alpha+\beta}{2}}{M}+t}$ statt $f(t) = g(1-t)g(1+t)$ eingeht und somit insbesondere $\max_{0\leq j\leq r}\|f_i^{(j)}\|_{L^1(\mathbb{R}} \leq c_{r,g}\frac{N}{M}$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Mit $t' := \pi - t$ und der Substitution $\theta' = \pi - \theta$ erhält man

$$\begin{aligned}&\int_t^\pi(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{t'}(1-\cos t')^{-\beta}\frac{(\cos\theta'-\cos t')^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta')^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\theta'\\&\leq c\int_0^{t'}t'^{-2\beta}(t'^2-\theta'^2)^{\beta-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta' \leq c\int_0^1 t'^{-2\beta}t'^{2\beta-1}(1-u^2)^{\beta-\frac{1}{2}}t'\mathrm{d}u \leq c,\end{aligned}$$

also

$$\sup_{t\in[\frac{\pi}{2},\pi]}\int_t^\pi(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\theta < \infty. \tag{5.39}$$

Aus (5.39), (5.38) und (5.36) bzw. (5.37) erhält man unter Beachtung von $\theta - \phi \geq \frac{\pi}{3}$ und Lemma 4.15 schließlich

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\Big|\\&\leq c_{\alpha,\beta}(\frac{N}{M})^{\alpha+\beta+2}M^{\alpha+\beta+2}(1-\cos s)^{-\alpha-1}(1+\cos t)^{-\beta}M\int_t^\pi\int_0^s\frac{1}{(1+M|\theta-\phi|)^r}\\&\quad\times\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{(\alpha+\beta)/2}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

$$\le c_{\alpha,\beta}(\frac{N}{M})^{\alpha+\beta+2}M^{\alpha+\beta+3}(1-\cos s)^{-\alpha-1}(1+\cos t)^{-\beta}$$
$$\times\int_t^\pi\int_0^s\frac{1}{(1+M\theta)^r}\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha+\frac12}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+1+\beta}{2}}}\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta,$$
$$\le c_{\alpha,\beta}(\frac{N}{M})^{\alpha+\beta+2}\frac{M^{\alpha+\beta+3}}{(1+M\frac{\pi}{3})^r}(1+\cos t)^{-\beta}\int_t^\pi\frac{(\cos t-\cos\theta)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\le c_{\alpha,\beta}(\frac{N}{M})^{\alpha+\beta+2},$$

wobei im letzten Schritt neben der Abschätzung (5.39) auch verwendet wurde, dass nach Voraussetzung $r\ge\alpha+\beta+3$ und damit insbesondere $\frac{M^{\alpha+\beta+3}}{(1+M\frac{\pi}{3})^r}\le 1$ ist. Wegen $\alpha=-\frac12$ und $\beta\ge\frac12$ ist $\alpha+\beta+2\le 2\beta+1$, was (5.32) für den Fall $\beta\ge\frac12$ beweist.
Beweis von (5.32) für den Fall $-\frac12<\beta<\frac12$: Die Kombination von Satz 2.38 für $m=2$ und $\varepsilon=\frac{\pi}{6}$ und Lemma 2.10, 2., 3. liefert

$$P_{N+j}^{(-\frac12,\beta)}(\cos s)=\Big(\frac{s}{2}\Big)^{\frac12}\Bigg(\frac{\sqrt2\cos(N^*s)}{\sqrt{\pi N^*s}}\Big(a_{0,0}(s^2)+\frac{a_{1,0}(s^2)}{N^*}\Big)+\frac{1}{N^*}\frac{1}{\sqrt{\pi N^*s}}\cos(N^*s)\frac{b_{1,0}(s^2)}{N^*}$$
$$-\sqrt{\frac{2s}{\pi N^*}}\cos(N^*s-\frac{\pi}{2})\frac{b_{1,0}(s^2)}{N^*}+\varepsilon_2\Bigg),\tag{5.40}$$

wobei $N^*:=N+j+\frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wurde, gemäß (2.41) speziell $b_{0,0}(s^2)\equiv 0$ gilt und wegen $\frac12N\le N^*\le 2N$ für alle $|j|\le M$ insbesondere

$$|\varepsilon_2(s)|\le c\frac{1}{N^2}\frac{1}{\sqrt{Ns}}\tag{5.41}$$

zu beachten ist. Nun definiert man die weiteren Kernfunktionen

$$\widetilde{K}_{5,M}^{(-\frac12,\beta)}(\theta):=\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\Big(\frac{N+\lambda}{M}-\frac{j}{M}\Big)^{-\frac12}\Big(h_{N-j}^{(-\frac12,\beta)}h_{N+j}^{(-\frac12,\beta)}\Big)^{-\frac12}P_{N+j}^{(\beta,-\frac12)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta},$$
$$\widetilde{K}_{6,M}^{(-\frac12,\beta)}(\theta):=\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\Big(\frac{N+\lambda}{M}-\frac{j}{M}\Big)^{-\frac32}\Big(h_{N-j}^{(-\frac12,\beta)}h_{N+j}^{(-\frac12,\beta)}\Big)^{-\frac12}P_{N+j}^{(\beta,-\frac12)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta},$$
$$\widetilde{K}_{7,M}^{(-\frac12,\beta)}(\theta):=\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})\Big(\frac{N+\lambda}{M}-\frac{j}{M}\Big)^{-\frac52}\Big(h_{N-j}^{(-\frac12,\beta)}h_{N+j}^{(-\frac12,\beta)}\Big)^{-\frac12}P_{N+j}^{(\beta,-\frac12)}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}.$$

Für die Lokalisierung dieser Kerne gilt

$$\begin{aligned}|\widetilde{K}_{5,M}^{(\beta,-\frac12)}(s\pm\vartheta)|&\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac12}\frac{M^{\beta+2}}{(1+M|s-\vartheta|)^r},\\ |\widetilde{K}_{6,M}^{(\beta,-\frac12)}(s\pm\vartheta)|&\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta-\frac12}\frac{M^{\beta+2}}{(1+M|s-\vartheta|)^r}\quad\text{und}\\ |\widetilde{K}_{7,M}^{(\beta,-\frac12)}(s\pm\vartheta)|&\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta-\frac32}\frac{M^{\beta+2}}{(1+M|s-\vartheta|)^r},\end{aligned}\tag{5.42}$$

was man wie folgt einsieht: Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Lemma 4.11 zeigt man für die Funktion

$$H_{\alpha,\beta}(t):=\left((t+\frac{\alpha+\beta+1}{2})\cdot\frac{\Gamma(t+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(t+\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(t+1))}{\Gamma(t+\beta+1)}\right)^{\frac12}$$

die Ungleichung
$$\left|H^{(k)}_{\alpha,\beta}(t)\right| \le c_{k,\alpha,\beta}\cdot t^{\alpha+\frac12-k} \text{ für alle } t\ge 1.$$

Wegen $\left(h^{(-\frac12,\beta)}_{N-k}\right)^{-\frac12} = c_{\alpha,\beta}H_{\alpha,\beta}(N-k)$ ergeben sich dann wie im Beweis zu (5.10) die Abschätzungen in (5.42).
Nun wendet man Korollar 2.42, 1. und Lemma 2.23, 1. auf $P^{(\alpha,\beta)}_{N-j}(\cos t)$ an und erhält zusammen mit (5.40) und (5.41) schließlich

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=-M}^{M} g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p^{(-\frac12,\beta)}_{N+j}(\cos s)p^{(-\frac12,\beta)}_{N-j}(\cos t)\Big|\\
&\le c_1\int_t^\pi\left(\frac{1}{M^{\frac12}}|\widetilde{K}^{(\beta,-\frac12)}_{1,M}(s\pm\vartheta)|+\frac{1}{M^{\frac32}}|\widetilde{K}^{(\beta,-\frac12)}_{2,M}(s\pm\vartheta)|+\frac{1}{M^{\frac52}}|\widetilde{K}^{(\beta,-\frac12)}_{3,M}(s\pm\vartheta)|\right)\\
&\quad\times(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta+\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta + c_2M\frac{1}{N^{\frac52}}N^{\beta+1}\\
&\le c\int_t^\pi\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac12}\frac{M^{\beta+\frac32}}{(1+M|s-\vartheta|)^r}(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta+\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta + c_2\frac{M}{N}N^{\beta-\frac12}\\
&\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac12}\frac{M^{\beta+\frac32}}{(1+M\frac{\pi}{3})^r}\int_t^\pi(1+\cos t)^{-\beta}\frac{(\cos t-\cos\vartheta)^{\beta-\frac12}}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{\beta+\alpha}{2}}}\mathrm{d}\vartheta \le c\left(\frac{N}{M}\right)^{\beta+\frac12}. \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Dabei beachtet man im dritten Schritt, dass $\vartheta - s\ge\frac{\pi}{3}$ und wegen $\beta<\frac12$ auch $N^{\beta-\frac12}\le 1$ ist. Im vierten Schritt wendet man (5.39) an und die Tatsache, dass wegen $r>\beta+\frac32$ auch $\frac{M^{\beta+\frac32}}{(1+M\frac{\pi}{3})^r}\ge 1$ ist. Damit ist (5.32) auch für den Fall $-\frac12<\beta<\frac12$ bewiesen. ■

Satz 5.7 *Es seien $\alpha>-\frac12$, $\beta=-\frac12$, $N,M\in\mathbb{N}$ mit $N>4M$ sowie $g\in C^r_c(\mathbb{R})$ mit $r>\max\{2\alpha+2,2\}$ und $\operatorname{supp} g\subseteq[-2,2]$. Dann gilt*

$$\sup_{s\in[\frac1M,\frac{\pi}{2}]}\int_{\frac32 s}^{\pi}\Big|\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p^{(\alpha,\beta)}_{N+j}(\cos s)p^{(\alpha,\beta)}_{N-j}(\cos t)\Big|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \quad (5.44)$$

und

$$\sup_{s\in[0,\frac1M]}\int_{\frac{3}{2M}}^{\pi}\Big|\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p^{(\alpha,\beta)}_{N+j}(\cos s)p^{(\alpha,\beta)}_{N-j}(\cos t)\Big|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}. \quad (5.45)$$

Beweis: Beweis von (5.44): Man wendet Satz 2.31 auf $P^{(\alpha,-\frac12)}_{N-j}(\cos t)$, Korollar 2.42 auf $\frac{P^{(\alpha,\alpha)}_{2(N-j)}(\cos\frac t2)}{P^{(\alpha,\alpha)}_{2(N-j)}(1)}$ und Satz 2.41, 1. auf $P^{(\alpha,-\frac12)}_{N+j}(\cos s)$ an und erhält unter Beachtung von Lemma 2.23 schließlich

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p^{(\alpha,-\frac12)}_{N+j}(\cos s)p^{(\alpha,-\frac12)}_{N-j}(\cos t)\Big|\\
&\le\Big|\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p^{(\alpha,-\frac12)}_{N+j}(1)p^{(\alpha,-\frac12)}_{N-j}(1)\frac{P^{(\alpha,-\frac12)}_{N+j}(\cos s)}{P^{(\alpha,-\frac12)}_{N+j}(1)}\frac{P^{(\alpha,\alpha)}_{2(N-j)}(\cos\frac t2)}{P^{(\alpha,\alpha)}_{2(N-j)}(1)}\Big|
\end{aligned}$$

$$\leq c(1+\cos\frac{t}{2})^{-\alpha}(1-\cos s)^{-\alpha}\int_0^s\int_{\frac{t}{2}}^{\pi}\frac{(\cos\phi-\cos s)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\phi)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}|\widetilde{K}_{8,M}(\phi\pm 2\theta)|$$

$$\times\begin{cases}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\alpha}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi & \text{für } -\frac{1}{2}<\alpha<0,\\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{0}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi & \text{für } \alpha>0,\\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha-1}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{-1}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi & \text{für } \alpha=0\end{cases}$$

$$\leq c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}(1+\cos\frac{t}{2})^{-\alpha}\int_{\frac{t}{2}}^{\pi}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+M|\phi-2\theta|)^r}$$

$$\times\begin{cases}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{\alpha}}\mathrm{d}\theta & \text{für } -\frac{1}{2}<\alpha<0,\\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{0}}\mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha>0,\\ (1-\cos\frac{t}{2})^{-\alpha-1}\frac{(\cos\frac{t}{2}-\cos\theta)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta)^{-1}}\mathrm{d}\theta & \text{für } \alpha=0\end{cases}$$

$$\leq c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^r},$$

wobei

$$\widetilde{K}_{8,M}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\theta):=\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(1)p_{N-j}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$$

gesetzt wurde und im dritten Schritt eingeht, dass

$$\left|\widetilde{K}_{8,M}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\theta\pm\phi)\right|\leq\left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}\frac{M^{2\alpha+2}}{(1+M|\theta-\phi|)^r}\tag{5.46}$$

ist, was unter Verwendung der Funktion $G(t) := G_{\alpha,-\frac{1}{2}}(N-t)G_{\alpha,-\frac{1}{2}}(N+t)$ mit den Argumenten von (5.10) selber bewiesen werden kann. Im vierten Schritt beachtet man schließlich, dass nach Voraussetzung an die Integrationsgrenzen $|2\theta-\phi|\geq\frac{1}{10}\theta$ ist und argumentiert dann analog zum Beweis von (4.100) im Fall $\alpha=\beta$. Das $\int_{\frac{3}{2}s}^{\pi}$-Integral in (5.44) wertet man nun mit den gleichen Argumenten aus, die schon zum Beweis von (4.109), (4.110) und (4.111) geführt haben. Insbesondere geht hier die Voraussetzung $r>2\alpha+2$ ein. Damit ist (5.44) bewiesen.
Beweis von (5.45): Mit den gleichen Argumenten, mit denen der Beweis von (4.92) auf (4.93) übetragen wurde, begründet man jetzt, dass mit (5.44) auch (5.45) bewiesen ist. ■

Nach diesen Vorbereitungen kann das Supremum über $s\in[0,\pi]$ der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm vom ersten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung in (5.2) insgesamt abgeschätzt werden.

Hauptsatz 5.8 *Es seien $\alpha,\beta\geq-\frac{1}{2}$ mit $\max\{\alpha,\beta\}>-\frac{1}{2}$, $N,M\in\mathbb{N}$ mit $N>4M$ und $N\geq\alpha+\beta+1$ sowie $g\in C_c^r(\mathbb{R})$ mit $r\geq 2\max\{\alpha,\beta\}+3$ und $\operatorname{supp} g\subseteq[-2,2]$. Dann existiert eine von N, M und $\frac{N}{M}$ unabhängige Konstante $c>0$ mit*

$$\sup_{s\in[0,\pi]}\int_0^{\pi}\left|\sum_{j=-M}^{M}g(1-\frac{j}{M})g(1+\frac{j}{M})p_{N+j}^{(\alpha,\beta)}(\cos s)p_{N-j}^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\right|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \leq c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}.\tag{5.47}$$

Beweis: Es sei zunächst $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$. In Abhängigkeit von α, β und s zerlegt man das Integral in (5.47) wie folgt:

$$\int_0^\pi = \begin{cases} \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^\pi & \text{für } \alpha, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{1}{M}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} + \int_{\frac{3}{2}s}^\pi & \text{für } \alpha, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [\frac{1}{M}, \frac{\pi}{2}], \\ \int_0^{\frac{5}{6}\pi} + \int_{\frac{5}{6}\pi}^\pi & \text{für } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^\pi & \text{für } \alpha > -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, s \in [0, \frac{1}{M}], \\ \int_0^{\frac{3}{2M}} + \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{3}{2}s} + \int_{\frac{3}{2}s}^\pi & \text{für } \alpha > -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, s \in [\frac{1}{M}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

1. Fall: Der linke Summand ist nach Satz 5.3, der rechte Summand nach (5.7) beschränkt. 2. Fall: Der linke Summand kann nach Satz 5.3, der mittlere Summand nach Satz 5.5 und der rechte Summand nach (5.6) abgeschätzt werden. 3. Fall: Der linke Summand wird mit (5.31), der rechte Summand mit (5.32) abgeschätzt. 4. Fall: Der linke Summand wird mit Satz 5.3, der rechte Summand wird mit (5.45) abgeschätzt. 5. Fall: Der linke Summand wird mit Satz 5.3, der mittlere Summand mit Satz 5.5 und der rechte Summand mit (5.44) abgeschätzt. Im Fall $s \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ führt man das Integral in (5.47) mittels Lemma 5.2 auf einen der fünf Fälle zurück. Damit ist der Hauptsatz 5.8 bewiesen. ■

Jetzt wird als zweites Hauptresultat dieses Kapitels die Summe in (5.3) abgeschätzt: Wir beweisen Hauptsatz 5.10 mit Hilfe der Argumente und Methoden von Mhaskar aus [30, Lemma 4.6.] und [31, Satz 5.1] zusammen mit einer geeigneten Zerlegung des $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Integrationsintervalls in Abhängigkeit von N und M. Der entscheidende Nachteil der in [35] und [4] verwendeten Methoden besteht dabei in folgender Beobachtung: In (5.3) ist nämlich $h_j = g^{*2}_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})$, d.h. die zur Konstruktion dieser Summe verwendete Funktion ist von der Größe $\frac{N}{M}$ abhängig. Die eigentliche Schwierigkeit bei der Abschätzung der $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Norm von (5.3) besteht deshalb insbesondere darin, ihre Größenordnung, d.h. den Exponenten, mit dem $\frac{N}{M}$ in diese Norm eingeht, im Sinn von (6.10) zu minimieren. In die Abschätzungen von (5.3) mit den Methoden aus [35, Satz 2.4 und Satz 2.5] oder von Brown und Dai aus [4, Lemma 3.3.] gehen aber auch höhere Ableitungen von $g^*_{\frac{N}{M}}$ ein, was zu $\frac{N}{M}$-Exponenten mit einer Größenordnung von mindestens $3\alpha + 3\beta + 5$, im Vergleich zu (6.10) und dem gewünschten Exponenten von $2\max\{\alpha, \beta\} + 1$ also noch zu große $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Normen für (5.3) liefert. Bessere Schranken, d.h. kleinere Exponenten für die $\frac{N}{M}$-Faktoren erhält man durch Kombination der Argumente und Methoden von Mhaskar aus [30, Lemma 4.6.] und [31, Satz 5.1 und Korollar 5.1] zusammen mit einer geeigneten Zerlegung des $L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}$-Integrationsintervalls in Abhängigkeit von N und M.

Zunächst beweist man das eher technische

Lemma 5.9 *Es seien $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$, g eine charakteristische Funktion vom Grad r und $g^*_{\frac{M}{N}}(x)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art gemäß*

Definition 3.4, 1., 3. gegeben. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ mit $m + l \leq r$

$$\operatorname{supp} \Delta^m \, g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}) \subseteq [N - M - m, N + M], \tag{5.48}$$

$$\|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}u^l}\Delta^m \, g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u}{N})\|_\infty \leq \frac{1}{N^{m+l}} \left(\frac{N}{M}\right)^{m+l} \|g^{(m+l)}\|_\infty, \tag{5.49}$$

wobei Δ gemäß (2.3) definiert wurde.

Beweis: Beweis von (5.48): Für $m = 1$ und $u < N - M - 1$ ist $\frac{u}{N} < \frac{u+1}{N} \leq 1 - \frac{M}{N}$ gemäß Definition 3.4, 3. also $g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u+1}{N}) = 1 = g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u}{N})$ und wegen (2.3) somit auch $\Delta g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u}{N}) = 0$. Es sei nun (5.48) bereits für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann gilt für $u < N - M - m - 1$ auch $u + 1 < N - M - m$ und wegen (2.3) somit

$$\Delta^{m+1} \, g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}) = \Delta^m \, g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u+1}{N}) - \Delta^m \, g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}) = 0.$$

Für $u > N + M$ erhält man entsprechend $\Delta^{m+1} \, g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u}{N}) = 0$, womit (5.48) bewiesen ist.
Beweis von (5.49): Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $l \in \mathbb{N}_0$ ist offensichtlich

$$(\Delta^m g)^{(l)} = \Delta^m g^{(l)}. \tag{5.50}$$

Außerdem gilt für alle $f \in C_c^r(\mathbb{R})$ und alle $r, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq r$

$$\|\Delta^m f\|_\infty \leq \|f^{(m)}\|_\infty \tag{5.51}$$

Beweis von (5.51): Für $m = 1$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechung ein $\eta \in (u, u + 1)$ mit $\Delta f(u) = f(u + 1) - f(u) = f'(\eta)$, womit (5.51) bewiesen ist. Es sei also (5.51) bereits für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann existiert gemäß (2.3) und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\eta \in (u, u + 1)$, so dass

$$\Delta^{m+1} f(u) = \Delta^m f(u + 1) - \Delta^m f(u) = (\Delta^m f)'(\eta) = \Delta^m f'(\eta)$$

ist, was (5.51) insgesamt beweist.
Nach Definition 3.4, 3. folgt

$$|(g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}))^{(m)}| \leq (\frac{1}{M})^m \|g^{(m)}\|_\infty$$

für alle $u \in \mathbb{R}$ und alle $m, r \in \mathbb{N}$ mit $m \leq r$. Daraus und aus (5.50) und (5.51) folgt nun

$$|(\Delta^m g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}))^{(l)}| = |\Delta^m (g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}))^{(l)}| \leq |((g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{u}{N}))^{(l)})^{(m)}| \leq (\frac{1}{M})^{m+l} \|g^{(m+l)}\|_\infty$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, womit (5.49) insgesamt bewiesen ist. ■

Jetzt beweist man als zweites Hauptresultat dieses Kapitels den

Hauptsatz 5.10 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ mit $\max\{\alpha, \beta\} > -\frac{1}{2}$, g eine charakteristische Funktion vom Grad $r > \max\{\alpha, \beta\} + \frac{3}{2}$, $g^*_{\frac{M}{N}}(x) = g^*(\frac{M}{N}, x) = g^*(x)$ die zu g korrespondierende charakteristische Funktion 2. Art (vgl. Definition 3.4, 1., 3.) und $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > 4M$ und $N > 2\max\{\alpha, \beta\} + 3$ gegeben. Dann gilt*

$$\sup_{x \in [-1,1]} \|\sum_{j=0}^{\infty} g^{*2}_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(x) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cdot)\|_{L^1_{\mu_{\alpha,\beta}}([-1,1])} \leq c \left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{5.52}$$

Beweis: Die Ungleichung (5.52) ergibt sich aus Satz 2.33 und der folgenden Abschätzung

$$\int_0^\pi |\sum_{j=0}^\infty g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})p_j^{(\alpha,\beta)}(1)p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \le c\left(\frac{N}{M}\right)^{2\max\{\alpha,\beta\}+1}. \tag{5.53}$$

Beweis von (5.53) im Fall $\alpha = \max\{\alpha,\beta\} \ge 0$: Für $S := \lfloor \alpha + \frac{3}{2} \rfloor + 1$ folgt aus Satz 2.32 zunächst

$$\begin{aligned}
&|\sum_{j=0}^\infty g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})p_j^{(\alpha,\beta)}(1)p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \\
&\le c\sum_{j=0}^\infty \min\{(j+1),\frac{1}{t}\}^{\alpha+S+\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^S (j+1)^{\alpha+\frac{1}{2}-S+m}|\Delta^m g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})| \\
&\le c\sum_{m=1}^S\sum_{j=N-M-m}^{N+M} \min\{(j+1),\frac{1}{t}\}^{\alpha+S+\frac{1}{2}}(j+1)^{\alpha+\frac{1}{2}-S+m}|\Delta^m g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})| \\
&\le c\sum_{m=1}^S\sum_{j=N-M-m}^{N+M} \frac{N^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}N^{\alpha+\frac{1}{2}-S+m}\frac{1}{N^m}\left(\frac{N}{M}\right)^m\|g^{(m)}\|_\infty \\
&\le cM\frac{N^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}\sum_{m=1}^S N^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{1}{N^S}\left(\frac{N}{M}\right)^S\|g^{(m)}\|_\infty \\
&\le c\left(\frac{N}{M}\right)^{S-1}\frac{N^{2\alpha+2}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Dabei wurde im ersten Schritt Satz 2.32, im zweiten Schritt (5.48) auf die Funktion $g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{u}{N})$, im dritten Schritt (5.49) und die Tatsache, dass $\min\{(j+1),\frac{1}{t}\}^{\alpha+S+\frac{1}{2}} \le c\frac{N^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}$ ist, angewendet. Aus (5.54) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{N}} |\sum_{j=0}^\infty g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})p_j^{(\alpha,\beta)}(1)p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\le c_1\int_0^{\frac{1}{N}}\frac{N^{2\alpha+2}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \le c_1\int_0^{\frac{1}{N}} N^{2\alpha+2}t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \le c_1
\end{aligned} \tag{5.55}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{\pi}{2}} |\sum_{j=0}^\infty g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})p_j^{(\alpha,\beta)}(1)p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)|\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\le c_2\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{N^{2\alpha+2}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}\omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\le c_2\int_1^\infty\frac{u^{2\alpha+1}}{(1+u)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}u \le c_2\int_1^\infty u^{\alpha+1-S-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \le c_2
\end{aligned} \tag{5.56}$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{N^{2\alpha+2}}{(1+Nt)^{\alpha+S+\frac{1}{2}}} \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_3 \frac{N^{2\alpha+2}}{(1+N\frac{\pi}{2})^{\alpha+S+\frac{1}{2}}} \leq c_3 N^{2\alpha+2-\alpha-S-\frac{1}{2}} \leq c_3,
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

wobei man im letzten Schritt von (5.55) die Voraussetzung $2\alpha+1>0$ und im letzten Schritt von (5.56) und (5.57) die Voraussetzung $S>\alpha+\frac{3}{2}$ verwendet hat. Aus (5.55), (5.56), (5.57) und weil $S-1\leq 2\alpha+1$ nach Wahl von S ist, folgt (5.53) für den Fall $\alpha=\max\{\alpha,\beta\}\geq 0$.
Beweis von (5.53) im Fall $-\frac{1}{2}<\max\{\alpha,\beta\}=\alpha<0$: Es sei zunächst $0<t\leq\frac{1}{M}$. Dann folgt für $S=1$ aus Satz 2.32

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \leq c_4 \sum_{j=0}^{\infty} \min\{(j+1),\frac{1}{t}\}^{\alpha+\frac{3}{2}}(j+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} |\Delta^1 g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N})| \\
&\leq c_4 M \frac{N^{\alpha+\frac{3}{2}}}{(1+Nt)^{\alpha+\frac{3}{2}}} N^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{N}{M}\frac{1}{N} \|g^{(1)}\|_\infty \leq c_4 \frac{N^{2\alpha+2}}{(1+Nt)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+Nt)} \leq c_4 N^{2\alpha+1}\frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{M}} |\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_5 \int_0^{\frac{1}{M}} N^{2\alpha+1}\frac{1}{t} t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \leq c_5 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}.
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

Jetzt sei $\frac{1}{M}\leq t\frac{\pi}{2}$. Dann folgt für $S=2$ aus Satz 2.32 mit den gleichen Argumenten, die in der Herleitung von (5.54) verwendet wurden, und unter Beachtung der Tatsache, dass aus $\frac{1}{M}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ auch $\frac{1+Mt}{2}\leq Mt$ folgt, zunächst

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \\
&\quad\leq c_6 \sum_{j=0}^{\infty} \min\{(j+1),\frac{1}{t}\}^{\alpha+\frac{5}{2}} \sum_{m=1}^{2} (j+1)^{\alpha-\frac{3}{2}+m} |\Delta^m g^*_{\frac{N}{M}}(\frac{j}{N})| \\
&\quad\leq c_6 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha}N^2}{(1+Nt)^{\alpha+\frac{5}{2}}} \leq c_6 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha}N^2}{(1+Nt)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+Nt)^2} \\
&\quad\leq c_6 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha}}{(1+Mt)^{\alpha+\frac{1}{2}}t^2} \leq c_6 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{\alpha+\frac{5}{2}}}
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{M}}^{\frac{\pi}{2}} |\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&\leq c_7 \int_{\frac{1}{M}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1} \frac{M^{2\alpha+2}}{(1+Mt)^{\alpha+\frac{5}{2}}} t^{2\alpha+1}\mathrm{d}t \leq c_7 \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\frac{5}{2}}} u^{2\alpha+1}\mathrm{d}u < c_7,
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

wobei die Endlichkeit des letzten Integrals unmittelbar aus der Voraussetzung $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ folgt.
Schließlich sei $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$. Mit den gleichen Argumenten, die zum Beweis von (5.57) geführt haben, beweist man auch noch die Ungleichung

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(1) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cos t)| \omega_{\alpha,\beta}(\cos t) \sin t \mathrm{d}t \leq c_7 \left(\frac{N}{M}\right)^{2\alpha+1}. \tag{5.61}$$

Aus (5.58), (5.60) und (5.61) folgt nun (5.53) auch für $-\frac{1}{2} < \max\{\alpha, \beta\} = \alpha < 0$.
Im Fall $\beta > \alpha$ beachtet man, dass wegen (2.29)

$$\sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(x) p_j^{(\alpha,\beta)}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\beta,\alpha)}(-x) p_j^{(\beta,\alpha)}(-y)$$

und somit

$$\| \sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\alpha,\beta)}(x) p_j^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\mu_{\alpha,\beta}}([-1,1])} = \| \sum_{j=0}^{\infty} g^*_{\frac{M}{N}}(\frac{j}{N}) p_j^{(\beta,\alpha)}(x) p_j^{(\beta,\alpha)}(\cdot) \|_{L^1_{\mu_{\beta,\alpha}}([-1,1])}$$

ist, woraus (5.53) auch für den Fall $\beta > \alpha$ folgt. Damit ist der Hauptsatz insgesamt bewiesen. ■

Kapitel 6

Die Schauder-Basis

Jetzt werden die Ergebnisse der letzten drei Kapitel zusammengeführt. Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Beschränktheit der Lebesgue-Konstanten für die allgemeinen Räume $W^{(N,M)}$ bzw. $V^{(N,M)}$ und ihrer Basisfunktionen $\psi_k^{(N,M)}$ bzw. $\varphi_k^{(N,M)}$ wird gezeigt, wie aus ihnen die Räume $V^{(j)}, W^{(j)}$ bzw. die Basisfunktionen $\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}$ so ausgewählt werden können, dass eine gradoptimierte polynomiale Schauder-Basis für $C[-1,1]$ entsteht, deren Elemente orthonormal zu einem gegebenen Jacobi-Gewicht $\mu_{\alpha,\beta}$ sind. Das zentrale Resultat der Arbeit wird formuliert im

Hauptsatz 6.1 *Es seien $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ mit $\max\{\alpha,\beta\} > -\frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$ und $\eta \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3}{2^\eta} \leq \varepsilon$, $\eta \geq 3$ und $2^\eta > \alpha + \beta + 1$. Es sei ferner g eine gerade charakteristische Funktion vom Grad $s > 2\max\{\alpha,\beta\} + 3$ und $\widetilde{g}$ die zu ihr korrespondierende charakteristische Funktion 1. Art (vgl. Definition 3.4, 1.,2.). Zu $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2^\eta$ wählt man eindeutig bestimmte Zahlen*

$$l \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \{1, ..., 2^{\eta-1}\} \quad \textit{und } k \in \{0, ..., 2^{l+1}-1\}, \tag{6.1}$$

so dass

$$n = (2^\eta + 2r - 2)2^l + 1 + k \tag{6.2}$$

ist, setzt

$$M := 2^l, \quad N := (2^\eta + 2r)2^l \quad \textit{und} \quad \theta_k := \frac{2k+1}{4M}\pi \tag{6.3}$$

und definiert schließlich die Polynomfolge $(p_{\alpha,\beta,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$\begin{aligned}
p_{\alpha,\beta,n} &:= p_n^{(\alpha,\beta)} \textit{ für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } n \leq 2^\eta, & (6.4)\\
p_{\alpha,\beta,n} &:= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} \widetilde{g}\left(\frac{j}{M}\right) \cos((3M+j)\theta_k) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)} \textit{ für } r = 1, & (6.5)\\
p_{\alpha,\beta,n} &:= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-2M}^{2M} g\left(\frac{j}{M}\right) \cos((3M+j)\theta_k) p_{N-M+j}^{(\alpha,\beta)} \textit{ für } r > 1. & (6.6)
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&1. \quad \int_{-1}^{1} p_{\alpha,\beta,j}(x)p_{\alpha,\beta,i}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x = \delta_{ij}, && (6.7)\\
&2. \quad \operatorname{grad} p_{\alpha,\beta,n} \le n(1+\varepsilon) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0, && (6.8)\\
&3. \quad \lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0 \quad \textit{für alle } f \in C[-1,1], && (6.9)\\
&4. \quad \|S_n\|_{C\to C} \le c\varepsilon^{-2\max\{\alpha,\beta\}-1}, && (6.10)
\end{aligned}$$

wobei $S_n f(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j(f)p_{\alpha,\beta,j}(x)$ *und* $c_j(f) := \int_{-1}^{1} p_{\alpha,\beta,j}(t)f(t)\omega_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t$ *gesetzt wird.*

Beweis: Unser Beweis ist eine detaillierte Ausarbeitung von [17, Kap. 4.4 und 4.5]. Beweis von (6.7): Mit einer einfachen Rechnung zeigt man, dass es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $l \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \le r \le 2^{\eta-1}$ gibt, so dass $j = l \cdot 2^{\eta-1} + r$ ist. Für $j = 0$ setzt man nun $n_0 := 2^\eta$ und $m_0 = 1$ und für $j \in \mathbb{N}$

$$n_j := (2^\eta + 2r)2^l \quad \text{und} \quad m_j := 2^l. \tag{6.11}$$

Jetzt definiert man für $j \in \mathbb{N}$ die Räume $V^{(j)}$ und $W^{(j)}$ gemäß den Definitionen 3.6 und 3.9 durch $V^{(j)} := V_{g_j}^{(n_j,m_j)} = V^{(n_j,m_j)}$ und $W^{(j)} := W_{g_j}^{(n_j,m_j)} := W^{(n_j,m_j)}$ und setzt speziell $V^{(0)} := \operatorname{span}\{p_k^{(\alpha,\beta)} : k = 0, ..., n_0\}$ für $j = 0$. Dabei sind die charakteristischen Funktionen g_j für $j \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$g_j := \begin{cases} g & \text{für } r > 1, \\ \tilde{g} & \text{für } r = 1, \end{cases} \tag{6.12}$$

wobei man für $V^{(0)}$, d.h. im Fall $j = 0$ formal g als erzeugende charakteristische Funktion setzt, obwohl dieser Raum wegen $V^{(0)} = \operatorname{span}\{p_k^{(\alpha,\beta)} : k = 0, ..., n_0\}$ unabhängig von ihr erzeugt wird. Jetzt zeigt man für alle $j \in \mathbb{N}$

$$V^{(j-1)} \oplus W^{(j)} = V^{(j)}. \tag{6.13}$$

Beweis zu (6.13): 1. Fall: Für $j = l \cdot 2^{\eta-1} + r$ mit $r > 2$ ist $g_j = g_{j-1} = g$ nach (6.12). Außerdem ist nach (6.11) $n_j = (2^\eta + 2r)2^l$, $n_{j-1} = (2^\eta + 2r - 2)2^l$, $m_j = m_{j-1} = 2^l$ und insbesondere $n_{j-1} = n_j - 2m_j$. Deshalb und weil g nach Voraussetzung gerade ist, folgt aus Lemma 3.12 mit $g_1 = g_2 = g$ nun die Behauptung.
2. Fall: Für $j = l \cdot 2^{\eta-1} + 2$ ist $j - 1 = l \cdot 2^{\eta-1} + 1$, nach (6.12) und (6.11) also auch $g_{j-1} = \tilde{g}$ und $g_j = g$ bzw. $n_j = (2^\eta + 2r)2^l$, $n_{j-1} = (2^\eta + 2r - 2)2^l$, $m_j = m_{j-1} = 2^l$ und insbesondere $n_{j-1} = n_j - 2m_j$. Nach Definition 3.4, 2. und weil g gerade ist, gilt $g(x) = g(-x) = \tilde{g}(-x)$ für alle $-2 < x < 0$, so dass sich (6.13) wieder aus Lemma 3.12 mit $g_2 := g$ und $g_1 := \tilde{g}$ ergibt.
3. Fall: Für $j \ge 2$ mit $j = l \cdot 2^{\eta-1} + 1$ ist $j - 1 = (l-1)2^{\eta-1} + 2^{\eta-1}$, nach (6.12) also $g_j = \tilde{g}$ und $g_{j-1} = g$ und nach (6.11) auch $n_j = (2^\eta + 2)2^l$, $n_{j-1} = 2^\eta \cdot 2^{l-1}$, $m_j = 2^l$, $m_{j-1} = 2^{l-1}$, also insbesondere $n_{j-1} = n_j - 2m_j$ und $m_j = 2m_{j-1}$. Nach Definition 3.4, 2. und weil g gerade ist, gilt somit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -\frac{3}{2}, \\ g(1 - 2(x+1)) & \text{für } -\frac{3}{2} \le x - \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } -\frac{1}{2} \le x \le 0, \end{cases} \tag{6.14}$$

weshalb sich die Behauptung wieder aus Lemma 3.12 mit $g_2 := \tilde{g}$ und $g_1 := g$ ergibt. Speziell für $j = 1$ ergibt sich unter Beachtung von (6.11) und (6.14) die Behauptung auch

hier aus Lemma 3.12 mit $g_2 := \tilde{g}$ und $g_1 := g$. Damit ist (6.13) insgesamt bewiesen.
Mit diesen Vorbereitungen kann nun die Orthonormalität der $p_{\alpha,\beta,n}$ gezeigt werden: Es seien $p_{\alpha,\beta,n_1}, p_{\alpha,\beta,n_2}$ zwei Polynome aus $(p_{\alpha,\beta,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Für $n_1, n_2 \leq 2^\eta$ folgt die Orthonormalität unmittelbar aus (6.4). Für $n_1, n_2 > 2^\eta$ wählt man die gemäß (6.1) und (6.2) eindeutig bestimmten Zahlen r_i, l_i, k_i $(i = 1, 2)$ mit $n_1 = (2^\eta + 2r_1 - 2)2^{l_1} + 1 + k_1$ und $n_2 = (2^\eta + 2r_2 - 2)2^{l_2} + 1 + k_2$ und setzt für $i = 1, 2$

$$j_i := l_i \cdot 2^{\eta-1} + r_i, \quad n_{j_i} = (2^\eta + 2r_i)2^{l_i} \quad \text{und} \quad m_{j_i} = 2^{l_i}. \tag{6.15}$$

Aus $n_1 = n_2$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung in (6.2) folgt mit einer einfachen Rechnung, dass $r_1 = r_2$, $l_1 = l_2$ und $k_1 = k_2$ ist und somit nach Lemma 3.7 insbesondere auch $\langle p_{\alpha,\beta,n_1}, p_{\alpha,\beta,n_2}\rangle = 1$ sein muss.
Aus $n_1 > n_2$ folgt offensichtlich, dass $j_1 \leq j_2$ sein muss. Im Fall $n_1 > n_2$ mit $n_1, n_2 > 2^\eta$ und $j_1 = j_2$ folgt aus einer einfachen Überlegung, dass $l_1 = l_2$, $r_1 = r_2$ und $k_1 > k_2$ sein muss, weshalb p_{α,β,n_1} und p_{α,β,n_2} nach Lemma 3.7 orhogonal zueinander sind.
Im Fall $n_1 > n_2$ mit $n_1, n_2 > 2^\eta$ und $j_1 > j_2$ beachtet man, dass gemäß Definition 3.9, (6.15), (6.5) und (6.6) $p_{n_i} \in W^{(j_i)} = W^{n_{j_i}, m_{j_i})}$ ist, weshalb sich die Orthogonalität der beiden Polynome aus der rekursiv anzuwendenden Identität (6.13) ergibt.
Im Fall $n_1 > 2^\eta \geq n_2$ mit $r_1 > 1$ oder $l_1 > 0$ folgt die Orthogonalität aus den Definitionen in (6.5) und (6.6), der Parsevalschen Gleichung und der Tatsache, dass wegen $\eta \geq 3$ auch

$$n_{j_1} - 3m_{j_1} + 1 \geq (2^\eta + 2r_1 - 3)2^{l_1} > 2^\eta$$

ist, wobei j_1, n_{j_1} und m_{j_1} gemäß (6.15) definiert sind.
Im Fall $n_1 > 2^\eta \geq n_2$ mit $r_1 = 1$ und $l_1 = 0$ ist $m_{j_1} = 2^{l_1} = 1$. Für $j = -2$ ist wegen supp $g \subseteq [-2, 2]$ insbesondere auch $\widetilde{g}(\frac{j}{m_{j_1}}) = 0$ in (6.5) und für $j = -1$ ist wegen $\cos((3_1 - 1)\theta_k) = \cos(\frac{2k+1}{2}\pi) = 0$ auch der Faktor vor $p^{(\alpha,\beta)}_{n_{j_1}-3m_{j_1}+1}$ gleich Null. Weil schließlich $n_{j_1} - m_{j_1} + j = 2^\eta + 2 - 1 + j > 2^\eta \geq n_2$ für $j = 0, 1, 2$ ist, folgt aus der Parsevalschen Gleichung insgesamt die Orthogonalität von p_{α,β,n_1} und p_{α,β,n_2}. Damit ist (6.7) bewiesen.
Beweis von (6.8): Für $n \leq 2^\eta$ ist die Behauptung wegen (6.4) unmittelbar klar. Für $n > 2^\eta$ seien l, r, k, N, M gemäß (6.2), (6.3) und (6.1) gewählt. Aus (6.5), (6.6) und weil grad $p_s^{(\alpha,\beta)} = s$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ ist, ergibt sich nun

$$\frac{\text{grad } p_{\alpha,\beta,n}}{n} \leq \frac{N+M}{n} \leq \frac{(2^\eta + 2r)2^l + 2^l}{(2^\eta + 2r - 2)2^l + 1 + k} \leq 1 + \frac{3}{2^\eta} \leq 1 + \varepsilon,$$

womit (6.8) bewiesen ist.
Beweis von (6.9): Es soll Lemma 3.2 angewendet werden. Nachweis der Bedingung 2.a) aus Lemma 3.2: Wegen $V^{(0)} = \text{span}\{p_k^{(\alpha,\beta)} : \ k = 0, ..., n_0\}$ und wegen grad $p_k^{(\alpha,\beta)} = k$ für alle $k = 0, ..., n_0$ istdie Bedingung 2.a) aus Lemma 3.2 für alle Polynome q mit grad $q \leq n_0$ erfüllt. Es sei nun q ein Polynom mit grad $q > 2^\eta$. Man setzt $n := \left\lfloor \frac{\text{grad } q}{1-\varepsilon} \right\rfloor + 2$. Dann gibt es gemäß (6.1) und (6.2) eindeutig bestimmte Zahlen $l \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{1, ..., 2^{\eta-1}\}$, so dass $(2^\eta + 2r - 2)2^l < n \leq (2^\eta + 2r)2^l$ und $n_{j-1} < n \leq n_j$ ist, wobei j, n_{j-1} und n_j durch k und l gemäß (6.15) gegeben sind. Mit Lemma 3.11 und (6.13) folgt nun

$$\{p \in \Pi : \ \text{grad } p \leq n_{j-1} - m_{j-1}\} \subseteq V^{(j-1)} \subseteq \text{span}\{p_{\alpha,\beta,0}, ..., p_{\alpha,\beta,n}\}, \tag{6.16}$$

wobei auch m_{j-1} und m_j für k und l gemäß (6.15) gegeben sind. Ferner erhält man im Fall $r > 1$ die Identität $n_{j-1} - m_{j-1} = (2^\eta + 2r - 3)2^l$ und im Fall $r = 1$ die Abschätzung

$n_{j-1} - m_{j-1} \geq (2^\eta + 2r - 3)2^l$, so dass

$$n_{j-1} - m_{j-1} \geq (2^\eta + 2r - 3)2^l \geq n\frac{2^\eta + 2r - 3}{2^\eta + 2r} \geq n\left(1 - \frac{3}{2^\eta}\right) \geq n(1-\varepsilon)$$

gilt. Daraus folgt zusammen mit (6.16), dass jedes Polynom p mit grad $p \leq n(1-\varepsilon)$ insbesondere also wegen $n(1-\varepsilon) \geq (\lfloor \frac{\text{grad } q}{1-\varepsilon} \rfloor + 2)(1-\varepsilon) \geq \text{grad } q$ auch das Polynom q dargestellt werden kann als

$$q = \sum_{j=0}^{n} \langle q, p_{\alpha,\beta,j} \rangle p_{\alpha,\beta,j}.$$

Damit ist die Bedingung 2.a) aus Lemma 3.2 nachgewiesen.
Nachweis der Bedingung 2.b) aus Lemma 3.2: Wir wollen die Äquivalenz aus Lemma 3.2, 3. ausnutzen. Im Folgenden setzen wir $L^1_{\alpha,\beta} = L^1_{\omega_{\alpha,\beta}}([-1,1])$. Aus Satz 2.33 mit

$$h_k := \begin{cases} 1 & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

und Satz 2.34 folgt für alle $n \leq n_0 = 2^\eta$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n} p_{\alpha,\beta,i}(x) p_{\alpha,\beta,i}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} = \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n} p_i^{(\alpha,\beta)}(x) p_i^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} \leq c\, 2^{\eta(\max\{\alpha,\beta\}+\frac{1}{2})}. \tag{6.17}$$

Es sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $n_{j-1} < n \leq n_j$, also mit $n = n_j + h + 1$ für ein $h = 0, ..., 2m_j - 1$. Nun teilt man die orthogonale Projektion $\mathcal{O}_n$ auf in die orthogonale Projektion auf die Räume $\text{span}\{p_0, \ldots, p_{n_{j-1}}\} = V^{(j-1)}$ und $\text{span}\{p_{n_{j-1}+1}, \ldots, p_n\} \subseteq W^{(j)}$ und erhält gemäß (3.4) für die Lebesgue-Konstante L_n

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n} p_i^{(\alpha,\beta)}(x) p_i^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} \\
&\leq \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=0}^{n_{j-1}} p_i^{(\alpha,\beta)}(x) p_i^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} + \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n} p_i^{(\alpha,\beta)}(x) p_i^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} \\
&= \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(x) \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} + \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{h} \psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(x) \psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} \\
&\leq \sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(x) \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}} + \sup_{x\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{2m_j-1} |\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(x)| \cdot \| \psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(\cdot) \|_{L^1_{\alpha,\beta}},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt für den linken Summanden Definition 3.9, Lemma 3.10, (6.13) und die Tatsache zu beachten ist, dass die Operatornorm einer orthogonalen Projektion des Raumes $V^{(j-1)}$ auf sich selbst nicht von der verwendeten orthonormalen Basis abhängt. Der rechte Summand im zweiten Schritt ergibt sich aus den Voraussetzungen an r, k, l, N, M sowie aus (6.5), (6.6), (6.11) und (3.14). Nach Voraussetzung an η und wegen (6.11) ist $n_j - 4m_j > 0$ und $\frac{n_j}{m_j} \leq 2^{\eta+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Außerdem ist g nach Voraussetzung gerade, so dass wegen Lemma 3.5, 3. auch $\widetilde{g}$ eine charakteristische Funktion vom Grad s ist, und mit g und $\widetilde{g}$ sind nach Lemma 3.5, 2. für $0 < a < 1$ auch g_a^* und $\widetilde{g}_a^*$ charakteristische Funktionen vom Grad s. Somit folgt aus Hauptsatz 5.8, Hauptsatz 5.10 und Lemma

5.1 im dritten Schritt für den linken Summanden

$$\sup_{x\in[-1,1]} \| \sum_{k=0}^{n_{j-1}} \varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(x)\varphi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j-1)}(\cdot)\|_{L^1_{\alpha,\beta}} \leq c2^{\eta(2\max\{\alpha,\beta\}+1)} \tag{6.18}$$

und aus Hauptsatz 4.21 für den rechten Summanden

$$\sup_{x\in[-1,1]} \sum_{k=0}^{2m_j-1} |\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(x)|\cdot\|\psi_k^{\mu_{\alpha,\beta},(j)}(\cdot)\|_{L^1_{\alpha,\beta}} \leq c2^{\eta(2\max\{\alpha,\beta\}+1)}. \tag{6.19}$$

Jetzt kann Lemma 3.2, 3. angewendet werden, womit auch die Bedingung 2.b) aus Lemma 3.2 und damit (6.9) insgesamt bewiesen ist.
Beweis von (6.10): Für $0 < \varepsilon \leq \min\{\frac{3}{2(\alpha+\beta+1)}, \frac{3}{8}\}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\eta \in \mathbb{N}$ mit $2^\eta \geq \max\{\alpha+\beta+1, 8\}$ und $\frac{3}{2^\eta} \leq \varepsilon \leq \frac{6}{2^\eta}$. Für dieses η gilt dann insbesondere $2^\eta \leq \frac{6}{\varepsilon}$, woraus sich zusammen mit (6.18), (6.19) und (6.17) die zu beweisende Behauptung (6.10) und damit der Hauptsatz insgesamt ergibt. ∎

Literaturverzeichnis

[1] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN (EDS.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 9th edition, 1970.

[2] G. E. ANDREWS, R. ASKEY AND R. ROY, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[3] R. ASKEY, *Orthogonal Polynomial and Special Functions*, SIAM, Philadelphia 1975.

[4] G. BROWN AND F. DAI, *Approximation of smooth funktions on compact two-point homogeneous spaces*, J. Approx. Theory **220** (2005), 401 - 423.

[5] P. L. BUTZER AND R. J. NESSEL, *Fourier Analysis and Approximation*, Birkhäuser, Basel 1971.

[6] S. CHANILLO AND B. MUCKENHOUPT, *Weak Type Estimates for Jacobi Polynomial Series*, Mem. Amer. Math. Soc. **102** (1993), No. 487.

[7] J. ELSTRODT, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg 1996.

[8] A. ERDÉLYI, *Transformation of hypergeometric integrals by means of fractional integration by parts*, Quart. J. Math. **9** (1939), 129 - 134.

[9] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER AND F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions, Vol. I* , McGraw-Hill, New York 1953.

[10] G. FABER, *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Jber. Deutsch. Math.-Verein., **23** (1914), 192 - 210.

[11] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg 1996.

[12] W. FISCHER UND I. LIEB, *Funktionentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 5. Aufl. 1988.

[13] O. FORSTER, *Analysis 3*, Vieweg, Braunschweig, 3. Aufl. 1984.

[14] P. FRANKLIN, *A set of continuous orthogonal functions*, Math. Annalen **100** (1928), 522 - 529.

[15] G. GASPER, *Formulas of the Dirichlet-Mehler-type*, Fractional calculus and its applications (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), 207 - 215. Lecture Notes in Math., Vol. 457, Springer, Berlin 1975.

[16] G. GASPER, *Positivity and the convolution structure for Jacobi series*, Ann. of Math. **93** (1971), 112 - 118.

[17] R. GIRGENSOHN, *Applications and generalizations of the Poisson summation Formula*, Habilitationsschrift, TU München 2002.

[18] R. GIRGENSOHN AND J. PRESTIN, *Lebesgue constants for an orthogonal polynomial Schauder basis*, J. Comp. Anal. Appl. **2** (2000), 159 - 176.

[19] A. HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funtkionensysteme*, Math. Annalen **69** (1910), 331 - 371.

[20] R. KHABIBOULLINE, *Polynomial Schauder bases with generalized Chebyshev orthogonality*, East J. Approx. **9** (2003), 443 - 458.

[21] B. S. KASHIN AND A. A. SAAKYAN, *Orthogonal Series*, Amer. Math. Soc., Translations of Mathematical Monographs, Vol.75, Providence 1989.

[22] T. KILGORE, J. PRESTIN AND K. SELIG, *Orthogonal algebraic polynomial Schauder bases of optimal degree*, J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996), 597 - 610.

[23] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 1*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 5. Auflage, 2000.

[24] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 2*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2000.

[25] T. KOORNWINDER, *Jacobi polynomials II. An analytic proof of the product formula*, SIAM J. Math. Anal. **5** (1974), 125 - 137.

[26] R. LASSER, *Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong 1996.

[27] G.G. LORENZ, M. VON GOLITSCHEK AND Y. MAKOVOZ, *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Springer, Berlin 1996.

[28] R.A. LORENTZ AND A.A. SAHAKIAN, *Orthogonal trigonometric Schauder bases of optimal degree for* $C[0, 2\pi]$, J. Fourier Anal. Appl. **1** (1994), 103 - 112.

[29] R. E. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1998

[30] H. N. MHASKAR, *Polynomial operators and local smoothness classes on the unit interval*, J. Approx. Theory **131** (2004), 243 - 267.

[31] H. N. MHASKAR, *Polynomial operators and local smoothness classes on the unit interval II*, Jaen J. Approx. **1** (2009), 1 - 25.

[32] D. OFFIN AND K. OSKOLKOV, *A note on orthonormal polynomial basis and wavelets*, Constr. Approx. **9** (1993), 319 - 325.

[33] F. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York 1974.

[34] B. OSILENKER, *Fourier Series in Orthogonal Polynomials*, World Scientific, Singapure 1999

[35] P. PETRUSHEV AND Y. XU, *Localized polynomial frames on the interval with Jacobi weights*, J. Fourier Anal. Appl. **11** (2005), 557 - 575.

[36] A. A. PRIVALOV, *On the growth of degrees of polynomial bases and approximation of trigonometric projectors*, Mat. Zametki **42** (1987), 207 - 214. English translation in Math. notes **48** (1990), 619 - 623.

[37] A. A. PRIVALOV, *Growth of degrees of polynomial bases*, Mat. Zametki **48** (1990), 69 - 78. English translation in Math. notes **48** (1990), 1017 - 1024.

[38] A. A. PRIVALOV, *On an orthogonal trigonometric basis*, Mat. Sb. **182** (1993), 384 - 394.; English transl. Math. USSR Sbornik **72** (1993), 363 - 372.

[39] H. RAU *Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen*, J. Reine Angew. Math. **161** (1929), 237 - 254.

[40] J. SCHAUDER *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z. **26** (1927), 47 - 65.

[41] M. SKOPINA, *Local convergence of Fourier series with respect to periodized Wavelets*, J. Approx. Theory **94** (1998), 191 - 202.

[42] M. SKOPINA, *Orthogonal polynomial Schauder bases for* $C[-1, 1]$ *of optimal degree*, Matem Sbornik. **192** (2001), 115 - 136.

[43] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Vol. 23, Providence, third edition, 1967.

[44] A.F. TIMAN, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Dover Publications, New York 1994.

[45] P. L. UL'YANOV, *On some solved and unsolved problems in the theory of orthogonal series*, In: Proceedings of the Fourth All Union Mathematics Congress, vol. 2. Publ. AN SSSR. Moscow: Academy of Sciences USSR, 1964, 694 - 704 (in Russian).

[46] P. L. UL'YANOV, *On some results and problems from the theory of bases*, In: Investigations on linear operators and function theory, Zap. naucn. semin. LOMI 170, Nauka, Leningrad, 1989, 274 - 284 (in Russian).

[47] P. L. UL'YANOV *Metric theory of functions*, Proc. Steklov Inst. Meth. **182** (1988), 180 - 223; Engl. Übers. ibid. **182** (1990), 199 - 244.

[48] E. T. WHITTACKER AND G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, New York, 4th. Edition, 1948.

[49] K. WOŹNIAKOWSKI, *Orthonormal polynomial basis in* $C(\Pi)$ *with optimal growth of degrees*, unpublisched 1991.

[50] X. X. BAI AND Y. Q. ZHAO, *A uniform asymptotic expansion for Jacobi polynomials via uniform treatment of Darboux´s method*, J. Approx. Theory **148** (2007), 1 - 11.