



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUT FÜR MEDIZINTECHNIK

Aus dem Institut für Medizintechnik  
der Universität zu Lübeck

Direktor: Prof. Dr. rer. nat. Thorsten M. Buzug

# Die Reduktion von Metallartefakten in der Computertomographie durch einen Optimierungsalgorithmus mit Nebenbedingungen

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

(Dr. rer. nat.)

der Universität zu Lübeck

Aus der Sektion Informatik / Technik

vorgelegt von

Maik Stille

aus Greifswald

Lübeck, 5. März 2019



Vorsitzender:

1. Berichterstatter:

2. Berichterstatter:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Lübeck,



*“Are you such a dreamer?  
To put the world to rights?  
I’ll stay home forever  
Where two and two always makes up five.”*

Radiohead - 2+2=5 (The Lukewarm)



# Kurzfassung

Die Computertomographie ermöglicht es, unter Verwendung von Röntgenstrahlung überlagerungsfreie Schnittbilder vom Inneren des Menschen zu erstellen. Das Vorhandensein von Objekten mit einer hohen Dichte, wie zum Beispiel Metallimplantaten oder chirurgischen Instrumenten, kann jedoch die Bildqualität negativ beeinflussen und Bildartefakte erzeugen. Die zumeist sehr stark ausgeprägten Artefakte manifestieren sich in der Regel als dunkle und helle Streifen, welche sich über das gesamte Bild ausbreiten können. Der Grund dafür sind Inkonsistenzen in den Rohdaten, welche von Röntgenstrahlen verursacht werden, die durch Metall verlaufen. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Korrektur dieser Artefakte.

Im Detail wird ein Rekonstruktionsalgorithmus hergeleitet, welcher in der Lage ist, Vorwissen über ein vorhandenes Metallobjekt zu berücksichtigen. Der Algorithmus basiert auf einem Augmented-Lagrangian-Optimierungsansatz zur Minimierung der negativen Log-Likelihood-Funktion für Transmissionstomographie und kann Vorwissen in Form von Nebenbedingungen integrieren. Als mögliches Vorwissen werden die Abschwächungskoeffizienten und die Form des Metallobjektes betrachtet. Zur weiteren Reduzierung von Artefakten werden künstliche Projektionsdaten basierend auf Zwischenergebnissen der Optimierung berechnet. Röntgenstrahlen, welche durch das Metallobjekt verlaufen, werden in jedem Optimierungsschritt durch neu berechnete Werte ersetzt. Um temporär vorhandene Artefakte zu unterdrücken, werden Zwischenergebnisse mit Hilfe eines bilateralen Filters aufbereitet. Der Ansatz kann mit und ohne vorhandenem Vorwissen verwendet werden.

Ergänzend zum Rekonstruktionsalgorithmus wird ein neuartiger Regularisierungsterm vorgestellt. Die Methode dient der Integration eines gegebenen Prior-Images und

verwendet einen nicht-lokalen Berechnungsansatz. Strukturelle Ähnlichkeiten des gegebenen Bildes und des aktuellen Zwischenergebnisses werden dabei genutzt, um die Rekonstruktion zu regularisieren und potenziell entstehende Artefakte zu reduzieren. Einen Vergleich von Bildausschnitten in einem gegebenen Suchfenster führt dabei auf eine vom jeweiligen Pixelwert abhängende Gewichtung, die den Erhalt von korrekten anatomischen Strukturen im zu rekonstruierenden Bild sicherstellt.

Eine detaillierte Evaluierung wurde unter Zuhilfenahme von Softwarephantomen, Hardwarephantomen und klinischen Patientendaten durchgeführt. Für eine Auswertung der klinischen Bilddaten bezüglich der Bildqualität und der Korrekturfähigkeit des vorgestellten Algorithmus wurde das Expertenwissen von Radiologen herangezogen. Die Ergebnisse zeigen, dass der Algorithmus im Vergleich zu Ansätzen wie lineare Interpolation oder Normalized Metal Artefact Reduction die beste Bildqualität bereitstellt und in der Lage ist, die meisten Artefakte zu unterdrücken. Diese Ergebnisse konnten durch eine Analyse zur korrekten Wiederherstellung von Abschwächungskoeffizienten bestätigt werden. Des Weiteren konnte eine Auswertung des nicht-lokalen Regularisierungsterms zeigen, dass durch die Methode Artefakte im Bild deutlich reduziert werden, ohne dass dabei Strukturen aus einem gegebenen Prior übernommen werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Aufbau der Arbeit . . . . .	3
1.2	Original-Beiträge . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Röntgenstrahlung . . . . .	8
2.1.1	Entstehung von Röntgenstrahlung . . . . .	10
2.1.2	Wechselwirkung mit Materie . . . . .	11
2.1.3	Lambert-Beer'sches Gesetz . . . . .	13
2.1.4	Detektion von Röntgenstrahlen . . . . .	16
2.2	Grundlagen der Computertomographie . . . . .	17
2.2.1	Geometriebeschreibung . . . . .	23
2.2.2	Radontransformation . . . . .	26
2.2.3	Fourier-Slice-Theorem . . . . .	28
2.2.4	Direkte Fourier-Rekonstruktion . . . . .	30
2.2.5	Gefilterte Rückprojektion . . . . .	32
2.3	Artefakte in der Computertomographie . . . . .	35
2.3.1	Rauschen . . . . .	36
2.3.2	Streuung . . . . .	36
2.3.3	Strahlaufhärtung . . . . .	37
2.3.4	Nicht-linearer Partialvolumeneffekt . . . . .	39
2.3.5	Bewegungsartefakte . . . . .	40
2.3.6	Aliasing . . . . .	41
2.3.7	Metallartefakte . . . . .	42

## INHALTSVERZEICHNIS

2.3.8	Unvollständige Daten . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Mathematische und numerische Methoden</b>	<b>47</b>
3.1	Inverse Probleme . . . . .	48
3.2	Optimierung . . . . .	51
3.2.1	Suchrichtungen für Abstiegsverfahren . . . . .	57
3.2.2	Schrittweitenbestimmung . . . . .	61
3.2.3	Abbruchbedingungen . . . . .	64
3.2.4	Das BFGS-Verfahren . . . . .	65
3.2.5	Das Augmented-Lagrangian-Verfahren . . . . .	68
3.3	Iterative Rekonstruktionsverfahren . . . . .	73
3.3.1	Kleinste-Quadrate-Lösung und Singulärwertzerlegung . . . . .	74
3.3.2	Rekonstruktion mit Hilfe des negativen Gradienten . . . . .	77
3.3.3	Statistische Modellierung der Rekonstruktion . . . . .	78
3.3.4	Regularisierung . . . . .	85
3.4	Diskrete Projektionen . . . . .	86
3.5	Grundlagen der Bildregistrierung . . . . .	89
3.5.1	Transformationen zur Bildregistrierung . . . . .	92
3.5.2	Distanzmaße für die Bildregistrierung . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Die Augmented Likelihood Image Reconstruction</b>	<b>99</b>
4.1	Die Zielfunktion . . . . .	101
4.1.1	Gegebene Parameter . . . . .	101
4.1.2	Identifizierung der Metallprojektionen . . . . .	102
4.1.3	Formulierung der Zielfunktion ohne Metallprojektionen . . . . .	108
4.1.4	Konvexitätseigenschaften . . . . .	108
4.1.5	Entstehender Informationsverlust durch das Implantat . . . . .	109
4.2	Die Nebenbedingungen . . . . .	111
4.3	Berechnung von fehlenden Projektionsdaten . . . . .	113
4.3.1	Lineare Interpolation . . . . .	113
4.3.2	Vorwärtsprojektion von Zwischenergebnissen . . . . .	115
4.3.3	Filterung von Zwischenergebnissen . . . . .	118

4.4	Der komplette Algorithmus . . . . .	127
4.5	Regularisierung durch bildbasiertes Vorwissen . . . . .	133
4.6	Kombinierte Registrierung und Rekonstruktion . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Durchgeführte Studien und Ergebnisse</b>	<b>145</b>
5.1	Metallartefaktkorrektur . . . . .	146
5.1.1	Evaluierung unter Verwendung eines Softwarephantoms . . .	147
5.1.2	Evaluierung unter Verwendung eines Hardwarephantoms . . .	153
5.1.3	Evaluierung mit Hilfe von klinischen Anwendungsfällen . . . .	162
5.2	Rekonstruktion korrekter Abschwächungskoeffizienten . . . . .	173
5.3	Nicht-lokale Regularisierung . . . . .	185
<b>6</b>	<b>Diskussion und Schlussfolgerung</b>	<b>193</b>
6.1	Abgrenzung zu bereits bekannten Verfahren . . . . .	193
6.2	Einschränkung durch gefordertes Vorwissen . . . . .	195
6.3	Variabilität und Komplexität durch Parameter . . . . .	196
6.4	Initiale Neuberechnung von Metallprojektionen . . . . .	200
6.5	Anwendung der nicht-lokalen Regularisierung für klinische Daten . .	202
6.6	Konvergenzgeschwindigkeit und Ausführungszeit . . . . .	203
6.7	Weiterentwicklung der Ideen für die dreidimensionale Rekonstruktion	204
6.8	Anwendung der entwickelten Methodik auf andere Problemstellungen	205
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>207</b>
	<b>Referenzen</b>	<b>211</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Röntgenstrahlung hat sich mehr als 120 Jahre nach ihrer Entdeckung in den verschiedensten Anwendungsbereichen etabliert. Sie bereichert die Wissenschaft in Feldern der Archäologie, Geologie, Biologie und sogar der Kunstwissenschaften in Form von Gemäldeuntersuchungen. In der Industrie wird die Strahlung bei der Materialprüfung eingesetzt und auch die Inspektion von Gepäckstücken an Flughäfen bedient sich der Röntgentechnik. Den jedoch größten Einfluss hatte die Entdeckung auf die Medizin. Ohne Zweifel hat die Einführung der Röntgendiagnostik den klinischen Alltag revolutioniert. Die Vorstellung der Computertomographie (CT) im Jahre 1972 gilt als eine der bedeutendsten Entwicklungen im Bereich der medizinischen Bildgebung. Sie ermöglicht einen überlagerungsfreien Blick in das Innere des Menschen, ohne dabei invasiv zu sein. Trotz der dabei entstehenden Strahlenbelastung für den Patienten, stellt sie eine der wichtigsten Errungenschaften für die medizinische Diagnostik dar. Mittlerweile ist es möglich, mit Hilfe der Computertomographie Schnittbilder mit einer Dicke von nur 0,25 mm und einer Auflösung von 0,14 mm pro Pixel zu erstellen [1].

Ungeachtet dieser bemerkenswerten Entwicklung gibt es immer noch diverse Aspekte, welche es zu verbessern gilt. Aktuelle Forschungsbestrebungen befassen sich beispielsweise mit einer Minimierung der Strahlenbelastung für die Patienten, einer verbesserten Rauschunterdrückung und, wie diese Untersuchung, der Reduktion von verschiedensten Bildartefakten. Einige der schwerwiegendsten Artefakte können von

## KAPITEL 1. EINLEITUNG

Metallobjekten im Messfeld des Computertomographen hervorgerufen werden. Aufgrund der hohen Dichte des Materials werden Effekte wie beispielsweise Rauschen oder Strahlaufhärtung bei der Bildgebung verstärkt. Die entstehenden Metallartefakte zeichnen sich zumeist durch helle und dunkle Streifen aus, die das gesamte Bild überlagern können. Im Bereich der klinischen CT können die Artefakte den diagnostischen Wert der Bilder stark reduzieren. So können für die Strahlentherapie beispielsweise erhebliche Probleme durch Totalendoprothesen im Bereich der Hüfte entstehen. Diese bestehen überwiegend aus sehr harten Materialien mit hoher Dichte und besitzen in der Regel eine Titanlegierung. Für den Fall der Behandlung eines Prostatakarzinoms können die durch das Implantat verursachten Artefakte große Bereiche des zu bestrahlenden Zielgebietes beeinträchtigen. Dies erschwert einerseits die Segmentierung des zu bestrahlenden Organs. Andererseits können spezielle Programme, welche basierend auf Elektronendichten Strahlentherapiepläne berechnen, keine korrekten Dosisverteilungen ermitteln, da die Schwächungswerte durch die Artefakte nicht korrekt abgebildet sind. Die Folge ist eine unpräzise Therapieplanung und eine verschlechterte Chance auf Heilung.

Da Titan den großen Vorteil hat, dass es im menschlichen Körper keine Reaktion eingeht und damit in den Knochen einwachsen kann, scheint sich an der oben beschriebenen Situation in naher Zukunft wenig zu ändern. Seit mehr als drei Jahrzehnten wird versucht, auf Seiten der Bildrekonstruktion diese Problematik zu beheben. Wie die vorliegende Arbeit zeigt, verursachen die abgeschwächten Röntgenstrahlen (oder auch Projektionen), welche durch das Metallobjekt verlaufen, Inkonsistenzen in den Rohdaten und sind daher verantwortlich für die entstehenden Artefakte. In den meisten Korrekturansätzen werden diese Projektionen aus diesem Grund in der Rekonstruktion verworfen. Um den Informationsverlust jedoch wieder auszugleichen, müssen die verworfenen Projektionen auf irgendeine Weise neu berechnet werden. Hierbei werden zumeist verschiedenste Interpolationsverfahren verwendet. Was ist aber, wenn bereits bekannt ist, dass ein bestimmtes Metallobjekt sich im Inneren des Patienten befindet? Können Informationen über das Implantat genutzt werden, um potenzielle Fehler bei der Rekonstruktion zu vermeiden? Können Artefakte im Bild reduziert werden, indem zusätzliche Informationen in einem Rekonstruktionsalgorithmus berücksichtigt werden? Die vorliegende Arbeit soll einen Teil zur Beantwortung dieser Fragen beitragen.

Dabei wird im Folgenden nicht nur betrachtet, wie Informationen über ein Metallobjekt zur korrekten Rekonstruktion eines Bildes beitragen können, sondern die beschriebene Grundmotivation führt vielmehr zu einem Algorithmus, der es erlaubt, verschiedene Nebenbedingungen während der Rekonstruktion zu berücksichtigen. Der Rekonstruktionsansatz basiert dabei auf einer Optimierungstrategie, welche ausgenutzt wird, um in jeder Iteration der Optimierung neue Projektionswerte zu berechnen. Erweitert wird die Rekonstruktion durch eine Regularisierung, welche es ermöglicht, weiteres Vorwissen in Form eines gegebenen Bildes zu integrieren.

### 1.1 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist insgesamt in sieben Kapitel unterteilt. Es gibt zwei Einführungskapitel, welche einen Ausgangspunkt schaffen und für die genaue Betrachtung des entwickelten Algorithmus dienlich sind. In **Kapitel 2** werden zunächst Grundlagen zur Bildgebung mit Hilfe der Computertomographie vermittelt. Hierzu gehören physikalische Grundlagen bezüglich der Röntgenstrahlung und die mathematische Beschreibung eines computertomographischen Systems.

Mathematische und numerische Methoden, welche in den entwickelten Algorithmen eine zentrale Rolle einnehmen, werden anschließend in **Kapitel 3** beschrieben. Hierzu wird zunächst eine Einführung in das Themengebiet der inversen Probleme gegeben, ehe auf das Gebiet der Optimierung eingegangen wird. In diesem Abschnitt werden insbesondere zwei Optimierungsalgorithmen vorgestellt, welche maßgeblich für die Herleitung der entwickelten Methoden sind. Im Falle des BFGS-Verfahrens, ein Optimierungsalgorithmus, welcher nach den Erfindern **Broyde**, **Fletcher**, **Goldfarb** und **Shanno** benannt ist, nimmt der Algorithmus eine wesentliche Rolle im Rekonstruktionprozess ein. Der ebenfalls hier vorgestellte Augmented-Lagrangian-Algorithmus wird hingegen für die Herleitung einer neuen Methodik zur Reduktion von Metallartefakten adaptiert und auf die gegebene Problemstellung angepasst. Aufbauend auf den Erläuterungen von Begrifflichkeiten und Ansätzen werden anschließend iterative Rekonstruktionsverfahren diskutiert. Hierbei werden bereits bekannte Ansätze hergeleitet und durch die zuvor gewonnenen Erkenntnisse umformuliert.

## KAPITEL 1. EINLEITUNG

Zum Abschluss des Kapitels werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten diskreten Projektionen vorgestellt und es wird eine Einführung in die Grundlagen der Bildregistrierung gegeben.

Der zentrale Beitrag dieser Arbeit, die Augmented Likelihood Image Reconstruction, wird in **Kapitel 4** beschrieben. Dabei wird für die Rekonstruktion eines Bildes zunächst eine geeignete Zielfunktion formuliert. Anschließend wird die Zielfunktion, welche im Optimierungsprozess minimiert wird, um sinnvolle und hilfreiche Nebenbedingungen erweitert. Nachdem das mathematische Grundgerüst für die Rekonstruktion spezifiziert ist, wird auf die künstliche Berechnung von Projektionswerten eingegangen. Hierfür wird die Filterung von Zwischenergebnissen der Rekonstruktion beschrieben und Projektionen, welche durch das Metallobjekt verlaufen, werden bestimmt. Anschließend wird der komplette Algorithmus zusammengefasst. Der zweite wesentliche Bestandteil dieses Kapitels besteht in der Beschreibung einer neuartigen Regularisierung zur Integration von Vorwissen in Form von zusätzlichen Bildinformationen. Ein zuvor gegebenes Bild wird dabei verwendet, um einen nicht-lokalen Strafterm zu berechnen, welcher abhängig von den zu rekonstruierenden Strukturen ist.

Die durchgeführten Studien und Evaluierungen der vorgestellten Methodiken werden in **Kapitel 5** vorgestellt. Das Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt und befasst sich mit der Eignung der entwickelten Augmented Likelihood Image Reconstruction zur Reduktion von Metallartefakten, der Rekonstruktion von korrekten Abschwächungskoeffizienten und dem Einfluss der nicht-lokalen Regularisierung. Für die Evaluierungen der Metallartefaktkorrektur wird die Expertenmeinung von Radiologen des Universitätsklinikums Schleswig-Holstein herangezogen. Diese sind aufgrund ihrer Erfahrung in der Lage, die Qualität der Artefaktkorrektur valide zu bewerten. Ergänzend dazu wird eine detaillierte Untersuchung bezüglich der Wiederherstellung von korrekten Abschwächungskoeffizienten durchgeführt. Hierbei wird ein klinisches Kalibrierungsphantom verwendet, welches Einsätze mit verschiedenen gewebeäquivalenten Elektronendichten besitzt. Das Phantom wurde mit Metallstäben versehen und die Abschwächungskoeffizienten der verschiedenen Einsätze wurden vor und nach Artefaktkorrektur mit den Referenzwerten verglichen. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Evaluierung des nicht-lokalen Regularisierungsterms. Hierzu wird ein Softwarephantom betrachtet, welches eine bis auf den Pixel genaue Auswertung erlaubt. Dies hat insbesondere Bedeutung bei der Frage, ob fälschlicherweise anatomische Strukturen

aus einem zuvor gegebenen Prior rekonstruiert wurden, welche nicht dem aktuellen Patienten entsprechen.

In **Kapitel 6** werden verschiedene Diskussionspunkte erläutert, welche bei der Entstehung der Arbeit aufgetreten sind. Hierzu gehört zum einen die Darlegung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zu bereits bekannten Verfahren. Zum anderen werden Erkenntnisse diskutiert, welche durch die Evaluierung gewonnen wurden. Dies beinhaltet 1) eine Erläuterung zu den Einflüssen der einzelnen Parameter im ALIR-Algorithmus, 2) eine Auseinandersetzung mit der Einschränkung, welche durch gefordertes Vorwissen entsteht, und 3) eine kritische Betrachtung der initialen Neuberechnung von Projektionen, welche durch Metall verlaufen. Des Weiteren werden potenzielle Verbesserungen und Erweiterungen betrachtet. Dabei wird auf notwendige Maßnahmen eingegangen, welche vollzogen werden müssen, um die vorgestellte nicht-lokale Regularisierung auf klinische Daten anzuwenden. Darüber hinaus wird betrachtet, wie eine Weiterentwicklung der vorgestellten Algorithmen für die dreidimensionale Rekonstruktion erfolgen kann. Weitere Diskussionspunkte sind das Konvergenzverhalten der Rekonstruktion und die Anwendung des entwickelten Algorithmus auf andere Problemstellungen.

Den Abschluss der Arbeit bildet das **Kapitel 7**, in welchem die vorgestellten Methoden und gewonnenen Erkenntnisse rekapituliert werden.

## 1.2 Original-Beiträge

Die Inhalte der vorliegenden Arbeit wurden bereits im Rahmen von verschiedenen Veröffentlichungen publiziert. Der entwickelte Rekonstruktionsalgorithmus Augmented Likelihood Image Reconstruction, welcher in Kapitel 4 vorgestellt wird, wurde in der Zeitschrift IEEE Transactions on Medical Imaging veröffentlicht [E1]. Der publizierte Beitrag beinhaltet neben der Beschreibung des Algorithmus Auszüge aus den in den Abschnitten 5.1.1, 5.1.2 und 5.1.3 vorgestellten Evaluierungen. Darüber hinaus ist das Verfahren zur Reduktion von Artefakten seit 2015 in dem Patent [E2] festgehalten. Die Evaluierung bezüglich der korrekten Wiederherstellung von Abschwächungskoeff-

## KAPITEL 1. EINLEITUNG

fizienten ist in den Arbeiten [E3]<sup>1</sup> und [E4] veröffentlicht. Der Einfluss der Metallartefaktkorrektur auf die Berechnung von Therapieplänen in der Strahlentherapie wurde in der Arbeit [E5]<sup>1</sup> untersucht. Ausarbeitungen zu der in Abschnitt 5.3 vorgestellten nicht-lokalen Regularisierung wurden in den Arbeiten [E6] und [E7] veröffentlicht. Diese Veröffentlichungen beinhalteten zusätzlich zu der Beschreibung des Verfahrens auch Ausschnitte der in Abschnitt 5.3 gegebenen Evaluierung. Der Einfluss der Segmentierung eines Metallobjektes auf die Korrektur von Metallartefakten wurde in der Arbeit [E8] untersucht. Erfahrungen im Bereich der Bildregistrierung konnten durch die Arbeiten [E9] und [E10] gewonnen werden. Die hierdurch gewonnenen Kenntnisse tragen zu den Methodiken bei, welche in den Abschnitten 3.5, 4.5, 4.1.2 und 4.6 vorgestellt sind. Des Weiteren wurde an einer Datenbank für klinische Bilddaten mit Metallartefakten mitgearbeitet [E11] und die Rauschunterdrückung bei niedrig dosierter Röntgenstrahlung mit Hilfe von neuronalen Faltungsnetzwerken erforscht [E12].<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Die Arbeit wurde unter einer geteilten Erstautorenschaft publiziert.

## Kapitel 2

# Grundlagen

Im Jahre 1967 vertrieb die Firma EMI (engl. Electric and Musical Industries) mit dem Album *Sgt. Pepper's Lonely Hearts Club Band* von den Beatles nicht nur eines der besten und erfolgreichsten Musikalben aller Zeiten, sondern finanzierte zur gleichen Zeit auch die Entwicklung des ersten Computertomographen. Der damals in den Forschungslaboren von EMI arbeitende Wissenschaftler Godfrey N. Hounsfield begann im selben Jahr zusammen mit Stephen Bates, zuständig für die Programmierung, Peter Langstone, zuständig für die Elektronik, und Mel King, zuständig für die Mechanik, mit der Entwicklung eines neuen bildgebenden Verfahrens. Wie sich später herausstellte, sollte dieses auf Röntgenstrahlung basierende Verfahren ein neues Zeitalter in der medizinischen Bildgebung begründen. Ein Großteil der theoretischen Grundlagen dafür wurden schon im Jahre 1917 von Johann Radon veröffentlicht [2]. Allan M. Cormack, ein amerikanisch-südafrikanischer Wissenschaftler, legte im Jahre 1963 mit seiner Arbeit zur Repräsentation von Funktionen durch ihre Linienintegrale jedoch den Grundstein für die axiale Tomographie [3]. Es sollte dann noch bis zum Jahre 1971 dauern, bis die erste klinische Studie des Kopfscanners MARK I von EMI am Atkinson Morley Hospital, London, durchgeführt werden konnte, welche auf Anhieb einen Gehirntumor bei einer weiblichen Patientin nachweisen konnte [4]. Dem großen Erfolg der Computertomographie im klinischen Alltag folgend erhielten sowohl Cormack als auch Hounsfield im Jahre 1979 für ihre Arbeiten gemeinsam den Nobelpreis für Medizin.

Im Folgenden soll ein Überblick über die Grundlagen der Computertomographie gegeben werden. Zusätzlich werden verschiedene Effekte diskutiert, welche einen negativen Einfluss auf die Qualität von CT-Bildern haben können. Da die Reduktion von Metallartefakten ein Schwerpunkt dieser Arbeit darstellt, wird anschließend ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung auf diesem Gebiet gegeben. Mathematische und numerische Methoden zur Rekonstruktion von Bildern in der Computertomographie werden in Kapitel 3 vorgestellt.

### 2.1 Röntgenstrahlung

Wilhelm Conrad Röntgen wies 1895 eine neue Art von Strahlung nach, welche später im deutschsprachigen Raum nach ihm benannt wurde und für deren Entdeckung er im Jahr 1901 den ersten Nobelpreis im Bereich der Physik erhielt. Röntgenstrahlung bezeichnet elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge, die unter dem sichtbaren Spektrum liegt. Die elektromagnetische Strahlung besitzt die Charakteristik von Wellen, besteht jedoch aus Photonen, welche eine Energie  $E$  besitzen, die inversproportional zu ihrer Wellenlänge  $\lambda$  ist. Mit Hilfe des Planck'schen Wirkungsquantums  $h = 6,626\,070 \cdot 10^{-34}$  J s und der Lichtgeschwindigkeit  $c = 299\,792\,458$  m s<sup>-1</sup> kann die Energie ausgedrückt werden durch

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf, \quad (2.1)$$

wo  $f = \frac{c}{\lambda}$  die Frequenz der Welle angibt. Angeben wird  $E$  in Elektronenvolt (eV), wobei in der medizinischen Computertomographie Energien im Bereich von 30 keV bis 140 keV genutzt werden. Im Vergleich dazu liegt die Photonenenergie beim sichtbaren Licht etwa zwischen 1,5 eV und 3,0 eV. Abbildung 2.1 zeigt schematisch, wie sich das Intervall der Röntgenstrahlung im Vergleich zu den Intervallen anderer Strahlungsformen im Spektrum der elektromagnetischen Wellen positioniert [5], [6].

## 2.1. RÖNTGENSTRAHLUNG

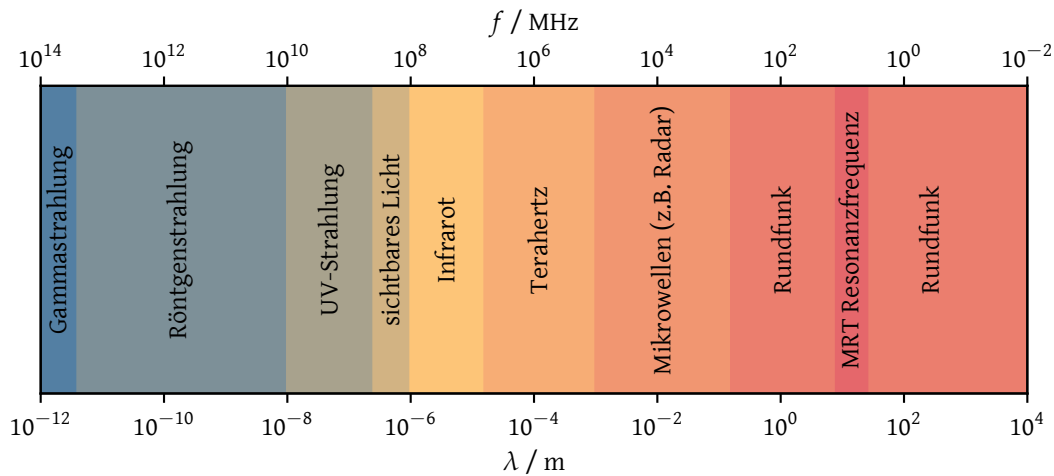


Abbildung 2.1: Das Spektrum der Röntgenstrahlung im Vergleich zum sichtbaren Licht, Infrarotstrahlung, Mikrowellen und der Resonanzfrequenz bei MRT. Die Darstellung entspricht einer Annäherung, da die Grenzen der einzelnen Bereiche nicht streng festgelegt sind. Einzelne Bereiche der Regionen überlappen in der Realität. Das sichtbare Licht hat eine Wellenlänge  $\lambda$  von ca. 380 nm bis 780 nm, wohingegen die Röntgenstrahlung in der klinischen Diagnostik eine Wellenlänge von ca.  $10 \cdot 10^{-11}$  m bis  $1,5 \cdot 10^{-8}$  m aufweist.

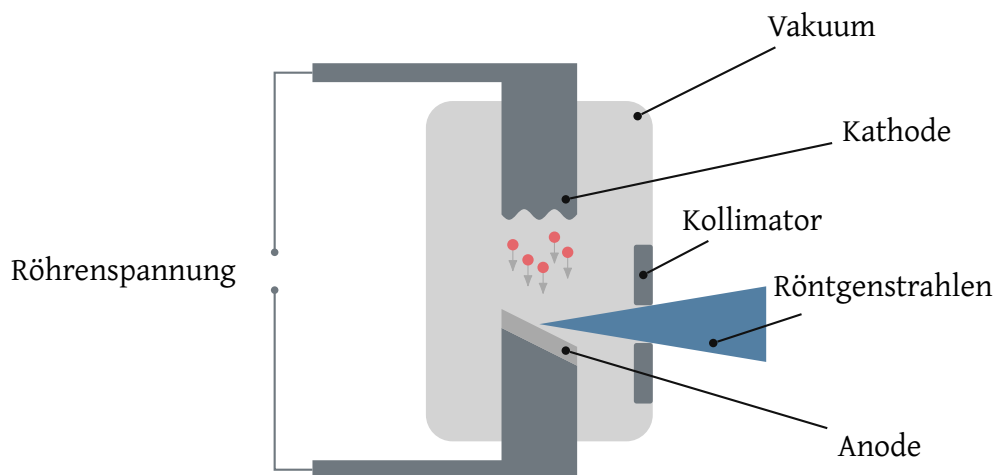


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung einer Röntgenröhre. Die angelegte Röhrenspannung sorgt dafür, dass freigesetzte Elektronen, dargestellt durch rote Punkte, in Richtung Anode beschleunigen.

### 2.1.1 Entstehung von Röntgenstrahlung

In Abbildung 2.2 ist eine schematische Darstellung einer Röntgenröhre gezeigt, welche zur Generierung von Röntgenstrahlung genutzt wird. Sie besteht aus einer Vakuumröhre, in welcher sich eine Kathode und eine Anode befindet. Aufgrund des hohen Schmelzpunktes von  $3422\text{ }^{\circ}\text{C}$  und damit dem höchsten aller chemischen Elemente, wird sowohl für das Kathoden- als auch das Anodenmaterial zumeist Wolfram benutzt. An der Kathode wird durch den Kathodenstrom eine thermische Anregung ausgelöst, welche eine Emittierung von Elektronen auslöst. Die angelegte Röhrenspannung, welche im medizinischen Kontext typischerweise zwischen  $80\text{ kV}$  und  $140\text{ kV}$  liegt, sorgt dafür, dass die freigesetzten Elektronen in Richtung der Anode beschleunigen. Die auf der Anodenoberfläche auftreffenden Elektronen können durch zwei unterschiedliche Effekte Röntgenstrahlung erzeugen. Elektronen, die eine Wechselwirkung mit dem Anodenmaterial eingehen und dabei abgebremst und abgelenkt werden, erzeugen **Bremsstrahlung**, die aus einem kontinuierlichen Röntgenspektrum besteht (siehe hierzu Abbildung 2.3). Die Energie eines emittierenden Photons ist dabei abhängig vom Energieverlust des abgebremsten Elektrons.

Kollidiert ein Elektron mit einem Elektron in der inneren Hülle (z.B. K-Hülle) und stößt dabei dieses aus seiner Position, so entsteht eine Lücke, welche von einem Elektron mit einer höheren Energie aus einer äußeren Hülle (z.B. L-Hülle) gefüllt werden kann. Dabei wird ein Photon mit einer spezifischen Energie emittiert, die sich aus

$$E = E_A - E_I \quad (2.2)$$

ergibt, wobei  $E_A$  die Energie des Elektrons aus einer äußeren Hülle und  $E_I$  die Energie des Elektrons aus einer inneren Hülle ist [5], [7]. Die entstehende Strahlung wird **charakteristische Röntgenstrahlung** genannt und überlagert die Bremsstrahlung in Form von charakteristischen Peaks im Spektrum. Abbildung 2.3 zeigt eine schematische Darstellung der beiden Prozesse. Die auf der Anode auftreffenden Elektronen erzeugen nur ungefähr 1 % Brems- und charakteristische Röntgenstrahlung. Die restlichen 99 % sind für die Erzeugung von Wärme verantwortlich, welche bei der Kollision mit einem Elektron in einer äußeren Hülle entsteht [8].

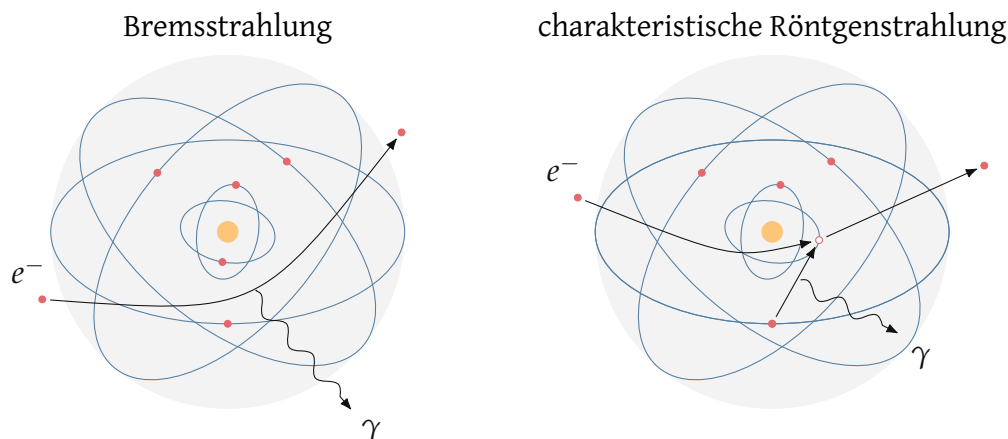


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung zur Entstehung von Bremsstrahlung und charakteristischer Röntgenstrahlung.

Abbildung 2.4 zeigt ein Spektrum für eine Wolfram-Röntgenröhre. Die dargestellten Werte basieren auf Daten, welche vom National Institute of Standards and Technology (NIST) bereitgestellt wurden und mit Algorithmen von John M. Boone et al. verarbeitet wurden [9]. Für den Einsatz in der Klinik werden die Röntgenstrahlen zumeist mit Hilfe von dünnen Metallplatten aus Aluminium, Kupfer oder beispielsweise Titan vorgefiltert. Dies sorgt dafür, dass Photonen mit einer niedrigen Energie absorbiert werden und sich der Mittelwert aller Energien in Richtung der höheren Energien verschiebt, was wiederum den Effekt der Strahlhärtung reduziert (sieht hierzu Abschnitt 2.3.3) [7], [10].

### 2.1.2 Wechselwirkung mit Materie

Der Weg der emittierten Photonen wird durch Absorption und Streuung beim Durchdringen des menschlichen Körper beeinflusst. Im Folgenden werden die verschiedenen Effekte, welche bei der Interaktion mit Materie auftreten können, kurz erläutert.

Der **photoelektrische Effekt**<sup>1</sup> oder auch die photoelektrische Absorption tritt auf, wenn ein Photon ein Elektron aus der inneren Elektronenhülle schlägt und dabei seine

<sup>1</sup>Albert Einstein erhielt im Jahre 1921 für seine Verdienste um die theoretische Physik und besonders für seine Entdeckung des Gesetzes des photoelektrischen Effekts den Nobelpreis für Physik.

## KAPITEL 2. GRUNDLAGEN

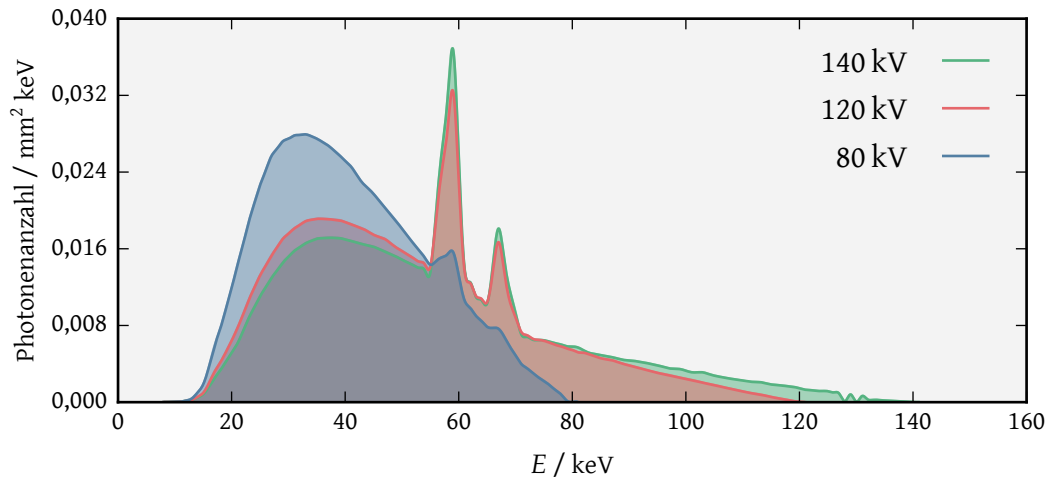


Abbildung 2.4: Spektrum für eine ungefilterte Röntgenröhre mit einer Anode aus Wolfram bei einer Beschleunigungsspannung von 80 kV, 120 kV und 140 kV.

gesamte Energie auf das Elektron überträgt. Die Energie des Photons muss dabei die Bindungsenergie des Elektrons, das sich in der Hülle befindet, übertreffen.

Wird die dabei entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer äußeren Hülle gefüllt, so entsteht **Fluoreszenzstrahlung**, welche, analog zur charakteristischen Röntgenstrahlung, den spezifischen Energieunterschied der beiden Hüllen aufweist [6]. Da die Energie der Fluoreszenzstrahlung sehr viel kleiner ist als die Energie des Photons, wird sie überwiegend von den umliegenden Atomen absorbiert. Sie spielt daher für die Detektion der Strahlenintensität keine weitere Rolle [11, S. 28].

Trifft das Photon auf ein Elektron in einer äußeren Hülle, so wird das Elektron aus der Hülle befördert. Dabei verliert das Photon die hierfür benötigte Energie und vollzieht eine Richtungsänderung. Dieser Prozess der **Compton-Streuung** wurde nach dessen Entdecker Arthur Holly Compton benannt, welcher 1927 den Nobelpreis für Physik erhielt. Gestreute Photonen, die am Detektor eintreffen, enthalten keine korrekten Ursprungsinformationen mehr und tragen hauptsächlich zum Rauschlevel des Bildes bei. Zusätzlich können sie eine Unschärfe im Bild und Streifenartefakte verursachen. Dieser Effekt wird weiter in Abschnitt 2.3 diskutiert.

Besitzt das streuende Atom einen Durchmesser, welcher in Relation zur Wellenlänge  $\lambda$  des gestreuten Photons klein ist, so kommt es zu einer elastischen Streuung, die

als **Rayleigh-Streuung** bezeichnet wird. Diese tritt jedoch hauptsächlich bei der Bildung mit sehr niedrigen Energien auf, wie beispielsweise bei der Mammographie (ca. 20 keV) und nimmt in der Computertomographie nur eine untergeordnete Rolle ein [11].

Übertrifft die Energie des Photons 1022 keV, so kann eine **Paarbildung** entstehen. Hierbei wird ein Photon ausgelöscht und es entsteht ein Elektron-Positron-Paar. Die verschiedenen Interaktionen mit Materie sind in Abbildung 2.5 schematisch dargestellt. Wie zuvor erwähnt, treten in der Computertomographie nur Energien zwischen ca. 50 keV und 140 keV auf, welche nicht ausreichen, um eine Paarbildung hervorzurufen. Jedoch wird der Prozess der Annihilation, bei dem zwei Photonen mit gleicher Energie entstehen, die in genau entgegengesetzte Richtungen emittieren, in der Positronen-Emissions-Tomographie ausgenutzt.

### 2.1.3 Lambert-Beer'sches Gesetz

Sei die Intensität eines Röntgenstrahls, welche proportional zur Anzahl der Photonen ist, definiert als die transmittierte Energie pro Zeit und Fläche [5]. Durchdringt der Röntgenstrahl den menschlichen Körper mit einer Anfangsintensität von  $I_0$ , so wird er durch die zuvor beschriebenen Mechanismen abgeschwächt und tritt mit einer Intensität  $I_n$  aus dem Körper wieder aus. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass der Röntgenstrahl Volumenelemente durchdringt, welche einen konstanten linearen Abschwächungskoeffizienten  $\mu(\eta)$  besitzen. Die Intensität des Röntgenstrahls kann nach Durchdringen eines Elementes der Breite  $\Delta\eta$  beschrieben werden durch

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \mu(\eta)I(\eta)\Delta\eta. \quad (2.3)$$

Durch Umstellen und die Annahme, dass  $\Delta\eta \rightarrow 0$ , erhält man die Gleichung

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = \frac{dI}{d\eta} = -\mu(\eta)I(\eta). \quad (2.4)$$

Löst man die Differentialgleichung (2.4) und betrachtet eine Strecke  $s$  durch ein Objekt, so erhält man durch Integration das Lambert-Beer'sche Gesetz für die austretende In-

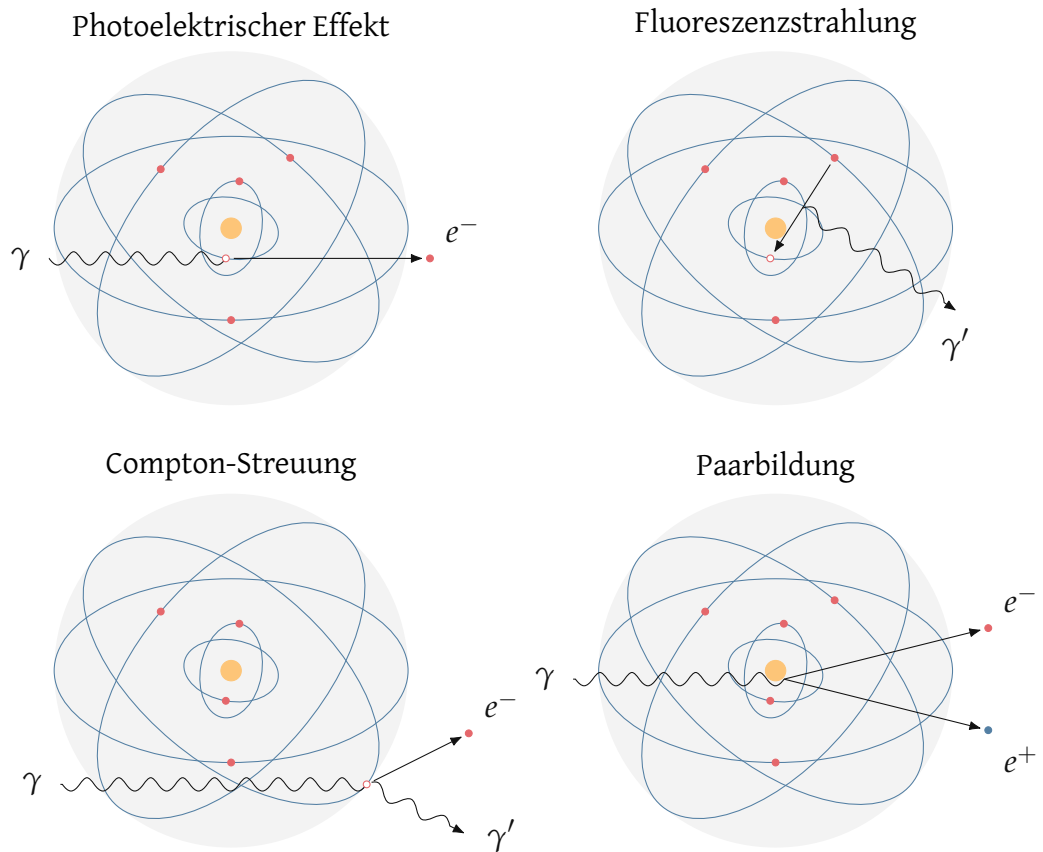


Abbildung 2.5: Schematische Darstellungen der unterschiedlichen Wechselwirkungen mit Materie.

tensität in Form von

$$I(s) = I_0 e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta} \quad (2.5)$$

für einen monochromatischen Röntgenstrahl [6], [12], [13]. Abbildung 2.6 zeigt eine schematische Darstellung des Sachverhaltes.

Die Annahme, dass der Röntgenstrahl eine monochromatische Energie aufweist, entspricht wie in Abschnitt 2.1.1 gezeigt nicht der Realität. Genauer müsste man die verschiedenen Energien des polychromatischen Röntgenspektrums mit in die Gleichung (2.5) integrieren, da die linearen Abschwächungskoeffizienten eine Abhängigkeit von dieser aufweisen. Somit würde man die Gleichung

$$I(s) = \int_0^{E_{\max}} I_0(E) e^{-\int_0^s \mu(E, \eta) d\eta} dE \quad (2.6)$$

erhalten. Begünstigt durch neue Detektortechnologien gibt es mittlerweile zwar eine Vielzahl an Ansätzen, welche von mehr als einer Energie des Röntgenstrahls ausgehen, jedoch wird aufgrund des zusätzlich entstehenden Rechenaufwandes in (2.6) bei den meisten Rekonstruktionsalgorithmen von (2.5) ausgegangen [14], [15]. Dies hat zur Folge, dass die Strahlaufhärtung Artefakte im rekonstruierten Bild hervorruft. Siehe hierzu Abschnitt 2.3.3.

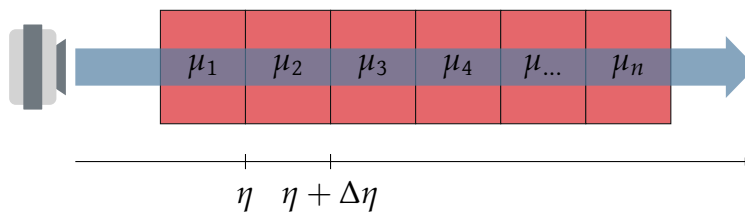


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung eines Röntgenstrahls, welcher  $n$  Volumenelemente mit konstanten linearen Abschwächungskoeffizienten und Breite  $\Delta\eta$  durchdringt.

Da man in den verschiedenen Rekonstruktionsalgorithmen in der Regel an der örtlichen Abhängigkeit der Abschwächung interessiert ist und nicht an der Intensität  $I$ , sei

das Projektionsintegral  $p$  definiert als

$$p(s) = -\ln\left(\frac{I(s)}{I_0}\right) = \int_0^s \mu(\eta) d\eta. \quad (2.7)$$

Somit gibt der Projektionswert den negativen Logarithmus des Verhältnisses von eingehender zu ausgehender Intensität an [6].

### 2.1.4 Detektion von Röntgenstrahlen

Moderne Computertomographen benutzen zur Detektion der abgeschwächten Intensität der Röntgenstrahlen zumeist Solid-State-Detektoren [5], [6], [16]. Das Detektormaterial besteht dabei aus strahlen-sensitiven Szintillatormaterial wie zum Beispiel Cadmiumwolframat oder Gadoliniumoxid, welches die Röntgenstrahlung durch Photon-Materie-Wechselwirkungen in sichtbares Licht umwandelt [16], [17]. Dieses Material ist für das Nutzen von hochenergetischer Strahlung, einer starken Lichtumwandlung und einer kurzen Nachleuchtdauer<sup>2</sup> optimiert [18]. Eine dünne Reflektorschicht leitet das umgewandelte Licht zu einer Photodiode, welche das Szintillatorlicht in eine elektrische Ladung umwandelt. Diese elektrische Ladung wird dann verstärkt und in ein digitales Signal konvertiert. In Abbildung 2.7 ist eine schematische Darstellung eines Detektors gegeben. Aufgrund der Sammlung und Aufsummierung der entstandenen Ladung während der Belichtungszeit wird diese Art von Detektoren auch Energie-integrierende Detektoren genannt. Ein auf dem Szintillatormaterial befestigtes Gitter mit Ausrichtung zur Röntgenquelle sorgt für eine Kollimation der Strahlen und führt dazu, dass gestreute Strahlen, welche nicht orthogonal zum Detektor verlaufen, herausgefiltert werden.

Eine neue Generation von Detektoren, welche sich zur Zeit noch in der Entwicklung befinden und noch nicht im klinischen Alltag benutzt werden, sind die photonenzählenden Detektoren [17], [18]. Diese Art von Detektoren sind im Gegensatz zu den Solid-State-Detektoren Direktkonverter. Die einfallenden Photonen werden dabei direkt gemessen und nicht erst in Licht umgewandelt. Die Photonen erzeugen beim Eindringen

<sup>2</sup>Die Nachleuchtdauer beschreibt die Zeitspanne bis zum Abklingen des angeregten Zustandes bis auf 10 % des Ausgangswertes.

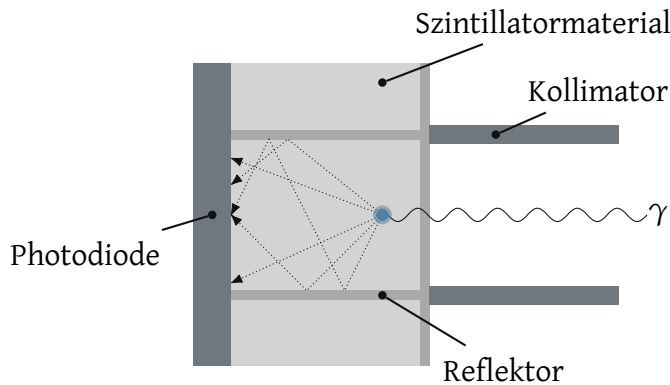


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung eines Solid-State-Detektors. Die Röntgenstrahlung wird durch das Szintillatormaterial in sichtbares Licht umgewandelt, welches dann von einer Photodiode erfasst wird.

in den Detektor einen sehr kurzen Impuls, der so kurz ist, dass eine Zählung der einzelnen Photonen möglich ist [18]. Die Amplitude des induzierten Strompulses bei konstanter Pulsform steht dabei näherungsweise proportional zur Energie des Photons, sodass es möglich ist, den polychromatischen Röntgenstrahl in seine verschiedenen Energien aufzuteilen [17], [19], [20]. Diese neue Technologie hat das Potenzial, Rauschen zu reduzieren, Strahlenaufhärtingsartefakte zu verhindern und dabei gleichzeitig den Kontrast in den Bildern zu verbessern.

## 2.2 Grundlagen der Computertomographie

Die Computertomographie (CT) ermöglicht es, überlagerungsfreie Querschnitte eines gescannten Objektes abzubilden. Anders als bei herkömmlichen Röntgenbildern, bei welchen die Datenakquirierung nur aus einer Richtung erfolgt, basiert das CT-Bild auf Projektionen, welche über verschiedene Winkel aufgenommen werden. Abbildung 2.8 zeigt eine schematische Darstellung eines Computertomographen. Röntgenquelle und Detektor stehen sich gegenüber, während sich das zu scannende Objekt zwischen den beiden befindet. Der Detektor besteht in der Regel aus mehreren Detektorelementen, welche im Folgenden in Anlehnung an das Wort Pixel<sup>3</sup> auch kurz Dixel genannt werden. Die Datenakquirierung bei Computertomographen hat sich im Laufe der Jahre

<sup>3</sup>Kunstwort für die englische Bezeichnung eines Bildelements (engl. picture element).

immer weiterentwickelt, das Grundprinzip ist jedoch immer das Gleiche: Sammle Projektionsdaten über viele Winkel für das gesamte Messfeld (FOV, engl. field of view). Basierend auf dieser Messung wird mit Hilfe eines Rekonstruktionsalgorithmus die Abschwächung an jedem Punkt des Messfeldes berechnet. Um ein dreidimensionales Volumen zu messen, wird das Objekt durch den Computertomographen durchgeschoben und die dabei entstehenden Schichtbilder werden nach der Rekonstruktion zu einem Volumen kombiniert.

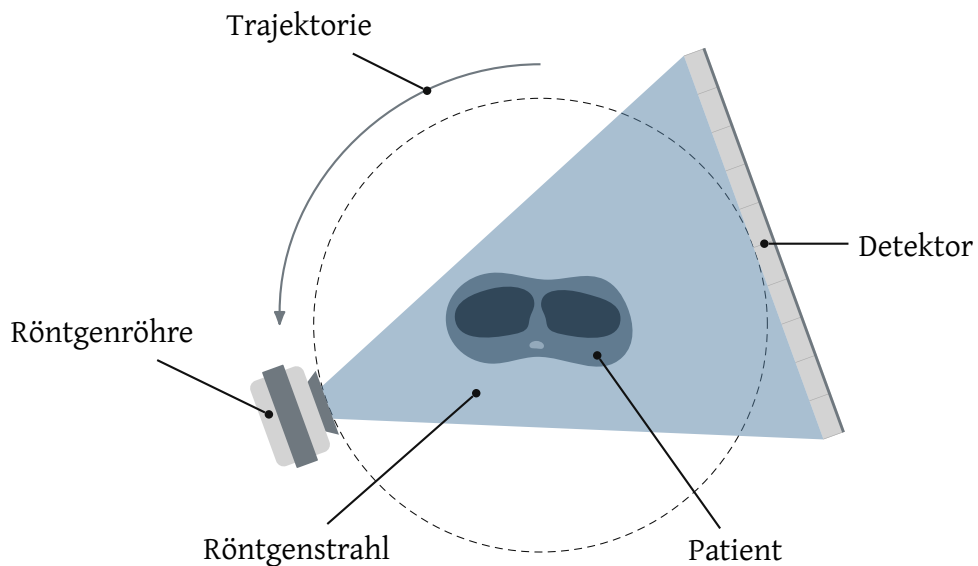


Abbildung 2.8: Schematischer Aufbau eines Computertomographen. Röntgenquelle und Detektor stehen sich gegenüber und rotieren zusammen um das zu scannende Objekt.

Die **erste Generation** von Computertomographen bestand aus einer Röntgenquelle und einem einzelnen Dixel. Wie in Abbildung 2.9 schematisch dargestellt translatierte die Quelle und der gegenüberliegende Detektor in äquidistanten Schritten über das gesamte Messfeld. Ist die Translation für einen Winkel abgeschlossen, rotieren Quelle und Detektor weiter und die Verschiebung des Systems erfolgt von Neuem. Um einen möglichst dünnen Strahl zu erhalten, welcher nur den Detektor trifft, wurde direkt vor der Röntgenröhre ein Kollimator geschaltet. Dieses Vorgehen reduziert insbesondere die unnötige Dosisbelastung für den Patient und führt zu einer sogenannten Nadelstrahl- oder Parallelstrahlgeometrie (siehe hierzu Abschnitt 2.2.1). Die Aufnah-

## 2.2. GRUNDLAGEN DER COMPUTERTOMOGRAPHIE

mezeit für diese Generation ist durch die aufwändige Translation relativ lang und beträgt ca. 5 min pro Schicht.

Eine Erweiterung dieser Geometrie durch die **zweite Generation** erfolgt in Form von einem Detektor, welcher aus mehreren Dixeln besteht. Dadurch sind weniger Translationsschritte für einen bestimmten Winkel notwendig und die Aufnahmezeit konnte auf ca. 20 sek reduziert werden. Die Breite des Fächerstrahls, welcher auf den Detektor trifft, wird in den Rekonstruktionsalgorithmen in der Regel vernachlässigt, da nur wenige Dixel benutzt wurden und man aufgrund der Entfernung zwischen Quelle und Detektor eine approximierete Parallelstrahlgeometrie annehmen konnte.

Ab der **dritten Generation** wurde dann ganz auf die Translation verzichtet, da ein Detektor mit einer hohen Anzahl von Dixeln benutzt wurde, welcher den gesamten Messbereich abdeckte. Durch eine kontinuierliche Rotation um das zu scannende Objekt konnte die Aufnahmezeit für eine Schicht auf 0,5 sek gesenkt werden. Anders als bei der zweiten Generation kann jetzt jedoch der Öffnungswinkel des Röntgenstrahls nicht mehr ignoriert werden, sodass bei dieser Generation von einer Fächerstrahlgeometrie ausgegangen wird (vergleiche Abbildung 2.13).

Eine Weiterentwicklung dieser Technologie weist einen Detektor auf, welcher in Form eines Ringes den gesamten Gantry abdeckt. In dieser **vierten Generation** wird nur die Röntgenquelle um das Objekt rotiert und der Detektor bleibt stationär. Folglich ist die Auflösung durch die Anzahl an Dixeln im Detektorring limitiert und nicht durch die Anzahl von Aufnahmewinkeln. Ein weiterer wichtiger Aspekt in dieser Generation ist die Auslesefrequenz des Detektors, welche ebenfalls der Auflösung ein oberes Limit setzt.

Moderne Computertomographen folgen der Geometrie der dritten Generation, da die hohe Anzahl an Dixeln in der vierten Generation die Kosten für den Detektor maßgeblich in die Höhe treibt. Ein zusätzliches Problem entsteht in der vierten Generation durch Streustrahlung. Da der Winkel, mit welchem der Röntgenstrahl auf den Dixel trifft, nicht mehr fest ist, muss ein Kollimator mit der Röntgenquelle zusammen rotieren. Zwar ist das Gewicht des Objektes, welches rotiert, nun reduziert, wodurch die Geschwindigkeit erhöht werden kann, jedoch rechtfertigt dieser Vorteil nicht die entstehenden Kosten.

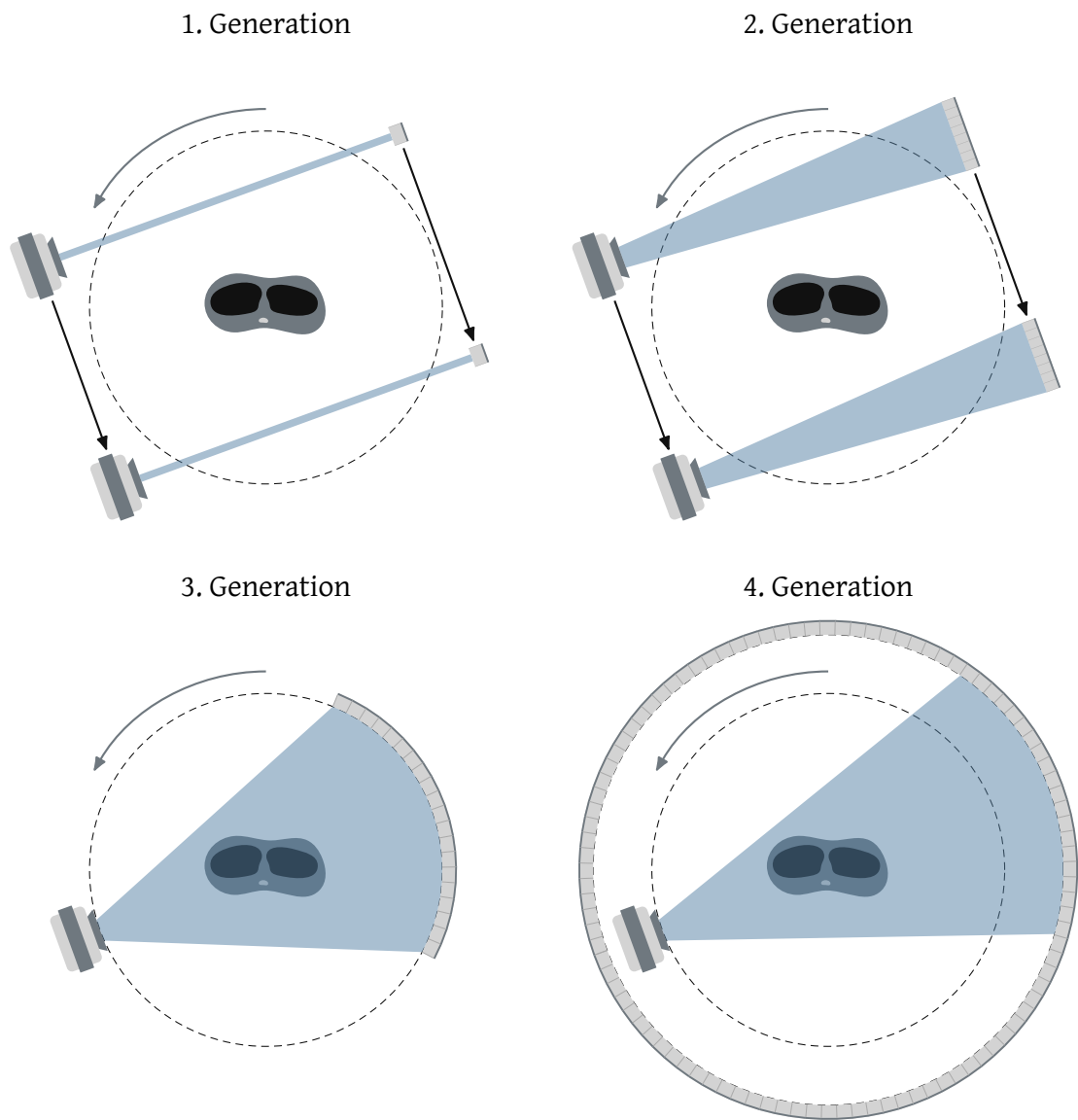


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung der verschiedenen CT-Generationen für einen festen Winkel.

## 2.2. GRUNDLAGEN DER COMPUTERTOMOGRAPHIE

Aktuelle Entwicklungen in der Computertomographie zeigen den Vorteil von mehreren Detektorzeilen, welche in axialer Richtung hintereinander angereiht sind. Die entstehende Kegelstrahlgeometrie mit bis zu 320 Detektorzeilen ermöglicht insbesondere eine erhöhte Aufnahmegeschwindigkeit [18]. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass gleichzeitig eine große Fläche des zu scannenden Objektes bestrahlt werden kann, so dass es möglich ist, zum Beispiel Bilder des gesamten Herzens mit nur einer einzigen Umdrehung aufzunehmen [21]–[23]. Die sehr große Detektorbreite von bis zu 160 mm in axialer Richtung bringt jedoch eine Reihe von technischen Herausforderungen mit sich, welche einen wesentlichen Einfluss auf die Bildqualität haben können [18], [24]. Auch die Akquirierung entlang einer Helix, welche einen kontinuierlichen Tischvorschub ermöglicht, ist heutzutage eine Funktion, welche in jeden modernen Computertomographen integriert ist [16], [25]–[29]. Da sich der ALIR-Algorithmus zunächst auf zweidimensionale Schichtbilder bezieht, wird im Folgenden jedoch nicht näher auf die Datenakquirierung mit Hilfe von mehreren Detektorzeilen eingegangen. In Abschnitt 6.7 wird jedoch erläutert, wie man die hier vorgestellten Methoden auf die dreidimensionale Bildgebung erweitern kann.

Die Darstellung von einzelnen Schichtbildern erfolgt heutzutage meist in einer Auflösung von  $512 \text{ Pixel} \times 512 \text{ Pixel}$  bis hinzu  $1024 \text{ Pixel} \times 1024 \text{ Pixel}$  und spiegelt an jeder Pixelkoordinate die Abschwächung an dieser Position wider. Die Abschwächungskoeffizienten  $\mu$  werden dabei in der Regel durch Grauwerte repräsentiert. Um die Handhabung dabei zu erleichtern, wird einem Vorschlag von Godfrey N. Hounsfield nachgegangen, welcher die Umwandlung von Abschwächungskoeffizienten in CT-Zahlen durch

$$[\text{CT-Zahl}](\mu) = \frac{\mu - \mu_{\text{H}_2\text{O}}}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot 1000 \text{ HU} \quad (2.8)$$

beinhaltet. Die Normalisierung mit Hilfe des Abschwächungskoeffizienten für Wasser  $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$  sorgt dafür, dass die Darstellung annähernd unabhängig vom genutzten Röntgenspektrum interpretiert werden kann. Des Weiteren hat die Skalierung in (2.8), welche dazu führt, dass Luft einen Wert von  $-1000 \text{ HU}$  und Wasser einen Wert von  $0 \text{ HU}$  annimmt, einen zusätzlichen psychologischen Vorteil. Die Abschwächungskoeffizienten der verschiedenen Organe befinden sich alle relativ in der Nähe von  $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ , was eine Unterscheidung erschwert. Nach der Skalierung liegen die CT-Zahlen jedoch weiter auseinander und ermöglichen somit eine vereinfachte Begutachtung der Organe. Die CT-Zahlen für ein klinisches Schichtbild erstrecken sich meist von  $-1024 \text{ HU}$  bis  $3071 \text{ HU}$ ,

wobei Metallobjekte wie zum Beispiel Implantate auch sehr viel höhere CT-Zahlen aufweisen können. Diese 4096 Abstufungen lassen sich in einem 12 bit Grauwertbild speichern. Das menschliche Auge ist jedoch nicht in der Lage, selbst unter idealen Voraussetzungen, mehr als 900 unterschiedliche Grauwerte zu unterscheiden [30]. Um jedoch trotzdem das gesamte Wertespektrum zu nutzen, wird im klinischen Alltag eine **Fensterung** benutzt, die dafür sorgt, dass nur ein Teil der Werte auf die Grauwertskala abgebildet wird. Zu diesem Zweck ist eine Fensterbreite (WW, engl. window width) und ein Fensterzentrum (WL, engl. window level) definiert durch

$$WW = CT_{\max} - CT_{\min} \quad (2.9)$$

$$WL = (CT_{\max} + CT_{\min})/2. \quad (2.10)$$

Nach angewandter Fensterung wird allen Werten, die größer sind als  $CT_{\max}$ , der hellste Grauwert und allen Werten, die kleiner sind als  $CT_{\min}$ , der dunkelste Grauwert zugewiesen. Den Werten, die dazwischen liegen, wird eine lineare Verteilung der möglichen Grauwerte zugewiesen. In Abbildung 2.10 ist eine Schicht auf Höhe der Lungen einmal im Lungenfenster mit  $WL = -500$  HU und  $WW = 1500$  HU und einmal im Weichteilfenster mit  $WL = 50$  HU und  $WW = 350$  HU dargestellt. Das Lungenfenster ermöglicht eine genaue Differenzierung des Lungengewebes, während das Weichteilfenster geeigneter ist, um das Mediastinum zu begutachten.

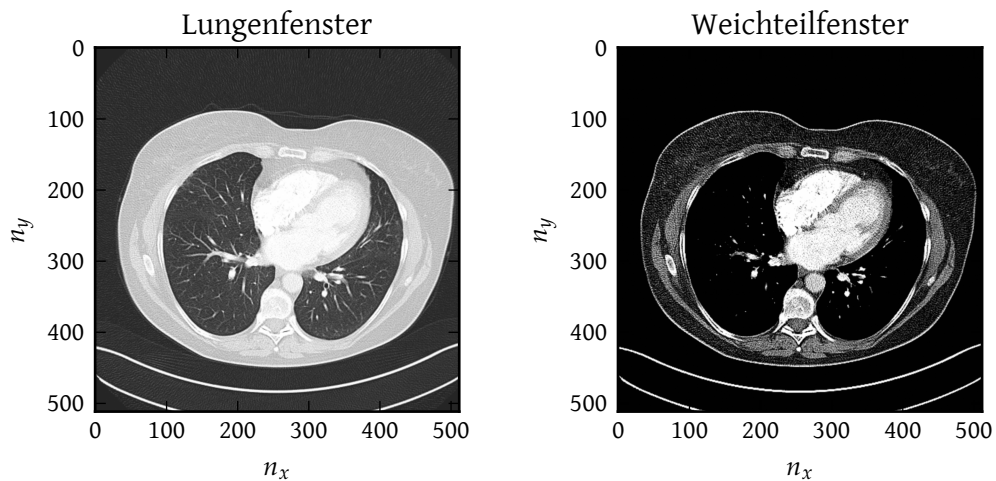


Abbildung 2.10: CT-Schicht auf Höhe des Herzens. Auf der linken Seite ist die Schicht im Lungenfenster ( $WL = -500$  HU,  $WW = 1500$  HU), auf der rechten Seite im Weichteilfenster ( $WL = 50$  HU,  $WW = 350$  HU) dargestellt.

Das Lungenfenster in Abbildung 2.10 weist einen kleinsten Wert von  $CT_{\min} = WL - (WW)/2 = -1250 \text{ HU}$  auf. Da die gängige Skala jedoch eine untere Grenze mit  $-1024 \text{ HU}$  für Luft besitzt, ist der dunkelste Wert in der Abbildung nicht schwarz, sondern ein hellerer Grauwert.

### 2.2.1 Geometriebeschreibung

Ein Großteil der Algorithmen zur Bildrekonstruktion von CT-Bildern wurde für die Parallelstrahlgeometrie entwickelt. Jedoch ist es durch eine Umsortierung der gemessenen Projektionsdaten leicht möglich, eine Fächerstrahlgeometrie in eine Parallelstrahlgeometrie umzuwandeln, denn für jeden Projektionsstrahl in der Parallelstrahlgeometrie lässt sich ein Projektionsstrahl in der Fächerstrahlgeometrie finden, welcher den gleichen Verlaufsweg aufweist. Hierzu sei zunächst die Geometriebeschreibung eines Computertomographen in Abbildung 2.11 gegeben. Die Entfernung von der Röntgenquelle zum Mittelpunkt der Gantry ist beschrieben durch FCD (engl. focus center distance), die Entfernung vom Detektor zum Mittelpunkt ist beschrieben durch DCD (engl. detector center distance) und die Gesamtstrecke von der Quelle zum Detektor ist beschrieben durch FDD (engl. focus detector distance). Zur vereinfachten Beschreibung von Positionen und Winkeln wird das Weltkoordinatensystem  $(x, y)^T$  eingeführt, welches den Ursprung im Mittelpunkt der Gantry besitzt. Die Größe des Messfelds ist durch den Öffnungswinkel  $\varphi$  des Fächerstrahls und der Größe des Detektors vorgegeben (siehe hierzu auch Abbildung 2.13).

Aus den Geometriebeschreibungen in Abbildung 2.11 geht hervor, dass sich die Röntgenquelle entlang der Trajektorie, beschrieben durch  $(-FCD \sin \theta, FCD \cos \theta)$ , bewegt, wobei  $\theta$  den Rotationswinkel zwischen der  $y$ -Achse und der Röntgenquelle kennzeichnet. Die Messdaten einer gesamten Akquirierung in Fächerstrahlgeometrie lassen sich durch den Zusammenhang

$$\xi = -FCD \sin \alpha \tag{2.11}$$

$$\theta' = \alpha + \theta \tag{2.12}$$

in Messdaten in Parallelstrahlgeometrie umwandeln. Dieser Prozess des **Rebinnings** ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Der Projektionsstrahl in der Fächerstrahlgeometrie

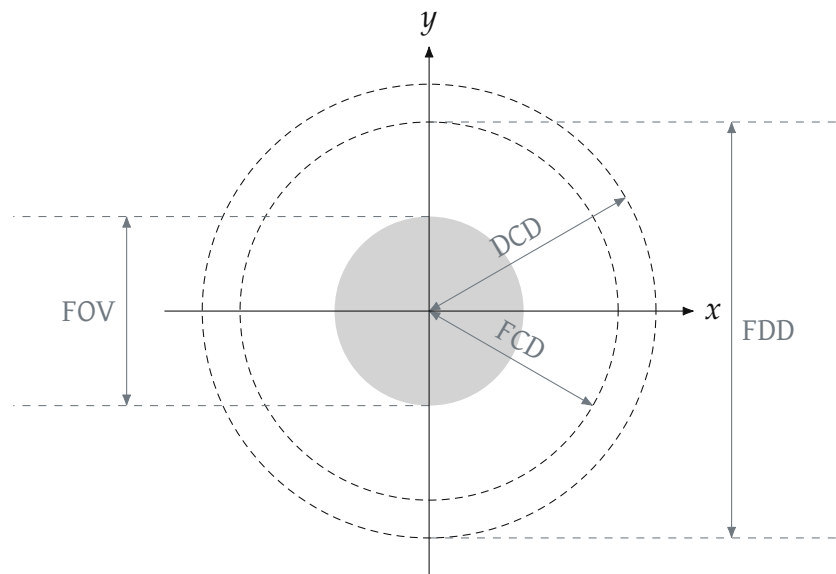


Abbildung 2.11: Geometriebeschreibung von Abständen bei einem Computertomographen. FCD (engl. focus center distance) beschreibt den Abstand zwischen dem Ursprung und der Röntgenquelle. DCD (engl. detector center distance) beschreibt den Abstand zwischen Ursprung und dem Detektor. FOV (engl. field of view) beschreibt die Größe des Messfeldes.

mit dem Rotationswinkel  $\theta$  und dem Öffnungswinkel  $\alpha$  relativ zum zentralen Projektionsstrahl entspricht dem Projektionsstrahl in der Parallelstrahlgeometrie mit Rotationswinkel  $\theta'$  und der Translation  $\zeta$  relativ zum zentralen Projektionsstrahl. Diese einfache Transformation ermöglicht es, die folgenden Methodiken stets in einer Parallelstrahlgeometrie zu beschreiben.

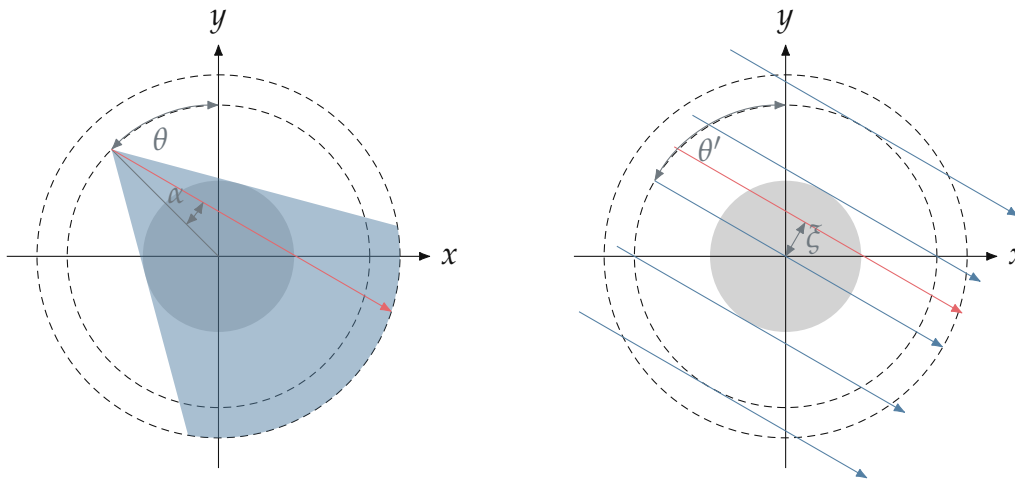


Abbildung 2.12: Rebinning von Fächerstrahlgeometrie zur Parallelstrahlgeometrie. Der Projektionsstrahl in der Fächerstrahlgeometrie mit Rotationswinkel  $\theta$  und Öffnungswinkel  $\alpha$  entspricht dem Projektionsstrahl in der Parallelstrahlgeometrie mit Rotationswinkel  $\theta'$  und Translation  $\zeta$ .

Zur weiteren Beschreibung von Zusammenhängen ist es sinnvoll, zusätzlich zum Weltkoordinatensystem  $(x, y)^T$  ein mit der Röntgenquelle rotierendes Koordinatensystem  $(\eta, \zeta)^T$  einzuführen. Wie aus Abbildung 2.13 ersichtlich, lässt sich eine Transformation zwischen den beiden Koordinatensystem durch

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

realisieren. Dies entspricht einer Drehung um den Rotationswinkel  $\theta$ . Analog gilt für die inverse Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Ähnlich wie in (2.5) lässt sich die Intensität entlang einer Linie  $L_{\zeta,\theta}$  mit Winkel  $\theta$  und

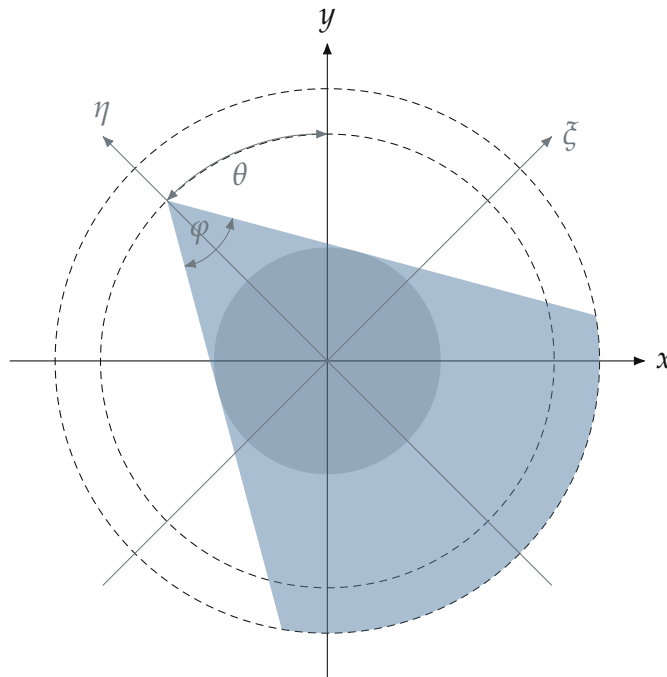


Abbildung 2.13: Röntgenquelle mit Öffnungswinkel  $\varphi$ . Zusätzlich zum Weltkoordinatensystem  $(x, y)^T$  ist das um  $\theta$  rotierte Koordinatensystem  $(\eta, \zeta)^T$  dargestellt.

Translationsvariable  $\zeta$  daher beschreiben durch

$$I_\theta(\zeta) = I_0 e^{-\int_{L_{\zeta,\theta}} f(\zeta \cos \theta - \eta \sin \theta, \zeta \sin \theta + \eta \cos \theta) d\eta} \quad (2.15)$$

## 2.2.2 Radontransformation

Die Transformation einer Funktion  $f(x, y)$  unter einer Parallelstrahlgeometrie in ihre Projektionswerte beschreibt die Radontransformation und sei durch die folgende Definition gegeben.

**Definition 2.2.1.** Sei  $f(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$ , dann ist die zweidimensionale **Radontransformation** gegeben als das Linienintegral entlang der Linie  $L_{\zeta,\theta}$  durch

$$\mathcal{R}_\theta \{f(x, y)\} = p_\theta(\xi) = \int_{L_{\xi, \theta}} f(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta) d\eta. \quad (2.16)$$

**Theorem 2.2.1.** Die Radontransformation besitzt die Eigenschaften

$$p_\theta(\xi) = p_{\theta+2\pi}(\xi) \quad (2.17)$$

$$p_\theta(\xi) = p_{\theta\pm\pi}(-\xi). \quad (2.18)$$

Wobei (2.17) zeigt, dass die Radontransformation periodisch in  $\theta$  mit der Periode  $2\pi$  ist und (2.18) eine Symmetrie in  $\theta$  mit Periode  $\pi$  darstellt. Der Beweis kann bei Faridani et al. nachgelesen werden [31], [32].

*Bemerkung.* Analog zur Radontransformation lässt sich die X-Ray-Transformation definieren, welche im Zweidimensionalen, abgesehen von der Parametrisierung, identisch zur Radontransformation ist. In höheren Dimensionen gibt es jedoch Unterschiede bezüglich der Integrationsfläche. In der Radontransformation wird über einer Hyperebene integriert, wohingegen in der X-Ray-Transformation weiterhin entlang einer Linie integriert wird. Da der ALIR-Algorithmus jedoch zunächst für die zweidimensionale Rekonstruktion vorgestellt wird, wird für eine genauere Betrachtung auf die Arbeiten von Faridani et al. verwiesen [32].

Eine Iteration über alle Aufnahmewinkel  $\theta$  und Akquirierung der korrespondierenden Projektionswerte über alle  $\xi$  sorgt für das Füllen des Radonraums. Wie stark dieser gefüllt wird, ist abhängig von der Anzahl an Dixeln und der Anzahl an Aufnahmewinkeln.

Abbildung 2.14 zeigt ein Softwarephantom mit einer simulierten Datenakquirierung über 1872 Dixel und 1152 verschiedene Winkel, welche über  $360^\circ$  verteilt sind. Durch die verschiedenen Aufnahmewinkel weisen Punkte im Bildbereich nach der Projektion einen sinusförmigen Verlauf im Radonraum auf. Dies gibt Anlass dazu, die Aufnahme als Sinogramm zu bezeichnen.

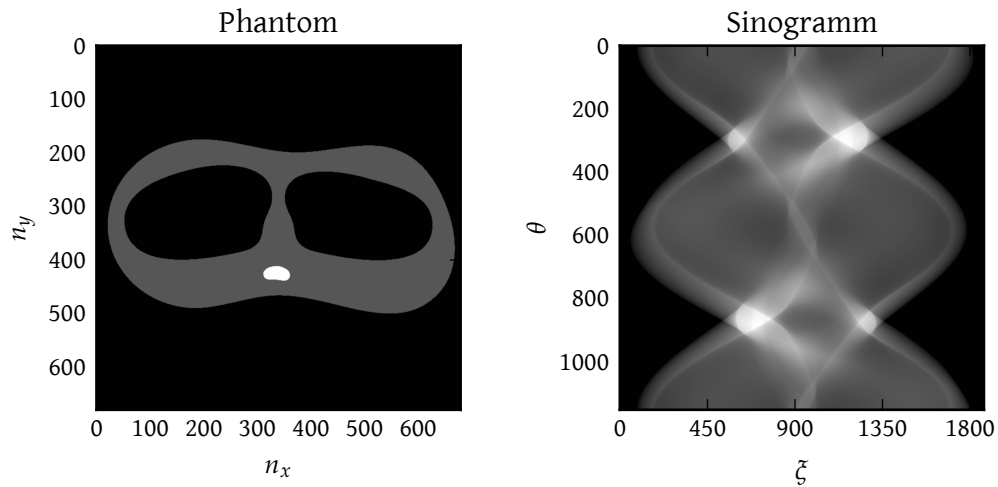


Abbildung 2.14: Beispiel einer Radontransformation. Das simulierte Sinogramm wurde mit 1152 verschiedenen Winkeln über  $360^\circ$  und 1872 Dexeln erstellt.

### 2.2.3 Fourier-Slice-Theorem

Das wohl wichtigste Theorem im Zusammenhang mit der Computertomographie ist durch das Fourier-Slice-Theorem oder Central-Slice-Theorem gegeben. Es zeigt einen Zusammenhang zwischen Fourier- und Radontransformation, welcher eine erste Möglichkeit der Bildrekonstruktion bereitstellt. Im Folgenden wird im Detail gezeigt, dass die eindimensionale Fouriertransformation der Projektionen als radiale Linien, die zum jeweiligen Aufnahmewinkel korrespondieren, im kartesischen Fourierraum des Objektes identifiziert werden können.

**Theorem 2.2.2.** Sei die eindimensionale Fouriertransformation von  $p_\theta(\xi)$  gegeben durch

$$\mathcal{F}\{p_\theta(\xi)\} = P_\theta(k_\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\xi) e^{-2\pi i k_\xi \xi} d\xi \quad (2.19)$$

und die zweidimensionale Fouriertransformation von  $f(x, y)$  gegeben durch

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (2.20)$$

dann gilt

$$P_{\theta}(k_{\xi}) = F(k_x, k_y) \Big|_{k_x=k_{\xi} \cos \theta, k_y=k_{\xi} \sin \theta} . \quad (2.21)$$

Mit anderen Worten, die eindimensionale Fouriertransformation einer Projektion  $p_{\theta}(\xi)$  entspricht der zweidimensionalen Fouriertransformation des Bildes  $f(x, y)$  evaluiert unter dem Winkel  $\theta$ .

*Beweis.* Das Einsetzen des Zusammenhangs  $k_x = k_{\xi} \cos \theta$  und  $k_y = k_{\xi} \sin \theta$  in  $F(k_x, k_y)$  ergibt

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(k_{\xi} \cos \theta x + k_{\xi} \sin \theta y)} dx dy . \quad (2.22)$$

Weiter kann durch (2.13) eine Substitution der Variablen  $x$  und  $y$  durch  $\xi$  und  $\eta$  vorgenommen werden, was zu

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta) e^{-2\pi i(k_{\xi} \cos \theta(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) + k_{\xi} \sin \theta(\xi \sin \theta + \eta \cos \theta))} d\xi d\eta \quad (2.23)$$

führt. Da weiter  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  gilt, lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta) e^{-2\pi i k_{\xi} \xi} d\xi d\eta . \quad (2.24)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit des Exponentialterms von  $\eta$  lässt sich dieser vor das zweite Integral ziehen und ergibt damit

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k_{\xi} \xi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta) d\eta \right] d\xi . \quad (2.25)$$

Bei genauerer Betrachtung der Gleichung zeigt sich, dass das innere Integral der Projektion  $p_\theta(\xi)$  aus (2.16) entspricht und somit

$$F(k_x, k_y) \Big|_{k_x=k_\xi \cos \theta, k_y=k_\xi \sin \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\xi) e^{-2\pi i k_\xi \xi} d\xi \quad (2.26)$$

gilt. Da per Definition die rechte Seite in (2.26) der eindimensionalen Fouriertransformation von  $p_\theta(\xi)$  entspricht, ist die Behauptung (2.21) bewiesen.  $\square$

In Abbildung 2.15 ist der Zusammenhang, welcher durch das Fourier-Slice-Theorem gegeben ist, dargestellt. Um die Extraktion der Frequenzdaten aus dem Frequenzraum  $F(k_x, k_y)$  für den Winkel  $\theta$  zu beschreiben, wird der Slice-Operator  $\mathcal{S}\{\cdot\}$  benutzt.

## 2.2.4 Direkte Fourier-Rekonstruktion

Aus dem Fourier-Slice-Theorem lässt sich zunächst ein leicht ersichtlicher Rekonstruktionsansatz ableiten [33]. Angefangen mit einer eindimensionalen Fouriertransformation der aufgenommenen Projektionsdaten  $p_\theta(\xi)$  werden die resultierenden Frequenzdaten  $P_\theta(k_\xi)$  in einem zweidimensionalen Raum angeordnet. Die Anordnung ist dabei, so wie es in (2.21) beschrieben ist, abhängig vom jeweiligen Aufnahmewinkel  $\theta$  der Projektion (vergleiche hierzu Abbildung 2.15). Anschließend kann eine inverse zweidimensionale Fouriertransformation durchgeführt werden, welche zum gewünschten Bild  $f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}$  führt.

Unter Berücksichtigung des diskreten Charakters eines realen Datensatzes wird bei der Anordnung der Frequenzdaten  $P_\theta(k_\xi)$  in der zweidimensionalen Matrix  $F(k_x, k_y)$  jedoch ein zusätzlicher Interpolationsschritt benötigt. Die Daten  $P_\theta(\xi)$  werden abhängig von  $\theta$  auf einem Polargitter angeordnet. Um die inverse Fouriertransformation  $\mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}$  mit Hilfe von schnellen Algorithmen durchzuführen, bedarf es jedoch in der Regel einer Anordnung auf einem kartesischen Gitter.<sup>4</sup> Die Transformation vom

<sup>4</sup>Neuartige schnelle Algorithmen zur Durchführung der Fourier- und inversen Fouriertransformation erlauben auch eine nicht-äquidistante Anordnung der Daten [34], [35]. Auch effektive Algorithmen, welche speziell für Daten modifiziert sind, die sich auf einem Polargitter befinden, sind Bestandteil der aktuellen Forschung [36], [37]

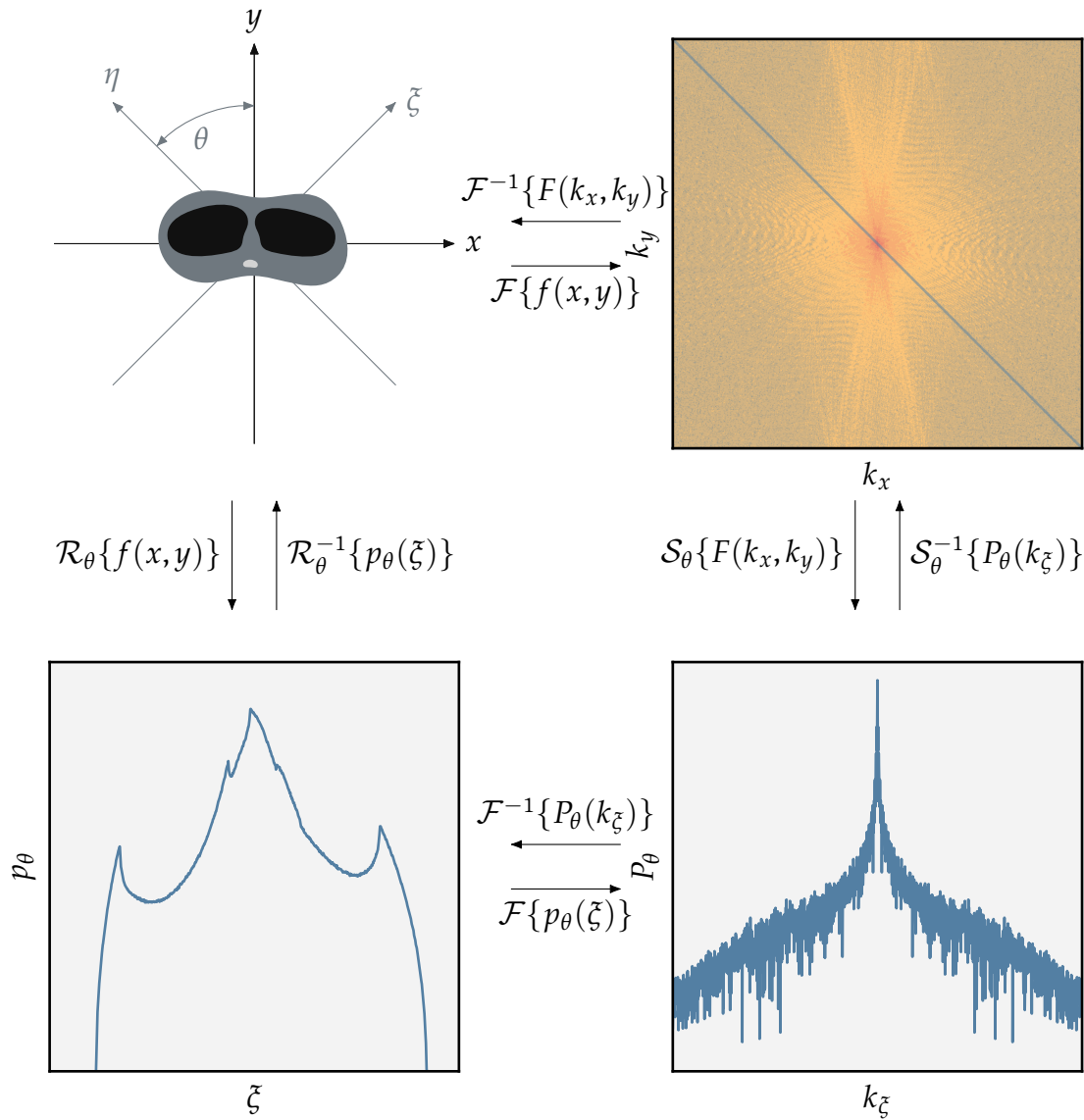


Abbildung 2.15: Schematische Darstellung des Fourier-Slice-Theorems. Um die Extraktion der Frequenzdaten aus den Frequenzraum  $F(k_x, k_y)$  für den Winkel  $\theta$  (dargestellt durch eine blaue Linie) zu beschreiben, wird der Slice-Operator  $\mathcal{S}\{\cdot\}$  benutzt.

$P_\theta(k_\zeta)$  in Polarkoordinaten

$F(k_x, k_y)$  in kartesischen Koordinaten

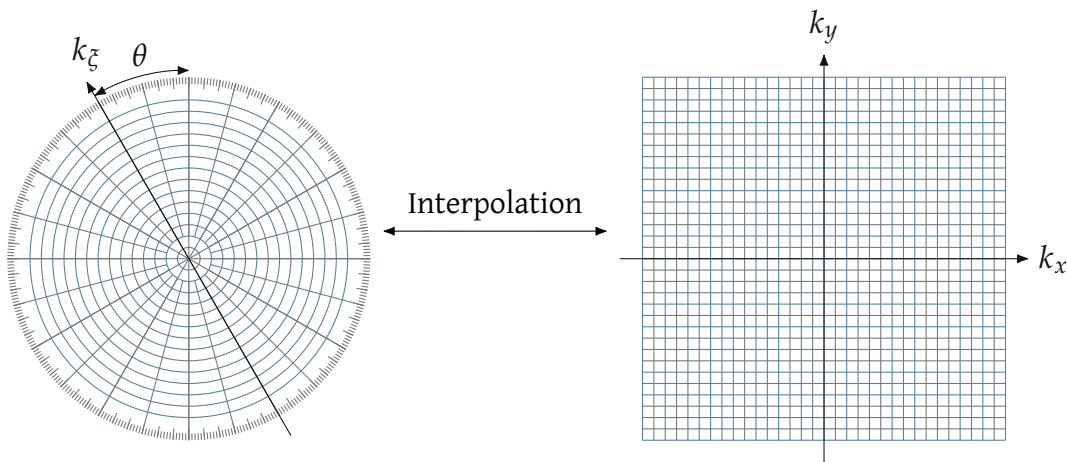


Abbildung 2.16: Anordnung der aufgenommenen und Fourier-transformierten Projektionwerte in Polarkoordinaten und die benötigten Frequenzdaten  $F(k_x, k_y)$  in kartesischen Koordinaten. Für die Transformation zwischen den beiden Koordinatensystemen ist im diskreten Fall ein Interpolationsschritt notwendig.

Polargitter zu einem kartesischen Gitter kann mit Hilfe einer bilinearen Interpolation vollzogen werden. Der zusätzliche Rechenaufwand dieser Interpolation macht diesen einfachen Rekonstruktionsansatz jedoch in der Realität unbeliebt.

### 2.2.5 Gefilterte Rückprojektion

Die **gefilterte Rückprojektion** (FBP, engl. filtered backprojection) benötigt keinen Interpolationsschritt und ist aufgrund des resultierenden Geschwindigkeitsvorteiles das verbreitetste Rekonstruktionsverfahren im Bereich der Computertomographie. Betrachtet man die inverse Fouriertransformation von  $F(k_x, k_y)$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-2\pi i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad (2.27)$$

und appliziert die Substitutionen  $k_x = k_\zeta \cos \theta$  und  $k_y = k_\zeta \sin \theta$ , so müssen die infinitesimalen Flächenelemente  $dk_x dk_y$  transformiert werden zu  $J dk_\zeta d\theta$ . Hierbei

beschreibt

$$\begin{aligned}
 J &= \det \left( \frac{\partial(k_x, k_y)}{\partial(k_{\bar{\zeta}}, \theta)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial k_{\bar{\zeta}}} & \frac{\partial k_y}{\partial k_{\bar{\zeta}}} \\ \frac{\partial k_x}{\partial \theta} & \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ k_{\bar{\zeta}} \sin \theta & k_{\bar{\zeta}} \cos \theta \end{vmatrix} \\
 &= k_{\bar{\zeta}} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = k_{\bar{\zeta}}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

die Funktionaldeterminante oder Jacobi-Determinante. Der Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen ist in Abbildung 2.17 schematisch dargestellt. Die infinitesimalen Flächenelemente besitzen im kartesischen Koordinatensystem an jeder Position die gleiche Größe, wohingegen die Größe der Flächenelemente im Polarkoordinatensystem abhängig von der Entfernung zum Koordinatenursprung ist. Somit ergibt sich für (2.27)

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(k_{\bar{\zeta}} \cos \theta, k_{\bar{\zeta}} \sin \theta) e^{2\pi i k_{\bar{\zeta}} (x \cos \theta + y \sin \theta)} k_{\bar{\zeta}} dk_{\bar{\zeta}} d\theta. \tag{2.29}$$

Wobei hier zu beachten ist, dass  $F$  durch die Koordinatentransformation nun eine Abhängigkeit von  $k_{\bar{\zeta}}$  und  $\theta$  besitzt und die Integrationsgrenzen bezüglich dieser Transformation angepasst wurden. Teilt man nun weiter das Integral in die Intervalle  $[0, \pi]$  und  $[\pi, 2\pi]$  auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_{\bar{\zeta}}, \theta) e^{2\pi i k_{\bar{\zeta}} (x \cos \theta + y \sin \theta)} k_{\bar{\zeta}} dk_{\bar{\zeta}} d\theta \\
 &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(k_{\bar{\zeta}}, \theta) e^{2\pi i k_{\bar{\zeta}} (x \cos \theta + y \sin \theta)} k_{\bar{\zeta}} dk_{\bar{\zeta}} d\theta. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Durch eine Verschiebung des Winkelbereiches um  $\pi$  für den zweiten Term in (2.30) und unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften von  $F$  kann man die Gleichung

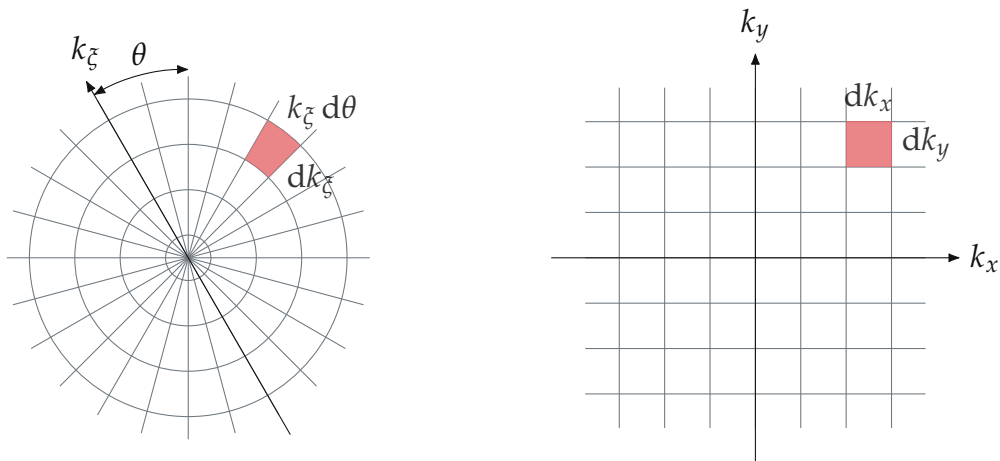


Abbildung 2.17: Der Unterschied zwischen den infinitesimalen Flächenelementen der beiden Koordinatensysteme. Die Flächenelemente im Polarkoordinatensystem sind abhängig von der Entfernung zum Koordinatenursprung, wohingegen die Elemente im kartesischen Koordinatensystem an jeder Position jeweils die gleiche Größe besitzen.

umformulieren zu

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(k_{\zeta}, \theta) e^{2\pi i k_{\zeta} (x \cos \theta + y \sin \theta)} k_{\zeta} \, dk_{\zeta} \, d\theta \\
 + \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(k_{\zeta}, \theta) e^{2\pi i k_{\zeta} (x \cos \theta + y \sin \theta)} (-k_{\zeta}) \, dk_{\zeta} \, d\theta \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

und zusammenfassen zu

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_{\zeta}, \theta) e^{2\pi i k_{\zeta} (x \cos \theta + y \sin \theta)} |k_{\zeta}| \, dk_{\zeta} \, d\theta. \quad (2.32)$$

Durch Ausnutzung des Fourier-Slice-Theorems können die Frequenzdaten des Bildes durch die Frequenzdaten der Projektionen ersetzt werden und man erhält

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(k_{\zeta}) e^{2\pi i k_{\zeta} \zeta} |k_{\zeta}| \, dk_{\zeta} \, d\theta. \quad (2.33)$$

Wobei zu beachten ist, dass hierbei die Eigenschaft  $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$  aus (2.13) ausgenutzt wurde.

Bei genauerer Betrachtung von (2.33) ist ersichtlich, dass

$$p_{\theta}^{*}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(k_{\xi}) e^{2\pi i k_{\xi} \xi} |k_{\xi}| dk_{\xi} \quad (2.34)$$

einer Hochpassfilterung gleichzusetzen ist, denn die Multiplikation von  $P_{\theta}(k_{\xi})$  mit  $|k_{\xi}|$  führt zu einer linearen Gewichtung des Spektrums von  $p_{\theta}(\xi)$ . Somit beschreibt  $p_{\theta}^{*}(\xi)$  also die gefilterte Projektion  $p_{\theta}(\xi)$  und die gefilterte Rückprojektion ist gegeben durch

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} p_{\theta}^{*}(\xi) d\theta. \quad (2.35)$$

Wie bereits aus der Rekonstruktionsvorschrift (2.35) ersichtlich ist, kann mit dem Rekonstruktionsprozess schon nach der Akquirierung einer einzelnen Projektion begonnen werden. Dies ermöglicht eine außerordentlich schnelle Rekonstruktion des gescannten Objektes, was auch den Grund dafür liefert, dass die gefilterte Rückprojektion im klinischen Alltag der meistgenutzte Rekonstruktionsalgorithmus ist.

## 2.3 Artefakte in der Computertomographie

Auch wenn die Computertomographie hinsichtlich der Bildqualität in den letzten Jahrzehnten eine enorme Entwicklung vollzogen hat, gibt es noch eine Vielzahl an Einflussfaktoren, die negative Effekte auf die Qualität der Bilder haben können. Die verschiedenen Ursprünge solcher Bildartefakte werden im Folgenden kurz erläutert. Für eine detailliertere Auseinandersetzung mit den verschiedenen Artefakttypen sei jedoch auf die Arbeit von De Man verwiesen [5].

### 2.3.1 Rauschen

Rauschen in den Messdaten hat im Allgemeinen seinen Ursprung im Quantenrauschen der Photonen und führt daher zu der Annahme, dass dieses in Form einer Poisson-Verteilung vorliegt [5], [38]–[40]. Die statistische Schwankung im Rohdatenraum erzeugt dabei helle und dunkle Streifenartefakte im Bildbereich, welche sich über das gesamte Bild ausbreiten können. Die Ausprägung der Artefakte ist zumeist verstärkt entlang von Projektionen, welche durch stark absorbierendes Material verlaufen, da das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR, engl. signal-to-noise ratio) der gemessenen Intensität eine nicht-lineare Abhängigkeit in Form von

$$\text{SNR} \sim e^{-p/2} \quad (2.36)$$

zur rauschfreien Absorption  $p$  entlang eines Strahles aufweist [5].

Das Rauschen kann reduziert werden, indem die verwendete Stromstärke  $I_0$  erhöht wird. Dies hat jedoch Auswirkungen auf die Strahlenbelastung des Patienten und sollte daher nicht als Mittel eingesetzt werden. Während der Aufnahme kann jedoch darauf geachtet werden, dass der Patient geeignet gelagert wird. Indem beispielsweise dafür gesorgt wird, dass sich die Extremitäten außerhalb des Messfeldes befinden, wird die Absorption der Strahlung reduziert, was zu mehr messbarer Intensität an den Detektoren führt und daher den Einfluss des Rauschens reduziert. Gleichzeitig wird hierbei die Strahlenbelastung des Patienten verringert.

### 2.3.2 Streuung

Wie bereits in Kapitel 2.1.4 angemerkt, kann Streustrahlung mit Hilfe von Kollimatoren, welche dem Detektor vorgeschaltet sind, entgegengewirkt werden [41]. So kann verhindert werden, dass die gestreuten Photonen, welche zumeist aus dem Compton-Effekt hervorgehen (siehe hierzu Abschnitt 2.1.2), auf ein Detektorelement treffen. Da die vollzogene Richtungsänderung jedoch nahezu beliebig ist, können nicht alle gestreuten Photonen durch diese Methode aus der Messung entfernt werden. Aufgrund der Tatsache, dass durch die Richtungsänderung die Weginformation der Photonen

nicht mehr vorhanden ist, sind diese Photonen nutzlos für die Rekonstruktion des Bildes. Anders als beim Rauschen, zeigt die Streuung eine relativ gleichförmige Verteilung auf den gemessenen Intensitäten und kann in der Theorie sogar approximativ durch einen globalen Offset auf den Intensitäten simuliert werden<sup>5</sup> [5], [41]. In der Konsequenz weisen Projektionen in Richtungen hoher Abschwächung den stärksten Fehler auf, da die geringe Restintensität nach dem Durchqueren des Objektes einen hohen Streuanteil besitzt. In den rekonstruierten Bildern verursacht die Streuung dunkle Schatten, die eine ähnliche Erscheinung haben wie Strahlaufhärtungsartefakte, welche im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

### 2.3.3 Strahlaufhärtung

Im Rahmen des Lambert-Beer'schen Gesetzes wurde in (2.6) bereits notiert, dass Abschwächungskoeffizienten  $\mu$  eine Abhängigkeit von der Energie  $E$  aufweisen [42]. Da die falsche Annahme, dass der Röntgenstrahl eine monochromatische Energie besitzt, in den meisten Rekonstruktionsalgorithmen jedoch vorausgesetzt wird, entstehen Artefakte.

Das polychromatische Spektrum des Röntgenstrahls kann sich auf dem Weg von Röntgenquelle zum Detektor verändern. Beim Durchqueren der Materie werden niedereenergetische Photonen der polychromatischen Strahlung mit einer höheren Wahrscheinlichkeit absorbiert als hochenergetische Photonen. Die Konsequenz ist, dass die mittlere Energie des Röntgenstrahls zunimmt und die Röntgenstrahlung damit „härter“ wird. Im weiteren Verlauf wird die hochenergetische Strahlung beim Durchdringen des Gewebes weniger abgeschwächt. Die Folge ist eine nicht-lineare Abhängigkeit der Gesamtabschwächung zur Dicke des absorbierenden Materials und eine vom Winkel abhängige mittlere Energie des Röntgenspektrums.

Dieser Effekt der Strahlaufhärtung spiegelt sich in den rekonstruierten Bildern in Form von dunklen Schattenartefakten wider, welche die größte Ausprägung in Richtung von

---

<sup>5</sup>Man beachte, dass dies nicht bedeutet, dass die Streuung unabhängig vom Material des zu scannenden Objektes ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass Streuung und insbesondere der Compton-Effekt auftritt, ist abhängig von der Elektronendichte des zu scannenden Materials. Der Elektronendichteunterschied zwischen den verschiedenen Materialien im menschlichen Körper ist jedoch gering.

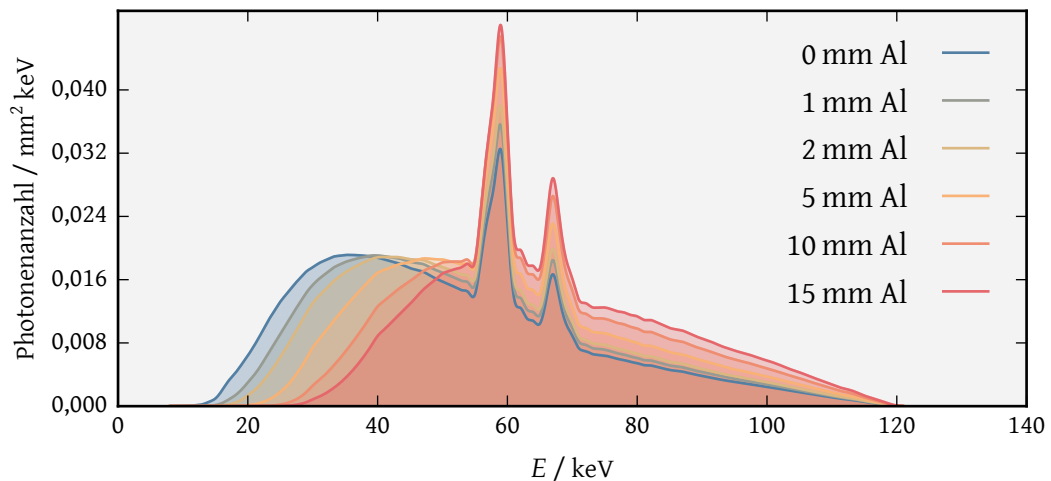


Abbildung 2.18: Die Veränderung des Röntgenspektrums einer Wolfram-Röntgenröhre nach Filterung mit Hilfe einer Aluminiumschicht der Stärke 1 mm, 2 mm, 5 mm, 10 mm und 15 mm. Die simulierte Röhrenspannung beträgt 120 kV. Alle dargestellten Werte basieren auf Daten, welche vom National Institute of Standards and Technology (NIST) bereitgestellt wurden und mit Algorithmen von John M. Boone et al. verarbeitet wurden [9].

hoher Abschwächung aufweisen [43]–[46]. Auf Seiten der Instrumentierung kann dieser Effekt mit Hilfe von physikalischen Filtern reduziert werden. Diese Filter werden in Form von Platten direkt hinter der Quelle positioniert und verursachen so eine geeignete Abschwächung des Strahles, um die niederenergetischen Photonen herauszufiltern. Als geeignetes Filtermaterial wird beispielsweise Aluminium oder Kupfer genutzt [6, S. 427]. In Abbildung 2.18 ist der Effekt einer Aluminiumplatte, welche vor die Quelle positioniert ist, zu sehen. Die Aluminiumplatte weist verschiedene Stärken zwischen 1 und 15 mm auf. Mit zunehmender Stärke ist eine Verschiebung der mittleren Energie zu einer höheren Energie erkennbar. Tabelle 2.1 zeigt die Verschiebung der mittleren Energie im Detail. Bei einer Beschleunigungsspannung von 120 kV weist das ungefilterte Spektrum eine mittlere Energie von ca. 51 keV auf, wohingegen das Spektrum nach einer Filterung durch eine 5 mm starke Aluminiumplatte schon eine deutlich höhere mittlere Energie von ca. 60 keV besitzt. Nach der Filterung mit Hilfe einer 15 mm starken Aluminiumplatte verschiebt sich die mittlere Energie weiter auf ca. 67 keV.

Materialstärke Al / mm	mittlere $E$ / keV
0	51,520
1	54,022
2	55,858
5	59,663
10	63,712
15	66,588

Tabelle 2.1: Die mittlere Energie einer Wolfram-Röntgenröhre nach Filterung mit Hilfe von Aluminium in verschiedenen Stärken bei einer Beschleunigungsspannung von 120 kV.

Zur Reduzierung von Strahlaufhärtingsartefakten ist es, abgesehen von der Hardwarefilterung, möglich, das polychromatische Spektrum des Röntgenstrahls mit in den Rekonstruktionsalgorithmus zu integrieren [14], [15], [47]. Dabei werden zumeist verschiedene Energien des Spektrums berücksichtigt, was einen hohen Rechenaufwand zur Folge hat. Durch den heutzutage vermehrten Einsatz von GPU-gestützten parallelen Algorithmen gewinnt diese Art der Artefaktreduzierung jedoch erst seit kurzer Zeit an Popularität.

### 2.3.4 Nicht-linearer Partialvolumeneffekt

Betrachtet man einen Röntgenstrahl, welcher auf ein einzelnes Detektorelement trifft, so kann dieser aufgrund der Breite des Strahles und des Detektorelements von verschiedenen nebeneinander liegenden Strukturen abgeschwächt werden. Sei wie in Abbildung 2.19 angenommen, dass es zwei Strukturen mit den Abschwächungskoeffizienten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gibt. Die Anfangsintensität  $I_0$  liegt dann nach Durchquerung der Struktur mit  $\mu_1$  in Form von  $I_1$  und nach Durchquerung der Struktur mit  $\mu_2$  in Form von  $I_2$  vor. Die meisten Rekonstruktionsalgorithmen erwarten in diesem Fall eine Mittlung der Projektionswerte in Form von

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{1}{2} \left( -\ln \frac{I_1}{I_0} - \ln \frac{I_2}{I_0} \right) = -\ln \sqrt{\frac{I_1 I_2}{I_0 I_0}}. \quad (2.37)$$

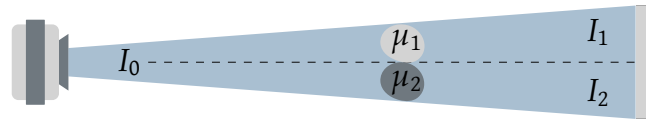


Abbildung 2.19: Schematische Darstellung für eine beispielhafte Konfiguration, welche einen Partialvolumeneffekt zur Folge hat. Der Röntgenstrahl mit der Intensität  $I_0$  trifft auf dem Weg zu einem Detektorelement auf zwei Strukturen mit unterschiedlichen Abschwächungskoeffizienten. Am Detektorelement müssen die eintreffenden Intensitäten  $I_1$  und  $I_2$  gemittelt werden.

Am Detektorelement werden jedoch die gemessenen Intensitäten gemittelt und anschließend durch Logarithmierung in Form von

$$p = -\ln \frac{I}{I_0} = -\ln \left( \frac{\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0}}{2} \right) \quad (2.38)$$

zur Gesamtabschwächung umgewandelt (vergleiche hierzu (2.7)). Da weiter die Intensitätswerte  $I_1$  und  $I_2$  physikalisch bedingt stets positiv sind, gilt

$$\frac{\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0}}{2} \geq \sqrt{\frac{I_1}{I_0} \frac{I_2}{I_0}}. \quad (2.39)$$

Folglich ist die Messung (2.38) in der Regel eine Unterabschätzung von  $(p_1 + p_2)/2$  [5].

Für den Fall, dass  $I_1 = I_2$ , entsteht durch die falsche Annahme in (2.37) kein Fehler, sind die beiden Intensitätswerte jedoch stark unterschiedlich, so verursacht diese Fehlabschätzung eine starke Variation in den Rohdaten. Da die Änderung in den Projektionswerten zudem winkelabhängig ist, ergeben sich Inkonsistenzen in der gesamten Messung. Diese zeichnen sich in den rekonstruierten Bildern durch unscharfe Kanten und Streifenartefakte aus.

### 2.3.5 Bewegungsartefakte

Für die Rekonstruktion eines Objektes sind Projektionswerte aus verschiedenen Winkeln notwendig, wobei die hinreichende Winkelspannweite dabei abhängig von der Geometrie des genutzten Tomographen ist. Unabhängig davon gilt jedoch stets, dass

### 2.3. ARTEFAKTE IN DER COMPUTERTOMOGRAPHIE

die aufgenommenen Daten konsistent zueinander sein müssen. Angenommen ein Objekt, welches die Größe eines einzelnen Pixels besitzt, bewegt sich während der Aufnahme. So befindet es sich unter dem Winkel  $\gamma_1$  an der Position  $\xi_1$  und unter dem Winkel  $\gamma_2$  an der Position  $\xi_2$  mit  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  und  $\xi_1 \neq \xi_2$ . In der Rekonstruktion hat dies zur Folge, dass das Objekt winkelabhängig durch die verschiedenen Projektionen an unterschiedlichen Positionen rekonstruiert wird. Folglich entsteht eine mehrfache Abbildung des Objektes im rekonstruierten Bild. Zusätzlich entstehen Streifenartefakte, welche die verschiedenen Positionen des bewegten Objektes verbinden.

Bewegungsartefakte treten am häufigsten bei Patienten auf, welche nicht in der Lage sind, sich während der Aufnahme still zu verhalten. Das Nutzen von Lagerungs- und Fixationshilfen kann in diesem Fall den Effekt reduzieren. Auch das Nutzen von Sedativa kann gegebenenfalls genutzt werden, um Bewegungen zu minimieren. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Aufnahmezeit, beispielsweise durch Eingrenzung des Aufnahmefeldes oder Erniedrigung der Rotationszeit, zu verringern.

Bei der Bildgebung von sich bewegenden Organen, wie zum Beispiel Herz oder Lunge, entstehen in der Regel Pulsationsartefakte, welche eine unscharfe Abbildung der Organe verursacht. Dieses Problem kann jedoch beispielsweise durch die Verwendung einer EKG-gesteuerten Aufnahme bewältigt werden. Hierbei werden Projektionen immer nur dann aufgenommen, wenn sich das Herz in der selben Phase befindet. Somit wird sichergestellt, dass sich das Herz nahezu an der gleichen Position befindet. Bevorzugt wird in diesem Fall die Diastole, da sich das Herz in dieser Phase kaum bewegt und sich in einem entspannten Zustand befindet [48]–[52].

#### 2.3.6 Aliasing

Das Nyquist-Theorem besagt, dass die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein muss wie die maximal darzustellende Bildfrequenz, damit es aus dem diskreten Signal wieder exakt rekonstruiert werden kann [53]. Wird dieses Theorem nicht eingehalten, so entstehen Aliasing-Artefakte im rekonstruierten Bild. Bei einer Unterabtastung im Sinne von zu wenig Winkelschritten bei der Aufnahme entstehen Streifenartefakte,

welche das gesamte Bild überlagern und in alle Richtungen weisen. Eine Unterabtastung im Sinne von zu wenig Projektionen pro Winkelschritt verursacht zirkuläre Muster, welche tangential zu starken Kanten verlaufen.

Das Ermitteln einer geeigneten Anzahl an Projektionen und Winkelschritten ist aufgrund der Abhängigkeit vom aufgenommenen Objekt, der Breite des Röntgenstrahles und dem genutzten Rekonstruktionsalgorithmus nicht trivial [5], [54]. Jedoch lassen sich sowohl für die Anzahl an Detektorelementen pro Aufnahmewinkel als auch für die Anzahl an Winkelabstufungen eine untere Grenze abschätzen [6, S.258]. Diese besagt, dass die Anzahl der Detektorelemente größer sein sollte als die doppelte Breite des FOVs, geteilt durch den kleinsten Durchmesser des Messobjektes, und dass die Anzahl an Winkelschritten mindestens so groß sein sollte wie  $\pi/2$  mal der Anzahl an Detektorelementen.

Begründet durch den diskreten Charakter der Aufnahme sind in der Praxis sehr häufig Aliasing-Artefakte präsent. Bei Aufnahmen mit Hilfe von modernen Computertomographen, welche Methoden wie den Flying-Focal-Spot oder Detektor-Offset ausnutzen, ist die Ausprägung dieser Artefakte jedoch meist sehr gering und nur in einer bestimmten Fensterung sichtbar [5], [55], [56].

### 2.3.7 Metallartefakte

Metallartefakte haben ihren Ursprung nicht in einem einzelnen physikalischen Effekt, sondern sind vielmehr eine Kombination der bereits vorgestellten Phänomene. Durch stark abschwächende Objekte, wie zum Beispiel Metallimplantate oder chirurgische Instrumente, werden die Effekte verstärkt, welche durch Strahlaufhärtung, nicht-linearem Partialvolumeneffekt, Streuung oder Rauschen verursacht werden.

In Abbildung 2.20 ist ein axialer CT-Schnitt eines Patienten mit einer doppelten Hüft-Totalendoprothese abgebildet. Deutlich sind Strahlaufhärtungsartefakte zu erkennen, welche die beiden Implantate verbinden. In der nahen Umgebung der Prothesen sind zusätzlich dunkle Schatten zu sehen, welche ihren Ursprung ebenfalls in der Strahlaufhärtung besitzen. Auch Artefakte, welche durch Streuung verursacht wurden, zeigen

### 2.3. ARTEFAKTE IN DER COMPUTERTOMOGRAPHIE

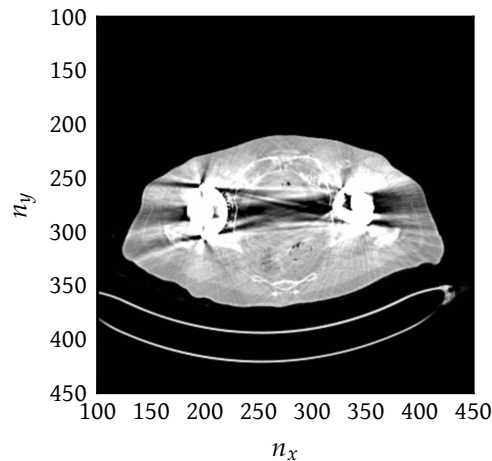


Abbildung 2.20: Rekonstruktion einer axialen Schicht auf Höhe des Beckens. Der untersuchte Patient besitzt eine doppelte Hüft-Totalendoprothese, welche die Ursache für verstärkte Streu-, Rausch- und Strahlauhfärtungsartefakte sind. Das rekonstruierte Bild ist in einer Fensterung mit  $WL = -200$  HU und  $WW = 1000$  HU dargestellt.

eine ähnliche Ausprägung. Darüber hinaus ist das gesamte rekonstruierte Bild überlagert von Streifenartefakten, die durch Rauschen und dem Partialvolumeneffekt hervorgerufen werden. Aliasingartefakte können in der dargestellten Fensterung nicht erkannt werden und sind in Anbetracht der starken Ausprägung von Streifen- und Schattenartefakten zu vernachlässigen.

Die extreme Manifestation der Artefakte sorgt dafür, dass das rekonstruierte Bild stark an diagnostischem Wert verliert. Speziell der Bereich zwischen den beiden Prothesen verliert deutlich an Informationen. So kann beispielsweise der Umriss der Prostata nicht mehr erkannt werden. Zusätzlich verhindern insbesondere in der Nähe der Implantate helle und dunkle Schattenartefakte eine genauere Differenzierung der Weichteilstrukturen.

Im Kapitel 4 wird der ALIR-Algorithmus vorgestellt, welcher eine Reduktion von Artefakten ermöglicht, indem Vorwissen über das Metallobjekt in einen iterativen Rekonstruktionsalgorithmus integriert wird. Im Rahmen der Evaluierung des Algorithmus werden verschiedene Korrekturverfahren aus der Literatur zum Vergleich herangezogen. Diese werden in Abschnitt 5.1 vorgestellt.

### 2.3.8 Unvollständige Daten

Ein unvollständig gefüllter Rohdatenraum kann aus den verschiedensten Gründen vorliegen. Ein defektes Dixel kann beispielsweise für eine komplette Spalte ohne Messdaten im Sinogramm sorgen. Im rekonstruierten Bild macht sich dies durch kreisförmige Artefakte bemerkbar. Schon der Ausfall eines einzelnen Elementes kann zu einem stark ausgeprägten Artefakt führen [57]–[59].

Bilder, welche von Aufnahmen resultieren, die nur in einem eingegrenzten Winkelbereich (weniger als  $180^\circ$ ) erstellt werden konnten, sind zumeist nicht in der Lage, Kanten in orthogonalen Richtungen zu den aufgenommenen Projektion darzustellen. Mit der Eingrenzung des Winkelbereiches wird beispielsweise in der Tomosynthese gearbeitet. Diese wird für Bildgebung der Mamma oder bei der Untersuchung von Muskel-Skelett-Erkrankungen genutzt [60]–[62].

Liegt ein Teil des zu scannenden Objektes außerhalb des FOVs, so fehlen Projektionen, welche für die korrekte Rekonstruktion des kompletten Objektes notwendig sind. Die dadurch entstehenden Artefakte werden als Truncation-Artefakte bezeichnet. Abbildung 2.21 zeigt eine schematische Darstellung, in welcher das Objekt über das FOV, welches in rot visualisiert ist, hinausragt. Die Folge ist, dass es immer Aufnahmewinkel gibt, für welche ein Teil des Objektes abgeschnitten ist. Für die korrekte Rekonstruktion des Objektes muss jedoch das gesamte Objekt in allen Winkelschritten sichtbar sein.

In Abbildung 2.22 ist das Sinogramm gezeigt, welches aus der oben beschriebenen Konfiguration resultiert. Deutlich ist zu erkennen, dass die Messdaten bis an den Rand des Detektors reichen. Die Projektionswerte nahe des Randes fallen nicht auf Null ab und indizieren daher eine Größe des Objektes, welche nicht vollständig von dem verwendeten Detektor abgebildet werden kann. Mit Hilfe der gefilterten Rückprojektion ist in dieser Form eine eindeutige Lösung für die Region außerhalb des FOVs nicht bestimmbar. Auf der rechten Seite in Abbildung 2.22 ist die Rekonstruktion gezeigt, welche aus den aufgenommenen Daten resultiert. Ausschließlich die Bildinformationen innerhalb des FOVs konnten korrekt rekonstruiert werden, da sie für alle Winkel in den Projektionsdaten enthalten waren. Das FOV ist in Form eines hellen kreisförmigen Artefakts zu erkennen. Außerhalb dieser Region kann das Objekt nur erahnt werden.

### 2.3. ARTEFAKTE IN DER COMPUTERTOMOGRAPHIE

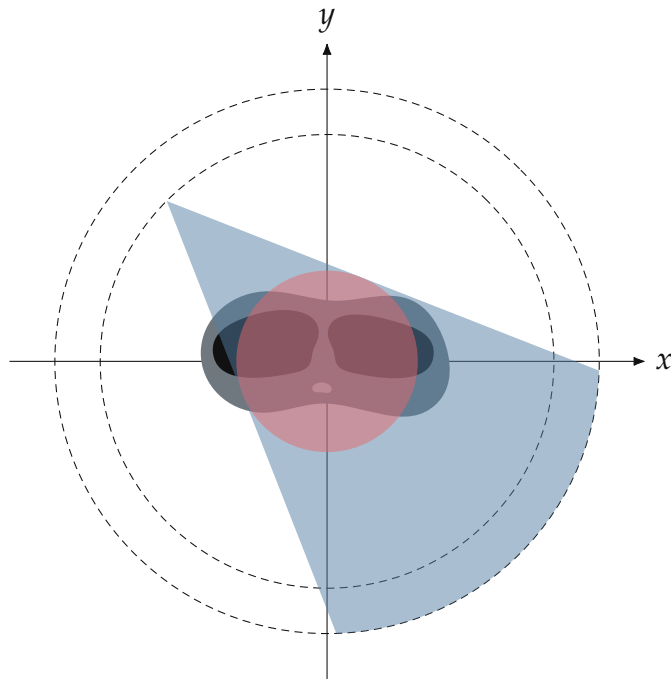


Abbildung 2.21: Schematische Darstellung für den Fall, dass das zu scannende Objekt über das FOV, hier dargestellt in rot, hinausragt. Die Folge ist, dass nicht für jeden Aufnahmewinkel das gesamte Objekt abgebildet werden kann.

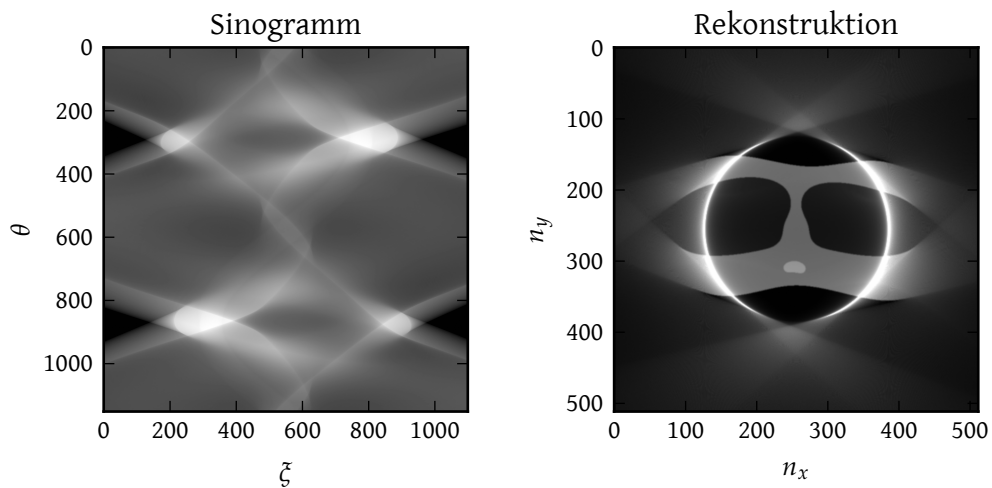


Abbildung 2.22: Unvollständiges Sinogramm, welches aus der Konfiguration in Abbildung 2.21 resultiert. Die fehlenden Informationen im Sinogramm führen zu ausgeprägten Truncation-Artefakten im rekonstruierten Bild. Nur der Bereich, welcher sich im FOV befindet, konnte rekonstruiert werden.



## Kapitel 3

# Mathematische und numerische Methoden

In Intelligenztests wird oft gefordert, eine gegebene Folge von Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  fortzusetzen. Aus mathematischer Sicht besitzt eine solche Folge, sofern keine weiteren Nebenbedingungen gegeben sind, meist keine eindeutige Funktionsvorschrift. Die Folge  $1, 7, 16, 28, 43, \dots$  besitzt beispielsweise die logische Fortsetzung  $61, 82, 106, \dots$ , aber auch die periodische Fortsetzung  $1, 7, 16, \dots$ .<sup>1</sup> Probleme solcher Art gehören in das mathematische Gebiet der inversen Probleme. Das hier gegebene inverse Problem korrespondiert in diesem Fall zu dem direkten Problem, eine gegebene Funktionsvorschrift  $a : i \mapsto a_i$  an geforderten Stellen  $i \in \mathbb{N}$  auszuwerten. Die Funktionsvorschrift ist hierbei also verantwortlich für die Generierung einer bestimmten Zahl  $a_i$ . Im inversen Problem wird also die unbekannte Ursache für eine bekannte Wirkung in Form von einer gegebenen Zahlenfolge gesucht. Im Allgemeinen sind zwei Probleme immer dann invers zueinander, wenn die Formulierung des einen die Lösung des anderen benötigt. Im Folgenden wird man sehen, dass auch die Probleme, welche zur Rekonstruktion von computertomographischen Bildern gelöst werden müssen, zum Kerngebiet der inversen Probleme gehören und nicht immer eine eindeutige Lösung besitzen.

---

<sup>1</sup>Für die logische Fortsetzung betrachtet man die Differenzen von aufeinanderfolgenden Zahlen:  $6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$

Im folgenden Kapitel werden direkte und inverse Problemstellungen vorgestellt, welche dabei helfen, die Rekonstruktion von computertomographischen Bildern zu beschreiben. Des Weiteren wird betrachtet, wie das Problem der Bildrekonstruktion als Optimierungsaufgabe formuliert werden kann. Hierzu werden zunächst fundamentale Begrifflichkeiten eingeführt. Anschließend werden Verfahren vorgestellt, welche zum Lösen der formulierten Optimierungsaufgaben verwendet werden. Abschließend werden Grundlagen der Bildregistrierung diskutiert, welche für verschiedene Schritte im ALIR-Algorithmus (siehe Kapitel 4) benötigt werden.

### 3.1 Inverse Probleme

Da der Fachbereich der inversen Probleme eines der mathematischen Kerngebiete für die Rekonstruktion von tomographischen Bildern darstellt, werden im Folgenden grundlegende Begriffe eingeführt und Sachverhalte erläutert.

In Bezug auf die Computertomographie kann man das Bestimmen von Projektionsdaten mit Hilfe der Radontransformation bzw. das Durchführen einer computertomographischen Aufnahme als direktes Problem bezeichnen. Die ermittelten Projektionsdaten repräsentieren hierbei die Wirkung einer Ursache, welche in Form von Abschwächung auftritt. Das hierzu korrespondierende inverse Problem hingegen ist dann formuliert als das Ermitteln der Abschwächungskoeffizienten basierend auf den gemessenen Projektionsdaten. Das Problem entspricht also der Identifizierung einer unbekanntes Ursache in Form von Abschwächungskoeffizienten in Abhängigkeit einer bekannten Wirkung, dargestellt durch die gemessenen Projektionsdaten. Für eine exakte Formulierung der beiden Probleme sei die folgende Definition gegeben.

**Definition 3.1.1.** Sei  $k : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von dem Raum  $X$  in den Raum  $Y$ . Mit dem **direkten Problem** wird das Ermitteln von  $k(x)$  für  $x \in X$  bezeichnet. Das **inverse Problem** beschreibt hingegen das Berechnen von  $x \in X$ , sodass  $k(x) = y$  für  $y \in Y$  gilt.

Ein fundamentaler Unterschied zwischen direkten und inversen Problemen besteht oft in der Schwierigkeit, diese zu lösen. Hierzu führte Jacques Hadamard im Jahr 1923 den Begriff des gut gestellten und des schlecht gestellten Problems ein [63].

**Definition 3.1.2.** Sei  $k : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den normierten Räumen  $X$  und  $Y$ . Dann heißt das Problem  $(k, X, Y)$  **gut gestellt** (engl. well-posed), wenn jede der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- (i) Existenz: Für jedes  $y \in Y$  gibt es (mindestens) ein  $x \in X$ , sodass  $k(x) = y$ .
- (ii) Eindeutigkeit: Für jedes  $y \in Y$  gibt es maximal ein  $x \in X$ , sodass  $k(x) = y$ .
- (iii) Stabilität: Die inverse Abbildung  $k^{-1} : Y \rightarrow X$  ist stetig.

Ist mindestens eine dieser Bedingungen verletzt, so bezeichnet man das Problem  $(k, X, Y)$  als **schlecht gestellt** (engl. ill-posed).

*Bemerkung.* Die Stabilitäts- oder Stetigkeitsbedingung in Definition 3.1.2 sorgt dafür, dass kleine Störungen in  $y$  auch nur kleine Störungen in  $x$  verursachen [64]. Ist diese Bedingung verletzt, so können kleine Änderungen in  $y$  zu starken Veränderungen in  $x$  führen. Diese Eigenschaft ist gerade hinsichtlich verrauschter Messdaten von Bedeutung.

Hadamard ging zunächst davon aus, dass mathematische Modelle, welche physikalische Vorgänge beschreiben, immer auf gut gestellte Probleme zurückzuführen sind. Sollte sich jedoch ein schlecht gestelltes Problem ergeben, so kann dies nur an einem ungenauen oder fehlerhaften Modell liegen. Diese Vermutung erwies sich jedoch später als falsch. Inverse Probleme sind in der Regel schlecht gestellt. Hierbei ist die Eigenschaft der Stabilität meist von zentraler Bedeutung. Ist sie nicht erfüllt, so ist es praktisch unmöglich, eine exakte Lösung für ein gegebenes Problem zu finden. In der Realität wird die Stabilität oft durch Störungen in Form von Rauschen in der Messung beeinträchtigt. Hängt die Lösung eines Problems nicht kontinuierlich von den Messdaten ab, so hat die berechnete Lösung im Allgemeinen nichts mit der wirklichen Lösung zu tun. Um dieses Problem zu bewältigen, ist es notwendig, zusätzliche Informationen über die Lösung bereitzustellen. Diese Zusatzinformationen werden typischerweise in Form von Nebenbedingungen oder mittels einer Regularisierung in die Problemstellung integriert. Hierbei wird die Regularisierung im Wesentlichen dafür verwendet, die Schlechtgestelltheit des Problems zu bewältigen. Nebenbedingungen hingegen werden zumeist eingesetzt, um die Eindeutigkeit einer Lösung zu erzwingen.

In Bezug auf die Computertomographie stellt die Forderung nach der Existenz kein Hindernis dar. Die Forderung nach Eindeutigkeit kann jedoch in der Praxis leicht verletzt werden. Insbesondere eine Beeinträchtigung durch nicht konsistente Daten, welche beispielsweise durch Messrauschen verursacht wurden, kann hier ausschlaggebend sein. Auch Projektionen, welche durch Metall verlaufen, können durch Totalabsorption Inkonsistenzen hervorrufen, welche dazu führen, dass Linienintegrale nicht mehr eindeutig und korrekt abgebildet werden können. Die Forderung nach Stabilität bzw. die Forderung nach einer stetigen inversen Abbildung wird in der Praxis durch viele Faktoren beeinträchtigt. Insbesondere Messrauschen beim Akquirieren der Projektionsdaten verhindert hier das Erfüllen der Bedingung. Weitere Faktoren, welche die Stabilität beeinträchtigen, sind Streuung, der Partialvolumeneffekt sowie Aliasing und unvollständige Daten. Im Speziellen verhindern insbesondere auch Projektionen, welche durch Metall verlaufen, das Einhalten der Forderung.

Die hier beschriebenen Faktoren sind grundlegend und basieren auf den physikalischen Eigenschaften der computertomographischen Bildgebung. Dass es sich bei der Rekonstruktion von computertomographischen Bildern um ein schlecht gestelltes Problem handelt, kann jedoch auch aus einer mathematischen Betrachtung heraus gezeigt werden. Die zweidimensionale Radontransformation basiert auf einer Menge von Linienintegralen, welche unter verschiedenen Winkeln und Distanzen zum Ursprung gebildet werden (siehe hierzu Abschnitt 2.2.2). Bei Linienintegralen handelt es sich aus mathematischer Sicht um einen kompakten Operator. Kompakte Operatoren mit finitem Bildbereich führen stets zu einem schlecht gestellten Problem [64, S. 20]. Folglich handelt es sich auch bei der Rekonstruktion von tomographischen Bildern um ein schlecht gestelltes Problem.

Eine Problemstellung, wie sie in Definition 3.1.1 formuliert ist, ist in der Realität daher unpraktikabel. Vielmehr ist anzunehmen, dass anstatt einer exakten Messung  $y \in Y$  nur verrauschte Daten  $y^\delta$  mit

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta \quad (3.1)$$

und dem Fehler  $\delta > 0$  zur Verfügung stehen. Die hieraus resultierende Gleichung

$$k(x) = y^\delta \quad (3.2)$$

ist im Allgemeinen nicht mehr lösbar, da grundsätzlich nicht davon auszugehen ist, dass  $y^\delta$  im Wertebereich  $\mathcal{B}(k)$  von  $k$  liegt. Daher ist es nur möglich, eine approximative Lösung  $x^\delta \in X$  zu suchen. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, eine Minimum-Norm-Lösung zu bestimmen. Hierzu wird ein  $x^\delta$  gesucht, welches die Gleichung

$$x^\delta = \arg \min_{x \in X} \|k(x) - y^\delta\|_2^2 \quad (3.3)$$

erfüllt. Durch diese Umformulierung des Problems kann eine Lösung erzwungen werden. Jedoch deutet ein kleines Residuum hierbei nicht zwangsläufig auf eine Nähe zur exakten Lösung hin.

## 3.2 Optimierung

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass das Lösen eines inversen Problems auf ein Minimierungsproblem reduziert werden kann. Auch die Rekonstruktion von tomographischen Bildern lässt sich auf ein Optimierungsproblem zurückführen. Im Folgenden wird nun eine kurze Einführung in das Gebiet der Optimierung gegeben. Die hier gegebenen Ausführungen sind an [65] und [66] angelehnt, wobei sich beide Lektüren auch für eine detailliertere Auseinandersetzung mit dem Themenbereich eignen.

Aus mathematischer Sicht beschreibt die Optimierung das Finden eines minimalen oder maximalen Funktionswertes einer Funktion  $f : X \rightarrow Y$ . In diesem Zusammenhang wird die Funktion  $f$  als **Zielfunktion** bezeichnet. Einleitend sei hierzu folgendes Beispiel gegeben.

**Beispiel 3.2.1.** Sei durch  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 e^{1-x_2} \quad (3.4)$$

eine Zielfunktion gegeben, welche es zu minimieren gilt. Bei näherer Betrachtung ist ersichtlich, dass die Funktion an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$  ihren kleinst möglichen Funktionswert annimmt. Somit ist  $f(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$  minimal.

Formal wird das Problem der Minimierung mit

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

notiert.

*Bemerkung.* Das Problem der Maximierung einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  kann leicht in eine Minimierung umgewandelt werden, indem das Problem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} -f(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

gelöst wird. Daher wird im Folgenden nicht weiter auf die Maximierung von Funktionen eingegangen.

In vielen Anwendungsfällen gilt es, nicht nur eine Zielfunktion zu minimieren, sondern ebenfalls zusätzliche Restriktionen an die Inversionsvariable zu erfüllen. Diese zusätzlichen Einschränkungen fließen als sogenannte harte Nebenbedingungen in die Problemformulierung ein. So kann das Problem (3.5) durch die folgende Einschränkung erweitert werden.

**Beispiel 3.2.2.** Minimiere die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 e^{1-x_2}, \quad (3.7)$$

unter der **Nebenbedingung**, dass

$$10x_2 - (x_1 - 3)^2 \geq 0. \quad (3.8)$$

Da die Lösungsmenge der Funktion nun durch die Nebenbedingung eingeschränkt ist, kann die Lösung  $\mathbf{x} \approx (2,08, 0,09)$  nicht mehr einfach abgelesen werden.

Abbildung 3.1 zeigt einen Konturplot für die Funktion aus Beispiel 3.2.1. Zusätzlich ist die nichtzulässige Menge, welche sich aus der Nebenbedingung aus Beispiel 3.2.2 ergibt, in grün dargestellt. Der Vollständigkeit halber sei das allgemeine Optimierungsproblem für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in folgender Definition geben.

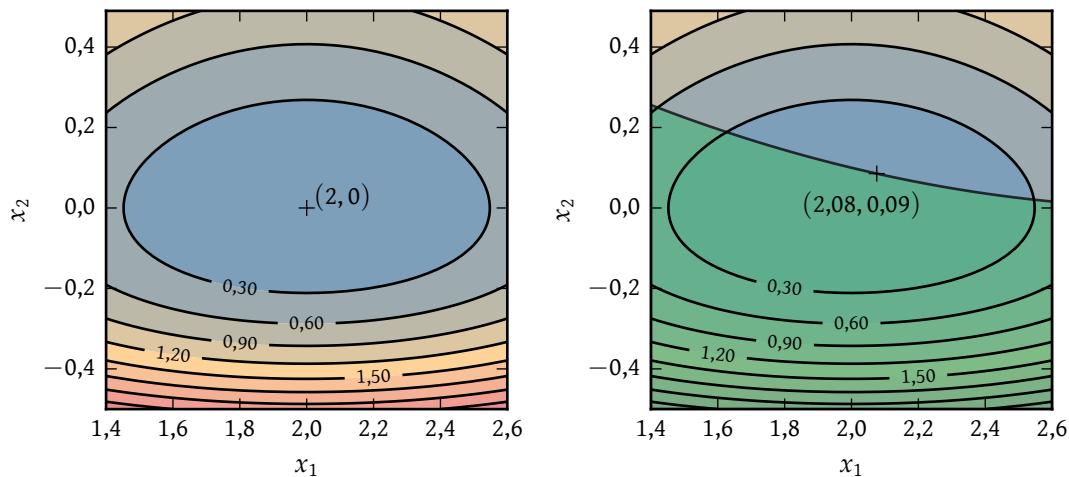


Abbildung 3.1: Funktion aus Beispiel 3.2.1 mit Minimum an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$  und die Lösung aus Beispiel 3.2.2. Die aus der Nebenbedingung resultierenden, nichtzulässigen Werte sind in grün hervorgehoben.

**Definition 3.2.1.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann ist das **Optimierungsproblem** gegeben als

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (3.9)$$

sodass

$$c_i(\mathbf{x}) = 0, \text{ mit } i \in \mathcal{E}, \quad (3.10)$$

$$c_i(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ mit } i \in \mathcal{I}. \quad (3.11)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{E}$  die Menge von Indizes für Gleichheitsbedingungen (engl. equality constraints) und  $\mathcal{I}$  die Menge von Indizes für Ungleichheitsbedingungen (engl. inequality constraints).

*Bemerkung.* Für Beispiel 3.2.2 gilt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E} = \emptyset$  und  $|\mathcal{I}| = 1$ , wobei  $|\cdot|$  die Mächtigkeit einer Menge bezeichnet.

**Definition 3.2.2.** Sei  $\mathcal{D}(f)$  der Definitionsbereich von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  und  $\mathcal{N}(\mathbf{x}, r)$  eine Nachbarschaft um  $\mathbf{x}$  mit maximalen Abstand  $r$ , dann

(i) heißt der Punkt  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}(f)$  **lokaler Minimalpunkt** von  $f$ , falls

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}, r), \quad (3.12)$$

(ii) heißt der Punkt  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}(f)$  **strikt lokaler Minimalpunkt**, falls

$$f(\mathbf{x}) > f(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}, r), \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.13)$$

(iii) heißt der Punkt  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}(f)$  **globaler Minimalpunkt**, falls

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(f), \quad (3.14)$$

(iv) heißt der Punkt  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}(f)$  **strikt globaler Minimalpunkt**, falls

$$f(\mathbf{x}) > f(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(f), \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}} \quad (3.15)$$

gilt.

Die in Beispiel 3.2.1 und 3.2.2 betrachtete Funktion besitzt ausschließlich einen strikten globalen Minimalpunkt. Sollte die Funktion jedoch mit Messrauschen oder Messfehlern behaftet sein, so können leicht viele, sogar bis zu unendlich viele zusätzliche lokale Minimalpunkte entstehen. Diese Tatsache kann das Finden eines globalen Minimums für einen Optimierungsalgorithmus erheblich erschweren, da er leicht in einem lokalen Minimum „festsitzen“ kann.

Eine eindeutige Lösung für ein gegebenes Optimierungsproblem kann man effektiv meist nur für Funktionen mit gewissen Konvexitätseigenschaften bestimmen. So ist beispielsweise (3.4) eine konvexe Funktion, für welche gilt, dass jeder lokale Minimalpunkt auch ein globaler Minimalpunkt ist [66, S. 9 ff.]. Für eine genauere Erläuterung sei hierzu die folgende Definition gegeben.

**Definition 3.2.3.** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mit einer nichtleeren und konvexen Menge  $C \subset D$  heißt **konvex** auf  $C$ , wenn

$$f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}) \quad (3.16)$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  und  $t \in [0, 1]$  gilt. Die Funktion heißt **strikt konvex** auf  $C$ , wenn

$$f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) < (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}) \quad (3.17)$$

mit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  und  $t \in ]0, 1[$  gilt.

Veranschaulicht ist dieser Zusammenhang in Abbildung 3.2. Für die strikt konvexe Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 3)^2$  liegt jeder Punkt auf der Verbindungsstrecke  $[(x, f(x)), (y, f(y))]$  oberhalb der Funktion.

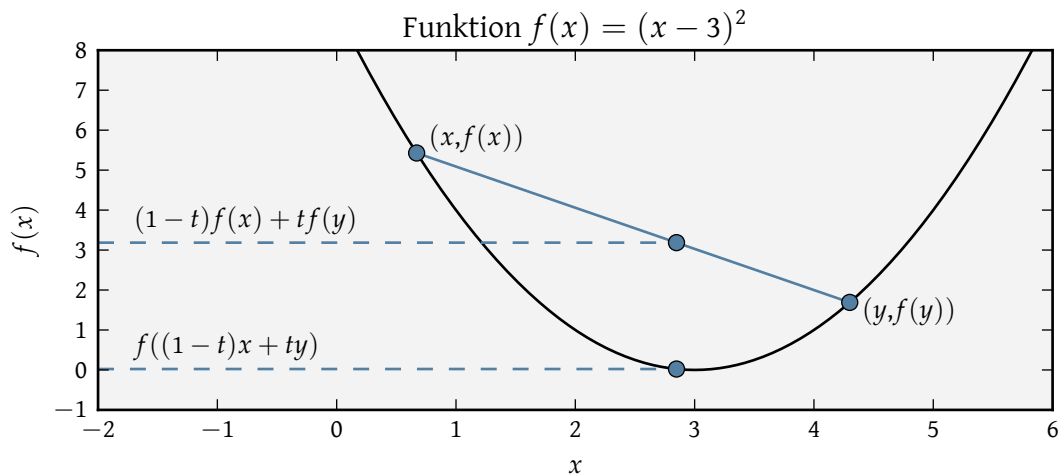


Abbildung 3.2: Eine strikt konvexe Funktion. Jeder Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Funktion  $f(x) = (x - 3)^2$  liegt oberhalb dieser Funktion.

Mit Hilfe bestimmter Eigenschaften bezüglich der Differenzierbarkeit von Funktionen sollen nun Verfahren zum Bestimmen von Minimalpunkten hergeleitet werden. Hierzu seien zunächst folgende Theoreme gegeben.

**Theorem 3.2.1** (Notwendige Bedingung erste Ordnung). Ist  $\hat{\mathbf{x}}$  ein lokaler Minimalpunkt von  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und ist  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ , dann gilt

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (3.18)$$

Für den Beweis sei auf [65, S. 14 ff.] verwiesen.

**Definition 3.2.4.** Wenn die notwendige Bedingung erster Ordnung für  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt ist, so heißt  $\hat{\mathbf{x}}$  **stationärer Punkt** von  $f$ .

*Bemerkung.* Nach Definition 3.2.4 ist jeder lokale Minimalpunkt auch ein stationärer Punkt.

Für die notwendige Bedingung zweiter Ordnung sei der Vollständigkeit halber die folgende Definition gegeben.

**Definition 3.2.5.** Eine quadratische Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **positiv definit**, wenn  $\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} > 0$  für alle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{p} \neq 0$  gilt und **positiv semidefinit**, wenn  $\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} \geq 0$ . Analog heißt  $B$  **negativ definit**, wenn  $\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} < 0$  für alle  $\mathbf{p} \neq 0$  gilt und **negativ semidefinit**, wenn  $\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} \leq 0$  für alle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  gilt.

**Theorem 3.2.2** (Notwendige Bedingung zweiter Ordnung). Ist  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  ein lokaler Minimalpunkt von  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ , dann ist  $\nabla^2 f(\hat{\mathbf{x}})$  positiv semidefinit.

Der Beweis kann [65, S. 15] oder [66, S. 43] entnommen werden.

Bezogen auf die Beispielfunktion (3.4) zeigt sich, dass sich der Gradient

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ -2e^{1-x_2}(x_2 - 2)x_2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$  mit  $\nabla f(2, 0) = 0$  zu Null ergibt und dass die zweite Ableitung, oder **Hesse-Matrix**,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2e^{1-x_2}(x_2^2 - 4x_2 + 2) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$ , mit

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4e \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

positiv semidefinit bzw. sogar positiv definit ist. Somit sind beide notwendigen Bedingungen für (3.4) an der Stelle  $\mathbf{x} = (2, 0)$  erfüllt.

Eine einfache Beispielfunktion in der Form von  $f(x) = x^3$  für den Punkt  $x = 0$  zeigt jedoch, dass die beiden notwendigen Bedingungen nicht zwangsläufig zu einem Minimalpunkt führen. Eine Verschärfung der beiden Bedingungen führt zu der nun folgenden hinreichenden Bedingung, welche zur Identifikation von Extrema genügt.

**Theorem 3.2.3** (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung). Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  ein lokaler Minimalpunkt mit  $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$  und sei  $\nabla^2 f(\hat{\mathbf{x}})$  positiv definit, dann ist  $\hat{\mathbf{x}}$  strikter lokaler Minimalpunkt von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

Der Beweis kann in [65, S. 16] und [66, S. 44 ff.] nachgelesen werden. Eine weitere Betrachtung von (3.4) zeigt die Wichtigkeit dieses Theorems, da  $\mathbf{x} = (2, 0)$  nun eindeutig als strikter lokaler Minimalpunkt identifiziert werden kann.

Nach dieser theoretischen Betrachtung der Grundlagen im Bereich der Optimierung sollen nun numerische Optimierungsverfahren zur Bestimmung von Minimalpunkten eines gegebenen Problems diskutiert werden. Alle numerischen Verfahren haben es gemein, dass mit einem Startpunkt  $\mathbf{x}^{(0)}$  begonnen wird. Dieser wird entweder vom Benutzer angegeben oder er wird vom jeweiligen Algorithmus durch zufällige oder systematische Verfahren bestimmt. Ein Nutzer, welcher die Problemstellung bzw. die Zielfunktion  $f(\mathbf{x})$  kennt, ist hierbei meist in einer guten Position, ein  $\mathbf{x}^{(0)}$  zu bestimmen, welches eine gute Abschätzung für die korrekte Lösung ist.

Ausgehend von einem gegebenen Startpunkt  $\mathbf{x}^{(0)}$  besteht die Möglichkeit, iterativ eine Folge  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^l$  mit dem Ziel  $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$  zu bestimmen. Optimierungsalgorithmen mit dieser Eigenschaft werden in der Literatur als Abstiegsverfahren bezeichnet. Der Optimierungsprozess wird meist dann abgebrochen, wenn es keine weitere Veränderung in den Iterationen gibt bzw. kein  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  gefunden werden kann, welches  $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$  erfüllt. Basierend auf der Art und Weise, wie man von der Iterierten  $\mathbf{x}^{(k)}$  auf  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  kommt, lassen sich gängige Verfahren in zwei Kategorien aufteilen: in die sogenannten Trust-Region-Verfahren und Line-Search-Verfahren, welche auch Verfahren mit Schrittweitensteuerung genannt werden. Algorithmen, welche auf einen Vertrauensbereich (engl. trust region) basieren, werden im Laufe dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Für weitere Informationen sei jedoch auf [65] verwiesen.

### 3.2.1 Suchrichtungen für Abstiegsverfahren

Bei Abstiegsverfahren handelt sich um Optimierungsverfahren, welche zur Ermittlung von  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  eine Abstiegsrichtung  $\mathbf{d}^{(k)}$  mit

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \forall \sigma^{(k)} \in ]0, s^{(k)}] \quad (3.22)$$

verwenden. Hierbei beschreibt  $\sigma^{(k)}$  eine Schrittweite, welche im Allgemeinen so gewählt werden sollte, dass der neue Punkt  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$  eine möglichst große Abnahme der Zielfunktion erzielt. Der Begriff der Abstiegsrichtung ist formal gegeben durch die folgende Definition [66, S. 68].

**Definition 3.2.6.** Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $\mathbf{x}$ , dann heißt ein Vektor  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  **Abstiegsrichtung** von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}$ , wenn  $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$  ist.

Ausgehend von dieser Definition, ergibt sich eine naheliegende Suchrichtung für Iteration  $k$  in Form des steilsten Abstieges  $\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ . Denn sofern  $f$  differenzierbar ist, gilt

$$\nabla f(\mathbf{x})^T (-\nabla f(\mathbf{x})) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 < 0. \quad (3.23)$$

Ausgehend von Definition 3.2.6 handelt es sich bei  $\mathbf{d} = -\nabla f$  also immer um eine Abstiegsrichtung.

Dass es sich bei  $\mathbf{d} = -\nabla f$  wirklich um den steilsten Abstieg handelt, kann gezeigt werden, indem das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n} \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}, \quad (3.24a)$$

$$\text{sodass } \|\mathbf{d}\| = 1 \quad (3.24b)$$

gelöst wird. Da  $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{d}\| \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta$  gilt, wobei  $\theta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{d}$  und  $\nabla f(\mathbf{x})$  ist, sieht man leicht, dass das Minimum bei  $\cos \theta = -1$  angenommen wird. Somit ergibt sich

$$\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|. \quad (3.25)$$

Abbildung 3.3 zeigt den Weg, welcher angenommen wird, wenn man bei einem Optimierungsverfahren die Richtung des negativen Gradienten als Suchrichtung verwendet. Gestartet wurde der Algorithmus mit  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, 44)$ . Auch wenn der steilste Abstieg auf dem ersten Blick als beste Suchrichtung erscheint, zeigt die Praxis, dass die Methode des steilsten Abstieges bei ungünstig formulierten Problemen zu langen Laufzeiten führen kann. Weiter kann jedoch gezeigt werden, dass bei einer hinreichend kleinen Schrittweite, jede Abstiegsrichtung mit einem Winkel kleiner als  $\pi/2$

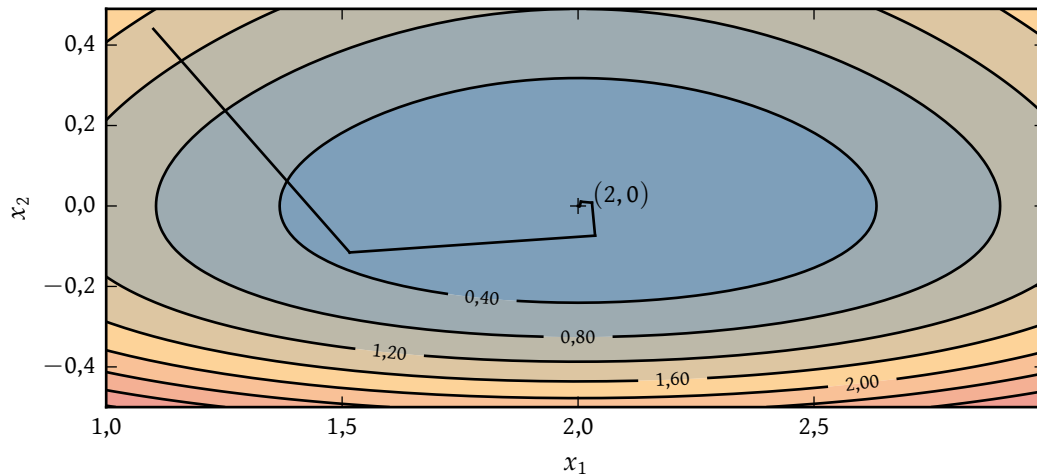


Abbildung 3.3: Suchrichtung für die Minimierung der Funktion aus Beispiel 3.2.1 basierend auf dem negativen Gradienten.

zwischen der Suchrichtung  $\mathbf{d}$  und  $-\nabla f(\mathbf{x})$  eine Verkleinerung des Funktionswertes der Zielfunktion bewirkt. Der Beweis hierfür kann in [65, S. 22] nachgelesen werden.

Durch Verwendung der Hesse-Matrix lässt sich eine weitere wichtige Suchrichtung herleiten. Ausgehend von der Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}) \approx f(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{d}^{(k)T} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(k)T} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} \quad (3.26)$$

ergibt sich mit der Annahme, dass  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$  positiv definit ist, die **Newton-Richtung**. Eine Minimierung von (3.26) bezüglich  $\mathbf{d}^{(k)}$  führt durch Nullsetzen der Ableitung auf

$$\mathbf{d}^{(k)} = -(\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.27)$$

*Bemerkung.* Die Schrittweite  $\sigma^{(k)}$  wurde hier vernachlässigt bzw. wurde  $\sigma^{(k)} = 1$  gesetzt. Befindet man sich in der Nähe eines Minimalpunktes, so kann es jedoch vorkommen, dass  $f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}) > f(\mathbf{x}^{(k)})$  gilt. Um eine Abstiegsrichtung zu erhalten, müsste in diesem Fall eine hinreichend kleine Schrittweite  $\sigma^{(k)} > 0$  gewählt werden. Dieser Ansatz führt auf das sogenannte gedämpfte Newton-Verfahren [66, S. 111].

Ein Suchpfad für die Minimierung von (3.4), welcher auf der Newton-Richtung basiert, ist in Abbildung 3.4 gezeigt. Im Vergleich zur Suchrichtung, welche nur auf dem ne-

gativen Gradienten beruht, konnte hier das Optimum in weniger Schritten gefunden werden. Ein großer Nachteil bei einer Optimierung mit Hilfe der Newton-Richtung ist

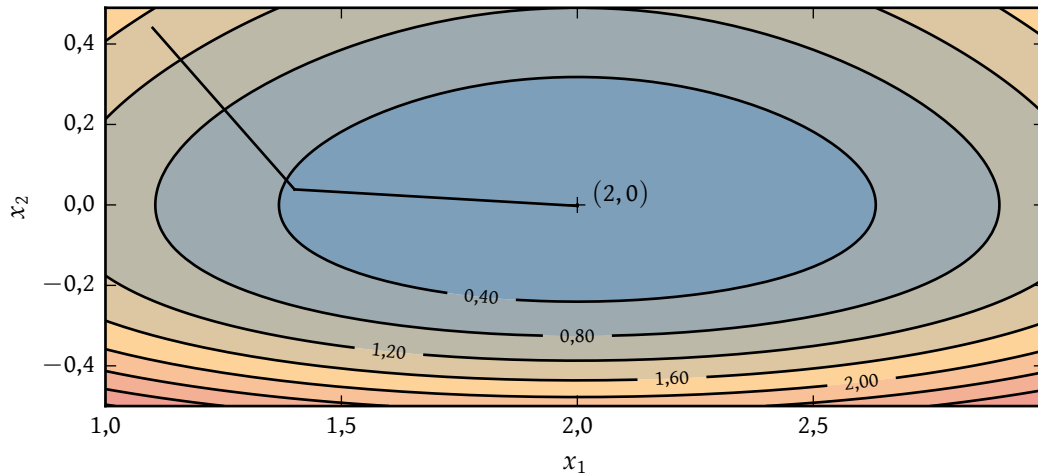


Abbildung 3.4: Suchrichtung für die Minimierung der Funktion aus Beispiel 3.2.1 basierend auf der Newton-Richtung aus (3.27).

die Tatsache, dass die Hesse-Matrix der Zielfunktion in jeder Iteration  $k$  berechnet werden muss. Dies ist jedoch in der Regel aufwendig und sehr rechenintensiv.

Eine gute Alternative bieten Quasi-Newton-Verfahren, welche statt der exakten Hesse-Matrix  $\nabla^2 f$  eine Approximation  $\mathbf{B}$  verwenden. Die Matrix  $\mathbf{B}^{(k)}$  wird hierbei meist in jedem Iterationsschritt aktualisiert, um Informationen der aktuellen Iteration  $k$  mit einfließen zu lassen. Unter Berücksichtigung des Rechenaufwandes soll der Übergang von  $\mathbf{B}^{(k)} \rightarrow \mathbf{B}^{(k+1)}$  leicht zu vollziehen sein. Er basiert in der Regel auf einer Eigenschaft des Gradienten, welche Informationen über die zweite Ableitung in Richtung der Suchrichtung liefert. Genauer kann man mit Hilfe des Taylor-Theorems die Näherung

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) \approx \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.28)$$

der Hesse-Matrix herleiten [65, S. 24]. Eine Approximation  $\mathbf{B}^{(k+1)}$  wird nun so gewählt, dass sie diese Eigenschaft der wahren Hesse-Matrix imitiert. Formal bedeutet dies, dass

$$\mathbf{B}^{(k+1)}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.29)$$

erfüllt sein muss. Üblicherweise werden neben der Bedingung in (3.29) noch weitere Eigenschaften für die Matrix  $\mathbf{B}$  gefordert. Motiviert durch die Symmetrieeigenschaft der Hesse-Matrix liegt es beispielsweise nahe, auch eine symmetrische Matrix  $\mathbf{B}$  zu fordern. Die **Quasi-Newton Suchrichtung** erhält man, indem die Approximation  $\mathbf{B}$  anstatt der Hesse-Matrix in (3.27) eingesetzt wird. Somit erhält man die neue Suchrichtung

$$\mathbf{d}^{(k)} = -(\mathbf{B}^{(k)})^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.30)$$

In Abbildung 3.5 ist der Suchpfad eines Quasi-Newton-Verfahrens dargestellt. Im Vergleich zum Newton-Verfahren wurden zum Finden des Minimalpunktes mehr Iterationen benötigt. Der Rechenaufwand konnte jedoch stark reduziert werden.

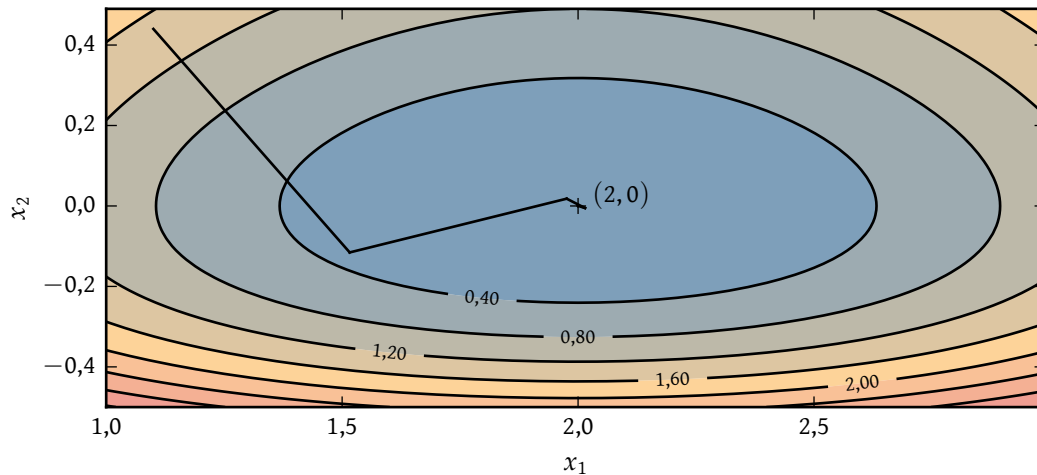


Abbildung 3.5: Suchrichtung für die Minimierung der Funktion aus Beispiel 3.2.1 basierend auf der Quasi-Newton-Richtung aus (3.30).

Ein Quasi-Newton-Verfahren, welches in der Augmented Likelihood Image Reconstruction Verwendung findet, wird im Abschnitt 3.2.4 genauer erläutert.

### 3.2.2 Schrittweitenbestimmung

Ausgehend von einer bekannten Suchrichtung soll nun die Frage beantwortet werden, wie weit man entlang dieser Suchrichtung gehen sollte. Eine optimale Schrittweite  $\sigma^{(k)}$

kann gefunden werden, indem das Optimierungsproblem

$$\min_{\sigma^{(k)}} f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}), \quad (3.31a)$$

$$\text{sodass } \sigma^{(k)} > 0 \quad (3.31b)$$

für ein gegebenes  $\mathbf{d}^{(k)}$  gelöst wird [65, S. 31]. Eine exakte Lösung für das Problem (3.31) ergibt eine Schrittweite, welche die Suchrichtung  $\mathbf{d}^{(k)}$  optimal ausnutzt. Jedoch ist das Ermitteln des Minimums oft zu aufwändig, um (3.31) in jeder Iteration  $k$  zu lösen. Anstelle einer exakten Lösung wird daher meist eine Approximation ermittelt, welche den Funktionswert der Zielfunktion hinreichend stark reduziert. Hierzu kann zunächst eine Bedingung bezüglich des Abstiegs in Form der Ungleichung

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}^{(k)}) + c_1 \sigma^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \quad (3.32)$$

für die Konstanten  $c_1 \in (0, 1)$  gestellt werden [65, S. 33]. Diese Bedingung wird als **Armijo-Bedingung** oder **erste Wolfe-Bedingung** bezeichnet und erfüllt das Prinzip des hinreichenden Abstiegs, sofern gesichert ist, dass die Schrittweite nicht zu klein ist [66, S. 80]. Dies kann mit Hilfe der Forderung

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \geq c_2 \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \quad (3.33)$$

für eine Konstante  $c_2 \in (c_1, 1)$  garantiert werden. In der Literatur ist diese Bedingung als **Krümmungsbedingung** oder **zweite Wolfe-Bedingung** bekannt [65, S. 33].

*Bemerkung.* Da die Wolfe-Bedingungen zu einem  $\sigma^{(k)}$  führen können, welches nicht zwangsläufig in der Nähe des Minimalpunktes von (3.31) liegt, kann die zweite Bedingung leicht abgewandelt werden. Wird statt (3.33)

$$|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)}| \leq f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) \leq c_2 |\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)}| \quad (3.34)$$

gefordert, so spricht man von einer strengen Wolfe-Bedingung, mit welcher sichergestellt ist, dass  $\sigma^{(k)}$  in der Nähe der optimalen Schrittweite liegt [65, S. 34].

Da die linke Seite in (3.33) dem Gradienten von  $f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)})$  entspricht, kann die Krümmungsbedingung so interpretiert werden, dass im nächsten Schritt ein Punkt  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  gefordert wird, welcher einen Gradienten aufweist, der größer als der Gradi-

ent in Richtung  $\mathbf{d}^{(k)}$  am Punkt  $\mathbf{x}^{(k)}$  ist. Dies ist sichergestellt, da bereits bekannt ist, dass  $\mathbf{d}^{(k)}$  eine Abstiegsrichtung ist und damit  $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$  gilt. Somit wird also mit (3.33) ein Punkt angenommen, an dem der Gradient weniger negativ ist oder sogar positiv [65, S. 33 ff.]. In Abbildung 3.6 sind die beiden Wolfe-Bedingung grafisch dargestellt. In blau sind die Schrittweiten markiert, welche der Armijo-Bedingung (3.32) genügen. In gelb sind die Schrittweiten markiert, welche zusätzlich die strenge Wolfe-Bedingung (3.34) erfüllen. Typischerweise werden in der Praxis sehr kleine Werte für  $c_1$  verwendet, während für die Newton und Quasi-Newton-Richtung  $c_2 \approx 0,9$  gesetzt wird [65, S. 34].

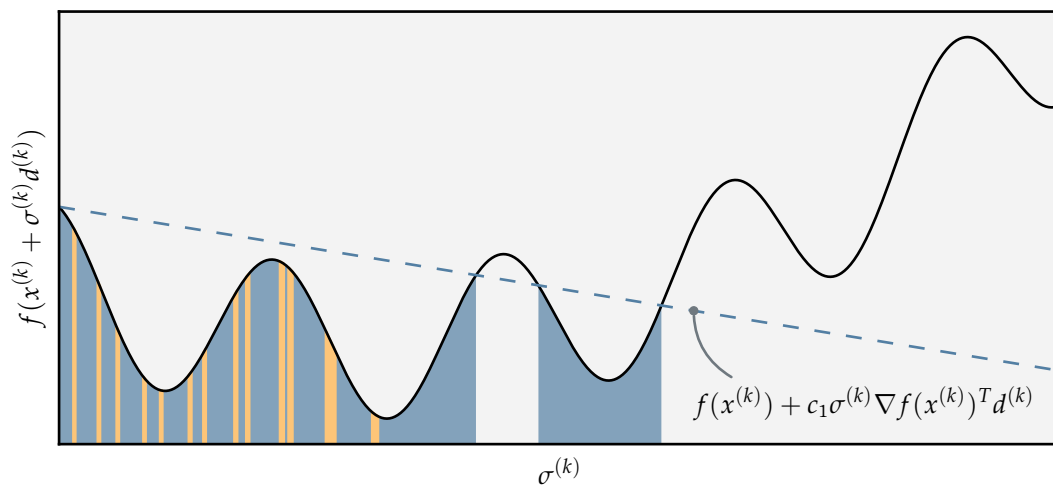


Abbildung 3.6: Schrittweiten, welche die Armijo-Bedingung erfüllen, dargestellt in blau, und Schrittweiten, welche zusätzlich die strengen Wolfe-Bedingung erfüllen, dargestellt in gelb.

Eine der Wolfe-Bedingung verwandten Alternative besteht in der **Goldstein-Bedingung**. Diese kann ebenfalls in zwei Ungleichungen, in der Form von

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) + (1 - c)\sigma^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \leq f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}), \quad (3.35a)$$

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) + c\sigma^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}^{(k)} \geq f(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}), \quad (3.35b)$$

mit  $0 < c < 1/2$ , ausgedrückt werden. Ähnlich wie zuvor, werden nur Schrittweiten akzeptiert, welche diese Ungleichungen erfüllen. Die Ungleichung (3.35a) stellt dabei

sicher, dass die Schrittweite nicht zu klein ist. In Abbildung 3.7 sind die beiden Geraden aus (3.35) und die akzeptablen Schrittweiten grafisch dargestellt. Im Vergleich zur Wolfe-Bedingung haben die Goldstein-Gleichungen den Nachteil, dass (3.35a) möglicherweise dafür sorgt, dass die optimale Schrittweite, welche (3.31) löst, nicht angenommen werden kann. Im Allgemeinen wird die Goldstein-Bedingung zumeist für Newton-Verfahren verwendet, wohingegen die Wolfe-Bedingung eher bei Quasi-Newton-Verfahren Einsatz findet [65, S. 36].

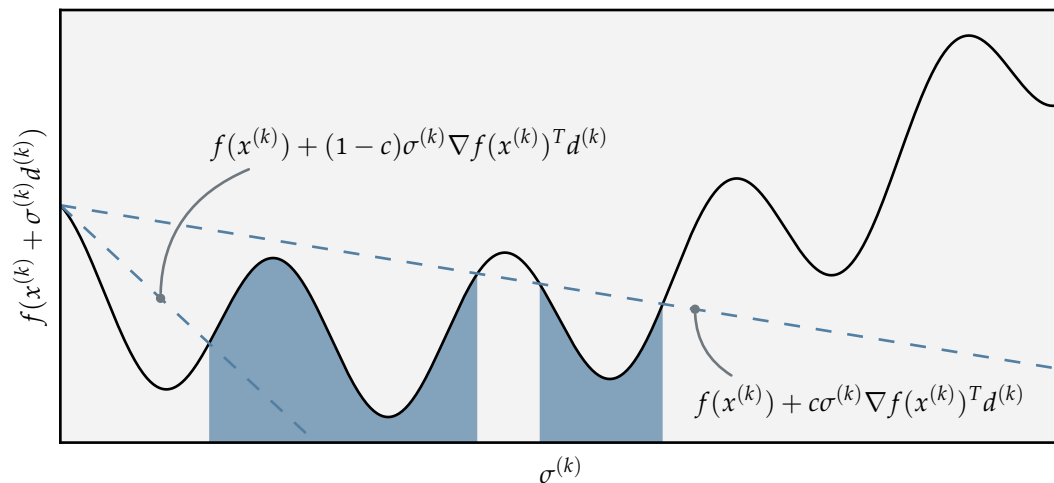


Abbildung 3.7: Schrittweiten, welche die Goldstein-Bedingung erfüllen.

### 3.2.3 Abbruchbedingungen

Für einen numerischen Optimierungsalgorithmus muss es ein Kriterium geben, welches angibt, wann die Optimierung abgebrochen werden sollte. Sei es aufgrund von eintretender Konvergenz oder ausgelöst durch mutmaßliche Divergenz. Ziel des numerischen Algorithmus ist es, einen Zielfunktionswert zu ermitteln, welcher mit dem exakten Minimalpunkt in den ersten  $q$  Dezimalstellen übereinstimmt. Hierzu sei der Schwellwert  $\tau = 10^{-q}$  gegeben, womit sich die Abbruchbedingungen

$$(i) \quad f(\mathbf{x}^{(k-1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \tau (1 + |f(\mathbf{x}^{(k)})|) \quad (3.36)$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \sqrt{\tau} (1 + \|\mathbf{x}^{(k)}\|) \quad (3.37)$$

$$(iii) \quad \left\| \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \right\| \leq \sqrt[3]{\tau} \left( 1 + \left| f(\mathbf{x}^{(k)}) \right| \right) \quad (3.38)$$

$$(iv) \quad \left\| \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \right\| < \epsilon \quad (3.39)$$

$$(v) \quad k > k_{\max} \quad (3.40)$$

mit der Maschinengenauigkeit  $\epsilon > 0$  und der maximal zulässigen Iterationszahl  $k_{\max} \in \mathbb{N}$  formulieren lassen [65]–[68]. Die Optimierung sollte angehalten werden, sobald

$$[(i) \wedge (ii) \wedge (iii)] \vee (iv) \vee (v) \quad (3.41)$$

erfüllt ist. Hierbei stellen die Kriterien (i), (ii) und (iii) eine Konvergenz der Methode fest und die Kriterien (iv) und (v) stellen sicher, dass das Verfahren im Falle einer mutmaßlich vorliegenden Divergenz terminiert.

### 3.2.4 Das BFGS-Verfahren

Nachdem einleitend die Grundlagen der numerischen Optimierung vorgestellt wurden, soll nun ein Verfahren diskutiert werden, welches im Augmented Likelihood Image Reconstruction Algorithmus Verwendung findet.

Da in Abschnitt 3.2.1 nicht weiter spezifiziert wurde, wie die Approximation der Hesse-Matrix für die Quasi-Newton-Richtung gebildet wird, soll nun eine Möglichkeit hierfür vorgestellt werden. Beim **BFGS-Verfahren** handelt es sich um ein Quasi-Newton-Verfahren, welches von den Erfindern **Broyde**, **Fletcher**, **Goldfarb** und **Shanno** quasi gleichzeitig hergeleitet wurde [65], [66], [69]–[72]. Zugunsten einer besseren Darstellung seien zunächst die Abkürzungen

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}, \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.42b)$$

gegeben. Somit lässt sich die Forderung an  $\mathbf{B}^{(k+1)}$  aus (3.29) schreiben als

$$\mathbf{B}^{(k+1)} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)}. \quad (3.43)$$

Da weiter gefordert wird, dass es sich bei  $\mathbf{B}^{(k+1)}$  um eine symmetrisch positiv definite Matrix handeln muss, ist (3.43) nur dann erfüllt, wenn

$$\mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{y}^{(k)} > 0 \quad (3.44)$$

Gültigkeit besitzt. Ist die Zielfunktion  $f$  streng konvex, so ist (3.44) für jedes  $\mathbf{x}^{(k)}$  und  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  erfüllt [65, S. 137]. Liegt jedoch keine strenge Konvexität vor, so kann gezeigt werden, dass eine Schrittgrößenauswahl mit Hilfe der Wolfe-Bedingungen dafür sorgt, dass die Ungleichung auch für eine nicht konvexe Funktionen  $f$  gilt [65, S. 138]. Eine Lösung für (3.43) besitzt nun  $n(n+1)/2$  Freiheitsgrade für die symmetrisch positiv definite Matrix  $\mathbf{B}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Da (3.43) aber nur  $n$  Gleichungen besitzt, handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem. Um eine eindeutige Lösung  $\mathbf{B}^{(k+1)}$  zu bestimmen, wird daher die symmetrisch positiv definite Matrix ermittelt, welche der aktuellen Approximation  $\mathbf{B}^{(k)}$  am nächsten ist. Somit muss das Problem

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \left\| \mathbf{B} - \mathbf{B}^{(k)} \right\|, \quad (3.45a)$$

$$\text{sodass } \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \text{ und } \mathbf{B}\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} \quad (3.45b)$$

für ein symmetrisch positiv definites  $\mathbf{B}^{(k)}$  gelöst werden [65, S. 138]. Wird für die Norm in (3.45) die gewichtete Frobenius-Norm verwendet, so ergibt sich eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}} \right) \mathbf{B}^{(k)} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}} \right) + \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}}, \quad (3.46)$$

wobei  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  der Einheitsmatrix entspricht. Die Aktualisierungsvorschrift (3.46) wird in der Literatur als DFP-Update bezeichnet und wurde von Davidon vorgestellt und von Fletcher und Powell weiterentwickelt [65], [73]. Für eine Implementierung des Optimierungsverfahrens hat sich jedoch herausgestellt, dass es effektiver ist, direkt die Inverse, bezeichnet durch  $\mathbf{H}^{(k)}$ , von  $\mathbf{B}^{(k)}$  zu berechnen, da dadurch die Suchrichtung  $\mathbf{d}^{(k)}$  durch einfache Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet werden kann (siehe hierzu (3.30)). Um eine direkte Aktualisierungsvorschrift für  $\mathbf{H}^{(k)}$  zu erhalten, nutzt

**Algorithmus 1** BFGS-Verfahren

- 
- 1: Given starting point  $\mathbf{x}^{(0)}$ , tolerance  $\epsilon > 0$ , approximation  $\mathbf{H}^{(0)}$
  - 2: Set  $k = 0$
  - 3: **while**  $\left\| \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \right\| > \epsilon$  **do**
  - 4:   Compute new search direction  $\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{H}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$
  - 5:   Compute new step length  $\sigma^{(k)}$  that satisfies the Wolfe conditions (3.32) and (3.33)
  - 6:   Set  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$
  - 7:   Compute  $\mathbf{H}^{(k+1)}$  by means of (3.49)
  - 8:   Set  $k = k + 1$
  - 9: **end while**
- 

das BFGS-Verfahren eine alternative Forderung zu (3.43), in der Form von

$$\mathbf{H}^{(k+1)} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} \quad (3.47)$$

aus. Ähnlich wie in (3.45) muss nun das Problem

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \left\| \mathbf{H} - \mathbf{H}^{(k)} \right\|, \quad (3.48a)$$

$$\text{sodass } \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \text{ und } \mathbf{H} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} \quad (3.48b)$$

für ein symmetrisch positiv definites  $\mathbf{H}^{(k)}$  gelöst werden. Die eindeutig bestimmte Lösung für (3.48) wird als **BFGS-Aktualisierungsvorschrift** bezeichnet und ist formal gegeben als

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}} \right) \mathbf{H}^{(k)} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}} \right) + \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}}. \quad (3.49)$$

In Algorithmus 1 ist eine Pseudocode-Repräsentation des BFGS-Verfahrens gegeben. Eine Möglichkeit, die Anfangsapproximation  $\mathbf{H}^{(0)}$  zu bestimmen, besteht darin,  $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}$  zu setzen [74] oder aber eine erste Approximation durch Finite-Differenzen an der Stelle  $\mathbf{x}^{(0)}$  zu ermitteln [65, S. 140]. Zur Berechnung der Schrittweite sei auf [65], [66], [75] verwiesen.

Eine bezüglich des Speicherplatzes optimierte Variante des Algorithmus wurde 1980 von J. Nocedal vorgestellt [76]. Im limited-memory-BFGS-Algorithmus oder **l-BFGS-Algorithmus** wird die approximierete, inverse Hesse-Matrix nicht explizit abgespeichert. Stattdessen werden die Vektoren  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{s}$  im Speicher gehalten und die Matrix  $\mathbf{H}^{(k)}$  wird in (3.49) implizit durch diese dargestellt. Damit reduziert sich der Speicherbedarf nach  $l$  Iterationen von  $l \times n \times n$  auf  $2l \times n$  Werte [74], [77]. Da dies für große  $l$  und insbesondere große  $n$  keine starke Verbesserung darstellt, wird nur eine bestimmte Anzahl  $j \in \mathbb{N}$  an Vektoren  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{s}$  im Speicher gehalten. Somit werden zur Berechnung von  $\mathbf{H}^{(k+1)}$  nur die Vektoren  $\{\mathbf{y}^{(i)}\}_{i=k}^{k-j}$  und  $\{\mathbf{s}^{(i)}\}_{i=k}^{k-j}$  mit  $j \leq k$  verwendet [74], [76], [78].

Um ein Optimierungsproblem zu lösen, welches Nebenbedingungen in Form einer simplen Eingrenzung der Lösungsmenge besitzt, wurde eine weitere Variante des BFGS-Verfahrens entwickelt. Der limited-memory-BFGS-bounded-Algorithmus oder **l-BFGS-b-Algorithmus** kann verwendet werden, um ein Minimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (3.50a)$$

$$\text{sodass } \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \quad (3.50b)$$

mit der unteren Grenze  $\mathbf{x}_{\min} \in \mathbb{R}^n$  und der oberen Grenze  $\mathbf{x}_{\max} \in \mathbb{R}^n$  zu lösen [79]–[82]. Hierbei wird bei der Wahl der Schrittweite  $\sigma^{(k)}$  dafür gesorgt, dass der neu berechnete Punkt  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  entweder die Wolfe-Bedingung erfüllt oder aber an der durch (3.50b) definierten Grenze liegt [83].

Eine weitere attraktive Version des BFGS-Algorithmus besteht in einer online oder stochastischen Variante [84]. In dieser Variation wird zur Ermittlung des Optimums eine Approximation des Gradienten benutzt.

### 3.2.5 Das Augmented-Lagrangian-Verfahren

Im letzten Abschnitt wurde eine Variante des BFGS-Algorithmus vorgestellt, welche in der Lage ist, Nebenbedingungen in Form von einfachen unteren und oberen Grenzen

für die Lösungsmenge zu berücksichtigen. Im Folgenden soll nun ein Optimierungsalgorithmus diskutiert werden, in welchem eine allgemeinere Formulierung von Nebenbedingungen integriert werden kann.

Das **Augmented-Lagrangian-Verfahren**, welches verwandt mit der Methode des quadratischen Strafterms ist, versucht bei einem schlecht gestellten Problem mit Hilfe von expliziten Lagrangian-Multiplikatoren eine stabile Lösung zu ermitteln. Zur genaueren Erläuterung sei zunächst ein allgemeines, restringiertes Problem wie in Definition 3.2.1 mit  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  und  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  gegeben. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, besteht in der Formulierung eines **quadratischen Strafterms** in der Form von

$$Q(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}} ([c_i(\mathbf{x})]^-)^2 \quad (3.51)$$

mit  $[y]^- = \max(-y, 0)$ . Ein potenzieller Nachteil dieser Methode ist schnell zu sehen, wenn man die Nebenbedingung  $x_1 \leq 0$  an die Zielfunktion stellt. Dies führt zwangsläufig dazu, dass  $Q$  nicht mehr zweimal stetig differenzierbar ist und daher an Glattheit verliert [65, S. 500].

Mit Hilfe des Augmented-Lagrangian-Verfahrens ist es nun möglich, die Glattheit der Funktion zu bewahren, indem explizite Lagrange-Multiplikatoren zu Hilfe gezogen werden. Die Augmented-Lagrangian-Funktion, welche eine Kombination aus quadratischem Strafterm und Lagrange-Funktion ist, ist gegeben als [65], [85]

$$\Lambda_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(\mathbf{x}). \quad (3.52)$$

Man bemerke, dass in (3.52) ausschließlich die Menge  $\mathcal{E}$  der Indizes für die Gleichheitsbedingungen verwendet wird. Ungleichheitsbedingungen können mit Hilfe von Schlupfvariablen in Gleichheitsbedingungen umgewandelt werden. Somit werden Nebenbedingungen der Form  $c_i(\mathbf{x}) \geq 0, i \in \mathcal{I}$  zu

$$c_i(\mathbf{x}) - s_i = 0 \quad (3.53)$$

umgeschrieben, wobei  $s_i \geq 0, i \in \mathcal{I}$  die Schlupfvariablen darstellen. Anschließend sollten die Schlupfvariablen in den Vektor  $\mathbf{x}$  integriert werden und die Nebenbedingungen können zusammengefasst werden in  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wobei  $m$  der Anzahl an

Nebenbedingungen entspricht. Damit lässt sich (3.52) umschreiben zu

$$\Lambda_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^m c_i^2(\mathbf{x}). \quad (3.54)$$

Aus Theorem 3.2.1 folgt nun die Forderung

$$0 \approx \nabla_{\mathbf{x}} \Lambda_A(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)}) = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^m [\lambda_i^{(k)} - \mu^{(k)} c_i(\mathbf{x}^{(k)})] \nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.55)$$

für eine approximierte Lösung  $\mathbf{x}^{(k)}$  in Iteration  $k$ . Weiter lässt sich unter Benutzung der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung [65, S. 321] und basierend auf (3.55), die Forderung

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} - \mu^{(k)} c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.56)$$

für die Lagrange-Multiplikatoren ableiten [65, S. 515]. Zusätzlich zu den Nebenbedingungen  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  soll nun eine weitere Restriktion an den Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  gestellt werden. Die Einschränkung

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.57)$$

mit der unteren Grenze  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$  und der oberen Grenze  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  wird als bound-constraint oder box-constraint bezeichnet. Aus diesem Grund wird das hier beschriebene Verfahren als **bound-constrained Lagrangian Methode** angegeben. Sollte für einen Wert  $x_i \in \mathbb{R}$  keine untere oder obere Grenze gegeben sein, so kann  $l_i = -\infty$  bzw.  $u_i = \infty$  gesetzt werden. Für (3.54) hat die Restriktion (3.57) keine Folgen, vielmehr werden die oberen und unteren Grenzen explizit beim Lösen des Unterproblems

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Lambda_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mu), \quad (3.58a)$$

$$\text{sodass } \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \quad (3.58b)$$

integriert. Hierbei sind  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\mu$  zunächst für eine Iteration  $k$  fixiert. Nach Lösen des Problems werden sie aktualisiert und mit Hilfe von (3.58) wird in Iteration  $k + 1$  erneut eine Approximation gefunden. Die Optimierung wird abgebrochen, sofern Konvergenz eintritt. In Algorithmus 2 ist der komplette Ablauf dieser Lösungsstrategie gegeben [65, S. 520]. Bevor der Algorithmus gestartet wird, werden die Toleranzen  $\eta^*$  und  $\omega^*$  fest-

**Algorithmus 2** Das bound-constrained Lagrangian Verfahren.

---

```

1: Given starting point  $\mathbf{x}^{(0)}$ , initial multipliers  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ , convergence tolerances  $\eta^*$  and
    $\omega^*$ 
2: Set  $\mu^{(0)} = 10, \omega^{(0)} = 1/\mu^{(0)}, \eta^{(0)} = 1/(\mu^{(0)})^{0,1}$ 
3: for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
4:   find an approximated solution  $\mathbf{x}^{(k)}$  with the tolerance  $\omega^{(k)}$  of the subproblem
      $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \Lambda_A(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})$ , such that  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x}^{(k)} \leq \mathbf{u}$ 
5:   if  $\|c(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \max(\eta^{(k)}, \eta^*)$  then
     # test for convergence
6:     if  $\|c(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \eta^*$  and  $\|\nabla_{\mathbf{x}} \Lambda_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mu)\| \leq \omega^*$  then
7:       stop with approximated solution  $\mathbf{x}^{(k)}$ 
8:     end if
     # update multipliers, tighten tolerance
9:      $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \mu^{(k)} c(\mathbf{x}^{(k)})$ 
10:     $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}$ 
11:     $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} / (\mu^{(k+1)})^{0,9}$ 
12:     $\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} / \mu^{(k+1)}$ 
13:   else
     # increase penalty parameter, tighten tolerance
14:     $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ 
15:     $\mu^{(k+1)} = 100\mu^{(k)}$ 
16:     $\eta^{(k+1)} = 1/(\mu^{(k+1)})^{0,1}$ 
17:     $\omega^{(k+1)} = 1/\mu^{(k+1)}$ 
18:   end if
19: end for

```

---

gelegt. Analog zu (3.39) und (3.38) wird die Konvergenz basierend auf der Norm der Nebenbedingungen und der Größe des Gradienten von (3.54) festgestellt (siehe Zeile 6). Um mit einer potenziellen Divergenz umzugehen, sollte die Bedingung (3.40) integriert werden und eine maximale Anzahl an Iterationen festgelegt werden. Die Grenze für Nebenbedingungen ist definiert durch  $\eta^*$  und die Norm des Gradienten sollte die Toleranz  $\omega^*$  unterschreiten. Zum Lösen des Problems (3.58) in Zeile 4 kann das l-BFGS-b-Verfahren, welches in Abschnitt 3.2.4 vorgestellt wurde, verwendet werden. Basierend auf der Norm der Nebenbedingungen (siehe Zeile 5) wird im weite-

rem Verlauf des Algorithmus entschieden, in welcher Art und Weise die Lagrange-Multiplikatoren bzw. der Wert für  $\mu^{(k)}$  abgeändert werden. Hat die Norm der Nebenbedingungen den Wert  $\eta^{(k)}$  unterschritten, so werden die Lagrange-Multiplikatoren, basierend auf (3.56), aktualisiert und die Toleranzen  $\eta^{(k)}$  und  $\omega^{(k)}$  werden für die nächste Iteration verschärft. Der aktuelle Wert von  $\mu^{(k)}$  wird in diesem Fall beibehalten, da die Nebenbedingungen einen akzeptablen Strafterm erzeugen. Hat die Norm der Nebenbedingungen den gewünschten Schwellwert noch nicht unterschritten, so werden die Lagrange-Multiplikatoren beibehalten und  $\mu^{(k)}$  wird aktualisiert. Somit bietet der Algorithmus zwei Möglichkeiten, das Verhältnis zwischen Zielfunktion und Nebenbedingungen zu beeinflussen.

Das globale Konvergenzverhalten des Algorithmus kann von der Konvergenz des quadratischen Straftermes abgeleitet werden [85], [86]. Unter der Annahme, dass die Abfrage in Algorithmus 2, Zeile 5 hinreichend oft abgelehnt wird und die Folge der Lagrangian-Multiplikatoren beschränkt bleibt, reduziert sich der Algorithmus auf eine Optimierung mit quadratischem Strafterm [85]. Hierzu hat unter anderen Bertsekas et al. bereits frühzeitig gezeigt, dass es sich dabei um ein global konvergentes Verfahren handelt [86]. Weiter kann ohne negativen Einfluss auf das globale Konvergenzverhalten die Annahme der Beschränktheit für  $\lambda^{(k)}$  gelockert werden, wenn  $\|\lambda^{(k)}\|/\mu^{(k)}$  für steigendes  $k$  gegen Null geht. Um dies sicherzustellen, darf  $\|\lambda^{(k)}\|$  nicht schneller wachsen als  $\mu^{(k)}$ . Betrachtet man hierzu alle Iterationen  $k_v$  für  $v = 1, 2, 3, \dots$  in denen Zeile 15 durchgeführt wird, so stellen die Zeilen 11 und 16 sicher, dass die Summe  $\sum_{l=1}^{\infty} \eta^{(k_v+l)}$  für  $v \rightarrow \infty$  [87] beschränkt bleibt. Dies ist eine notwendige Voraussetzung, um zeigen zu können, dass unter der Annahme  $\mu^k \rightarrow \infty$  mit steigendem  $k$  der Quotient  $\|\lambda^{(k)}\|/\mu^{(k)}$  gegen Null geht [85], [88], [89].

Die Konstanten in Zeile 11, 15 und 16 sind zu einem Teil arbiträr, haben jedoch keinen Einfluss auf das theoretische Konvergenzverhalten des Algorithmus [65, S. 521].

Beim Lösen von rechenaufwendigen Problemen ist die Möglichkeit, Unterprobleme approximativ zu lösen, sehr bedeutend. Hierbei hat die Wahl einer geeigneten Lösungsstrategie maßgeblichen Einfluss, da sichergestellt werden muss, dass das Konvergenzverhalten des Algorithmus nicht negativ beeinflusst wird. Neben den vielen möglichen Lösungsansätzen, zeigt das l-BFGS-b-Verfahren hierfür geeignete Eigenschaften und wurde daher auch im ALIR-Algorithmus zum Lösen der Unterprobleme verwendet.

### 3.3 Iterative Rekonstruktionsverfahren

In Kapitel 2.2.5 wurde bereits ein Algorithmus zur Rekonstruktion von CT-Bildern vorgestellt. Bei der gefilterten Rückprojektion (FBP, engl. filtered backprojection) handelt es sich um ein analytisches Verfahren, welches direkt ein fertig rekonstruiertes Bild als Ergebnis liefert. Der Algorithmus ist aufgrund seines geringen Rechenaufwands im klinischen Alltag der am meisten verwendete Rekonstruktionsansatz. Unter nahezu perfekten Voraussetzungen, wie zum Beispiel geringes Rauschen, hinreichend vielen Projektionsdaten und kaum Streustrahlung, liefert die FBP sehr zufriedenstellende Ergebnisse. Weichen die Gegebenheiten jedoch vom Ideal ab, beispielsweise bei geringer Strahlendosis, was dafür sorgt, dass der Rauschanteil mehr Einfluss nimmt, so ist die FBP aufgrund der wenigen Möglichkeiten zur Adaptierung nicht mehr die geeignete Wahl, um Bilder bestmöglicher Qualität zu rekonstruieren.

Iterative Rekonstruktionsalgorithmen bieten einen alternativen Ansatz mit vielseitigen Anpassungsmöglichkeiten. Die Grundidee dahinter ist meist die gleiche. Angefangen mit einer initialen Abschätzung für das zu rekonstruierende Bild, welches zunächst auch aus einer homogenen Verteilung der Abschwächungskoeffizienten bestehen kann, wird der dadurch entstandene Fehler im Vergleich zur Messung berechnet. Aus diesem Fehler wird anschließend ein Korrekturterm bestimmt, welcher auf das Bild angewandt wird. Nachfolgend wird dieser Prozess iterativ wiederholt, bis das zu rekonstruierende Bild die gewünschte Qualität aufweist.

Eine Ähnlichkeit zu den in Kapitel 3.2 vorgestellten Optimierungsproblemen ist unverkennbar. Auch hier wird zumeist mit einer initialen Abschätzung begonnen, welche dann iterativ mit Hilfe der Abstiegsrichtung verbessert wird, bis das Optimum erreicht ist. Für eine geeignete Formulierung der iterativen Rekonstruktion als numerisches Optimierungsproblem wird zunächst die zweidimensionale Radontransformation

$$p_{\theta}(\xi) = \mathcal{R}_{\theta} \{f(x, y)\} \quad (3.59)$$

aus Abschnitt 2.2.2 betrachtet. Hierbei repräsentiert  $f(x, y)$  das Bild und  $\mathcal{R}_{\theta} \{f(x, y)\}$  beschreibt das Linienintegral entlang der Linie  $L_{\xi, \theta}$ . Um diesen Zusammenhang aus einer numerischen Sicht zu betrachten, muss  $f(x, y)$  diskretisiert werden. Hierzu wird

das Bild zunächst vektorisiert und in der Form  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  geschrieben, wobei  $N$  der Anzahl der Pixel im Bild entspricht.

*Bemerkung.* Die Vektorisierung des zweidimensionalen Bildes kann entweder entlang der Spalten vollzogen werden, was bedeutet, dass das vektorisierte Bild aus einer Aneinanderreihung der Spalten besteht, oder entlang der Zeilen erfolgen.

Die Radontransformation kann durch eine Systemmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  repräsentiert werden. Hierbei beschreibt  $M$  die Anzahl der Projektionen und das Element  $a_{ij}$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  bezeichnet den Beitrag des  $j$ -ten Pixels zur  $i$ -ten Projektion. Folglich kann (3.59) durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (3.60)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$  die Projektionswerte der durch  $\mathbf{A}$  beschriebenen Linienintegrale bezeichnet.

Sollte die inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  existieren, so kann eine direkte Lösung durch

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} \quad (3.61)$$

gefunden werden. Da meist jedoch mehr Projektionen als Pixel vorhanden sind, ist  $\mathbf{A}$  im Allgemeinen nicht quadratisch, was dazu führt, dass eine einfache Invertierung ausgeschlossen ist. Eine Möglichkeit besteht jedoch darin, eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate zu finden.

### 3.3.1 Kleinste-Quadrate-Lösung und Singulärwertzerlegung

Für eine Formulierung der Rekonstruktion in Form eines Optimierungsproblems muss aus (3.60) eine Zielfunktion abgeleitet werden. Dies kann beispielsweise durch die kleinsten Fehlerquadrate geschehen, was zu dem Optimierungsproblem

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|^2 \quad (3.62)$$

### 3.3. ITERATIVE REKONSTRUKTIONSVERFAHREN

führt. Hierbei beschreibt  $\mathbf{f}^*$  das Optimum, welches in diesem Fall dem gesuchten Bild gleichzusetzen ist. Das Ausformulieren der Gleichung in Form von

$$\|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p})^T (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}) \quad (3.63)$$

und das Ausnutzen der notwendigen Bedingung erster Ordnung (siehe Theorem 3.2.1) ergibt

$$\mathbf{0} = \nabla \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|^2 = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{p} = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}). \quad (3.64)$$

Wird angenommen, dass  $\mathbf{A}$  vollen Spaltenrang mit  $\text{Rang}(\mathbf{A}) = N$  besitzt, ergibt das Umstellen von (3.64) nach  $\mathbf{f}$  die Gleichung

$$\mathbf{f} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}. \quad (3.65)$$

Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  um eine quadratische Matrix handelt. Die Matrix

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (3.66)$$

wird dabei als Moore-Penrose-Inverse oder Pseudoinverse bezeichnet.

Sind mehr Pixel als aufgenommene Projektionen vorhanden, so handelt es sich bei (3.60) um ein unterbestimmtes Gleichungssystem und es existieren gegebenenfalls unendlich viele Lösungen. Für diesen Fall sollte eine Minimum-Norm-Lösung mit der Nebenbedingung  $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{p}$  angestrebt werden. Dies führt zu der alternativen Formulierung

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{f}\|^2 + \lambda (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}), \quad (3.67)$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}^M$  die Lagrange-Multiplikatoren beschreibt. Eine erneute Ausnutzung der notwendigen Bedingung erster Ordnung ergibt

$$\mathbf{0} = \nabla \left( \|\mathbf{f}\|^2 + \lambda (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}) \right) = 2\mathbf{f} + \mathbf{A}^T \lambda. \quad (3.68)$$

Wird die Gleichung nach  $\mathbf{f}$  umgestellt, so ergibt dies

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^T \lambda. \quad (3.69)$$

Um die Abhängigkeit der Lagrange-Multiplikatoren von  $\mathbf{p}$  zu beschreiben, wird (3.68) zunächst von der linken Seite mit  $\mathbf{A}$  multipliziert. Dies führt zu

$$\mathbf{0} = 2\mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.70)$$

Wird nun der Zusammenhang  $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{p}$  ausgenutzt und die Gleichung nach  $\boldsymbol{\lambda}$  umgestellt, so ergibt dies

$$\boldsymbol{\lambda} = -2 \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{p}. \quad (3.71)$$

Folglich kann (3.69) geschrieben werden als

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{A}^+ \mathbf{p}, \quad (3.72)$$

da gezeigt werden kann, dass

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T &= \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right) \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \\ &= \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right) \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right)^{-1} = \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.73)$$

gilt.

Die Gleichung (3.72) oder die für die Praxis relevantere Gleichung (3.65) können jedoch meist nicht direkt gelöst werden, da  $\mathbf{A}$  in der Regel keinen vollen Spalten- bzw. Zeilenrang aufweist [90, S. 128]. Die Singulärwertzerlegung, in welcher die Matrix  $\mathbf{A}$  durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (3.74)$$

beschrieben wird, wobei  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  und  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  unitäre Matrizen sind und  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  von der Form

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{diag}\{\sigma_i\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

ist, mit den Singulärwerten  $\sigma_i > 0$ , bietet eine Möglichkeit, die Pseudoinverse durch

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\mathbf{U}^T \quad (3.76)$$

mit

$$\boldsymbol{\Sigma}^+ = \begin{pmatrix} \text{diag}\{\frac{1}{\sigma_i}\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

zu berechnen.

Weiter noch bietet die Singulärwertzerlegung eine einfache Art der Regularisierung [91]. Durch die Bestimmung eines Schwellwertindex  $r < M$ , sodass  $\frac{1}{\sigma_k} = 0$ ,  $\forall k > r$  gilt, kann Einfluss auf die Qualität des Bildes genommen werden. Wird ein großes  $r$  gewählt, so beinhaltet das rekonstruierte Bild hohe Frequenzen und verstärkt damit den Rauschanteil im Bild. Wird  $r$  hingegen klein gewählt, so beinhaltet das rekonstruierte Bild nur kleine Frequenzen und erscheint verschwommen.

### 3.3.2 Rekonstruktion mit Hilfe des negativen Gradienten

Die direkten Rekonstruktionsansätze im vorhergehenden Abschnitt werden oft durch die schlechte Konditionierung des Rekonstruktionsproblems stark erschwert. Das Optimierungsproblem (3.62) besitzt jedoch stets eine Lösung, auch wenn diese nicht notwendigerweise

$$\mathbf{0} = \|\mathbf{A}\mathbf{f}^* - \mathbf{p}\|^2 \quad (3.78)$$

lautet. Eine Optimierung mit Hilfe des negativen Gradienten (siehe Abschnitt 3.2.1) liefert unter Verwendung von (3.64) das Minimum für (3.62). Hieraus ergibt sich die Rekonstruktionsvorschrift

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \sigma^{(k)} \left( 2\mathbf{A}^T \left( \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{p} \right) \right), \quad (3.79)$$

wobei  $\sigma^{(k)}$  die Schrittweite in Iteration  $k$  beschreibt. Diese kann beispielsweise mit Hilfe der ersten Wolfe-Bedingung aus (3.32) berechnet werden (siehe hierzu Abschnitt 3.2.2).

Für einen einzelnen Pixel  $f_r$  muss basierend auf (3.79) die Iterationsvorschrift

$$f_r^{(k+1)} = f_r^{(k)} - \sigma_r^{(k)} \left( 2 \sum_{i=1}^M a_{ir} \left( \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{(k)} \right) - p_i \right) \right) \quad (3.80)$$

durchgeführt werden.

*Bemerkung.* Die Multiplikation  $\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}$  entspricht der Radontransformtion bzw. im diskreten Fall der Vorwärtsprojektion vom aktuellen Bild. Die Multiplikation  $\mathbf{A}^T\mathbf{c}^{(k)}$  hingegen entspricht einer Rückprojektion des Korrekturterms  $\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{p}$ . Die aus der Optimierung mit Hilfe der negativen Gradienten resultierende Rekonstruktionsvorschrift (3.79) entspricht also dem eingangs erwähnten Schema, in welchem zunächst eine Abschätzung des zu rekonstruierenden Bildes mit der Messung verglichen wird und anschließend der entstandene Fehler in Form eines Korrekturterms auf das Bild angewandt wird (siehe Seite 73). Eine genauere Betrachtung der Vorwärts- und Rückprojektion wird in Abschnitt 3.4 gegeben.

Die Iterationsvorschrift (3.79) kann abgebrochen werden, sofern (3.41) erfüllt ist. In der Praxis reicht es jedoch meist aus zu überprüfen, ob dem Bild in den Iterationsschritten nur noch kleine Änderungen unterzogen werden (siehe hierzu die Abbruchbedingung in (3.36)).

### 3.3.3 Statistische Modellierung der Rekonstruktion

Die Formulierung der Zielfunktion in Form eines quadratischen Strafterms ist nicht die einzige Möglichkeit, das Rekonstruktionsproblem zu modellieren. Eine etwas andere Vorgehensweise wird durch den Likelihood-Ansatz verfolgt. Da die am Detektor einfallenden Photonen eine Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen, kann die Zielfunktion durch eine Modellierung der Photonenstatistik erfolgen [5], [6], [38], [39], [90], [92]–[94].

#### Herleitung der Likelihood-Funktion

Abgeleitet vom Satz von Bayes aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, kann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Bild  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  zu den gemessenen Intensitäten  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$  gehört, durch

$$P(\mathbf{f}|\mathbf{n}) = \frac{P(\mathbf{n}|\mathbf{f})P(\mathbf{f})}{P(\mathbf{n})} \quad (3.81)$$

### 3.3. ITERATIVE REKONSTRUKTIONSVERFAHREN

ausgedrückt werden. Da das Bild  $\mathbf{f}$  im Fall einer computertomographischen Messung initial jedoch nicht bekannt ist, gilt es, die bedingte Wahrscheinlichkeit in (3.81) in Abhängigkeit von  $\mathbf{f}$  zu maximieren.

Weiter kann festgestellt werden, dass der Term  $P(\mathbf{n})$  unabhängig vom zu rekonstruierenden Bild  $\mathbf{f}$  und damit für eine konkrete Messung konstant ist. Daher ist dieser für die Optimierung vernachlässigbar und kann entfallen. Der Term  $P(\mathbf{f})$  in (3.81) kann Vorwissen bezüglich des zu rekonstruierenden Bildes integrieren. Ist jedoch kein Vorwissen vorhanden, so kann das Maximieren von (3.81) auf die Optimierung von  $P(\mathbf{n}|\mathbf{f})$  reduziert werden.

Da angenommen wird, dass die statistischen Variationen der Messung  $\mathbf{n}$  unabhängig voneinander sind, wird die Gesamtwahrscheinlichkeit von  $P(\mathbf{n}|\mathbf{f})$  durch eine Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten ausgedrückt, sodass

$$P(\mathbf{n}|\mathbf{f}) = \prod_{i=1}^M P(n_i|\mathbf{f}). \quad (3.82)$$

Weiter kann mit Hilfe der Poisson-Verteilung

$$P(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (3.83)$$

wobei  $\lambda$  dem Erwartungswert der Verteilung entspricht, die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl  $n_i$  bei dem Erwartungswert  $n_i^*$  beobachtet wird, durch

$$P(n_i|n_i^*) = \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*} \quad (3.84)$$

ausgedrückt werden.

Da der Erwartungswert  $n_i^*$  aufgrund des Lambert-Beer'schen Gesetzes (siehe hierzu (2.5) in Abschnitt 2.1.3) durch

$$n_i^* = n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \quad (3.85)$$

abhängig vom Bild  $\mathbf{f}$  ist, gilt

$$P(n_i|\mathbf{f}) = P(n_i|n_i^*) \quad (3.86)$$

und (3.82) lässt sich umformen zu

$$P(\mathbf{n}|\mathbf{f}) = \prod_{i=1}^M \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*} = \prod_{i=1}^M \frac{\left( n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j} \right)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j}}. \quad (3.87)$$

Angesichts der Tatsache, dass die Anzahl an gemessenen Photonen  $\mathbf{n}$  für eine konkrete Messung nicht variabel ist, hängt die Wahrscheinlichkeit in (3.87) ausschließlich von  $\mathbf{f}$  ab und die Zielfunktion lässt sich formulieren durch

$$L(\mathbf{f}) = \prod_{i=1}^M \frac{\left( n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j} \right)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j}}. \quad (3.88)$$

Die Funktion (3.88) verliert durch Logarithmierung an Komplexität und wird für die Optimierung vereinfacht. Da es sich beim Logarithmus um eine monotone Funktion handelt, hat Logarithmieren keinen Einfluss auf das Optimum der Funktion. Somit lässt sich (3.88) umwandeln zu

$$\begin{aligned} l(\mathbf{f}) = \ln(L(\mathbf{f})) &= \sum_{i=1}^M \left( \ln \left( n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j} \right)^{n_i} - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left( n_i \ln(n_0) - n_i \sum_{j=1}^N a_{ij}f_j - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij}f_j} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Die Terme  $n_i \ln(n_0)$  und  $\ln(n_i!)$  in (3.89) sind unabhängig von  $\mathbf{f}$  und daher konstant für eine konkrete Messung  $\mathbf{n}$ . Da für die Optimierung der Funktion konstante Terme keine Rolle spielen, können diese zunächst vernachlässigt werden. Hieraus ergibt sich

die Funktion

$$\hat{l}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^M \left( -n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right). \quad (3.90)$$

Für den weiteren Verlauf der Arbeit wird an dieser Stelle zusätzlich die negative Log-Likelihood-Funktion durch

$$\tilde{l}(\mathbf{f}) = -\hat{l}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^M \left( n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j + n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) \quad (3.91)$$

definiert. Diese dient der Formulierung des Rekonstruktionsproblems als Minimierungsproblem im Gegensatz zur Maximierung der Funktion (3.90).

### Maximum-Likelihood-Ansatz

Das zu rekonstruierende Bild kann gefunden werden, indem die Log-Likelihood-Funktion maximiert bzw. das Problem

$$\mathbf{f}^* = \arg \max_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \hat{l}(\mathbf{f}) \quad (3.92)$$

gelöst wird. Hierzu ist es erforderlich, die notwendige Bedingung erster Ordnung zu erfüllen (siehe Theorem 3.2.1). Dies bedeutet, dass ein  $\mathbf{f}$  gesucht ist, welches

$$\mathbf{0} = \nabla \hat{l}(\mathbf{f}^*) \quad (3.93)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{l}(\mathbf{f})}{\partial f_r} &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial \left( -n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right)}{\partial f_r} \\
 &= \sum_{i=1}^M \left( -n_i a_{ir} + n_0 a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) \\
 &= n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir}
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

erfüllt.

Um zusätzlich sicherzustellen, dass es sich bei  $\mathbf{f}^*$  um einen strikten lokalen Maximalpunkt handelt, muss die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (siehe Theorem 3.2.3) erfüllt sein. Hierzu wird die zweite partielle Ableitung

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{l}(\mathbf{f})}{\partial f_r \partial f_s} &= \frac{\partial \left( n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} \right)}{\partial f_s} \\
 &= -n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} a_{is} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

betrachtet, wobei festzustellen ist, dass die Matrixeinträge  $a_{ij}$  stets nicht negativ sind. Weiter ist zu sehen, dass die mit (3.95) assoziierte quadratische Form

$$\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N v_r \left( -n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} a_{is} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) v_s, \tag{3.96}$$

mit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  zeigt, dass die Hessematrix negativ definit ist, sofern  $\mathbf{A}$  mindestens so viele Zeilen (entspricht der Anzahl an Projektionen  $M$ ) wie Spalten (entspricht der Anzahl an Pixeln  $N$ ) besitzt und  $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \min\{N, M\}$  gilt [95].

Analog zur Optimierung mit Hilfe des negativen Gradienten in Abschnitt 3.2.1 kann mit Hilfe des positiven Gradienten das Maximum von (3.90) gefunden werden. Somit

### 3.3. ITERATIVE REKONSTRUKTIONSVERFAHREN

ergibt sich die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \sigma^{(k)} \nabla \hat{l}(\mathbf{f}^{(k)}) \quad (3.97)$$

mit der Schrittweite  $\sigma^{(k)}$  in Iteration  $k$ . Dies hat für einen einzelnen Pixel  $f_r$  zur Folge, dass der Iterationsschritt

$$f_r^{(k+1)} = f_r^{(k)} + \sigma_r^{(k)} \left( n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{(k)}} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} \right) \quad (3.98)$$

vollzogen werden muss. Die Umrechnung von Intensitätsdaten in Projektionsdaten durch

$$n_i = n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} = n_0 e^{-p_i}, \quad (3.99)$$

ermöglicht weiter die Umformung zu

$$f_r^{(k+1)} = f_r^{(k)} + \sigma_r^{(k)} \left( n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ir} f_j^{(k)}} - n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i} \right). \quad (3.100)$$

Für die Wahl von  $\sigma_r$  können analog zu (3.79) die Wolfe-Bedingungen aus Abschnitt 3.2.2 herangezogen werden.

Der in der Literatur als „maximum likelihood for transmission tomography“ (ML-TR) bezeichnete Ansatz verfolgt im Gegensatz zu (3.100) eine Optimierung durch direktes Nullsetzen der ersten Ableitung. Hierbei kann für einen Pixel  $f_r$  die Gleichung

$$n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} = 0 \quad (3.101)$$

auf beiden Seiten mit  $f_r$  multipliziert werden. Dadurch ergibt sich

$$f_r \left( n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} \right) = 0 \quad (3.102)$$

$$f_r n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} - f_r \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} = 0, \quad (3.103)$$

was sich zu

$$f_r = \frac{f_r n_0}{\sum_{i=1}^M n_i a_{ir}} \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \quad (3.104)$$

umstellen lässt. Diese Gleichung beschreibt den Schnittpunkt zwischen einer Geraden mit dem Anstieg eins und der Funktion auf der rechten Seite von (3.104). Das Finden dieses Punktes kann durch eine Fixpunktiteration [96, S. 183] erfolgen und führt zu der Gleichung

$$f_r^{(k+1)} = \frac{f_r^{(k)} n_0}{\sum_{i=1}^M n_i a_{ir}} \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{(k)}}. \quad (3.105)$$

Weiteres Ausnutzen des Zusammenhangs in (3.99) ergibt die Iterationsvorschrift

$$f_r^{(k+1)} = f_r^{(k)} \frac{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{(k)}}}{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i}} \quad (3.106)$$

zur Bildrekonstruktion.

*Bemerkung.* Auch wenn die Zielfunktion auf einem anderen Ansatz basiert als die Rekonstruktion mit Hilfe der kleinsten Quadrate, ist in der Iterationsvorschrift wieder das gleiche Schema erkennbar. In Abbildung 3.8 sind die einzelnen Komponenten der Gleichung im Detail beschrieben. Der alte Pixelwert wird mit Hilfe eines Korrekturterms in jeder Iteration aktualisiert. Der Korrekturterm setzt sich dabei zusammen aus einem Vergleich zwischen den original aufgenommenen Mess- bzw. Projektions-

### 3.3. ITERATIVE REKONSTRUKTIONSVERFAHREN

daten und einer Vorwärtsprojektion der aktuellen Zwischenlösung. Hierfür werden Vorwärtsprojektion und Projektionsdaten zunächst mit Hilfe einer einfachen Rückprojektion in den Bildbereich transformiert. Ein fundamentaler Unterschied zu der Iterationsvorschrift in (3.79) und der in (3.100) hergeleiteten ist jedoch der multiplikative Charakter der Gleichung (3.106). Dieser hat zufolge, dass die initiale Annahme  $\mathbf{f}^{(0)}$  vom Nullvektor verschieden sein muss, da sonst alle folgenden Iterationen ebenfalls den Nullvektor ergeben würden.

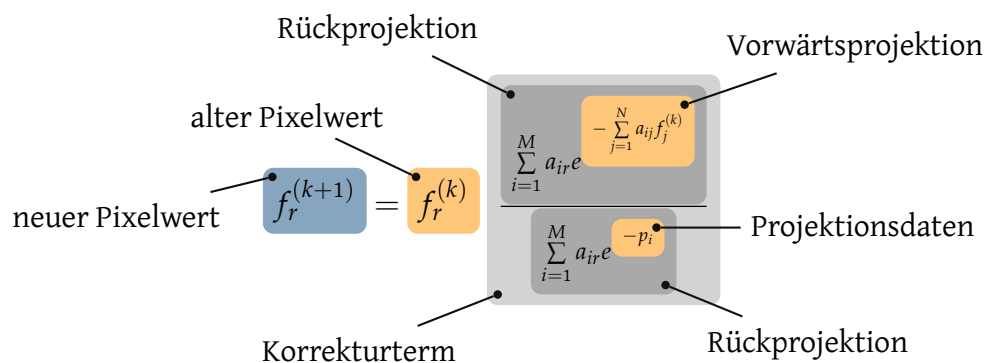


Abbildung 3.8: Erläuterung der einzelnen Komponenten in der Iterationsvorschrift für die Rekonstruktion mit Hilfe der Likelihood-Funktion.

#### 3.3.4 Regularisierung

Die bisher vorgestellten Rekonstruktionsverfahren sind inverse Probleme mit einer hohen Dimension. Wie eingangs bereits erwähnt, handelt es sich dabei um schlecht gestellte Probleme, welche dazu führen, dass die Lösung sehr instabil ist. Insbesondere in den Iterationsvorschriften (3.65), (3.72) und (3.106) können kleine Änderungen in den Messdaten, beispielsweise verursacht durch Rauschen, schon zu beträchtlichen Änderungen im rekonstruierten Bild führen. Ein der Zielfunktion beigefügter Regularisierungsterm dient dazu, schlecht gestellte Probleme besser zu kontrollieren und möglicherweise vorhandenes Vorwissen in die Problemstellung zu integrieren.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden die negative Log-Likelihood-Funktion aus (3.91) betrachtet. Zur Rekonstruktion des Bildes kann jedoch auch eine

andere der vorgestellten Zielfunktionen verwendet werden. Um mehr Einfluss auf das Ergebnis zu nehmen, wird nun das Optimierungsproblem in Form von

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} (\tilde{l}(\mathbf{f}) + \gamma R(\mathbf{f})) \quad (3.107)$$

durch den Strafterm  $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  erweitert. Der Vorfaktor  $\gamma \in \mathbb{R}$  wird dabei als Regularisierungsparameter bezeichnet, welcher dazu dient, den Einfluss der Regularisierung zu kontrollieren. Er stellt damit einen Kompromiss zwischen Datentreue bezüglich der aufgenommenen Projektionen und Stabilität der Lösung her. Idealerweise sollte die Formulierung von  $R(\mathbf{f})$  so erfolgen, dass das Optimierungsproblem (3.107) eine eindeutige Lösung besitzt und unerwünschte Lösungen nicht angenommen werden können. Um dies sicherzustellen, sollte zusätzlich dafür gesorgt werden, dass es sich bei der Funktion  $R(\mathbf{f})$  um eine konvexe Funktion handelt [97].

Eine paarweise quadratische Bestrafung der Unterschiede zwischen benachbarten Pixeln stellt eine einfache Art der Regularisierung dar, welche das Rauschen im zu rekonstruierenden Bild kontrolliert und die Lösung stabilisiert. Formal ist dies gegeben durch

$$R(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \mathcal{N}_j} \omega_k (f_j - f_k)^2, \quad (3.108)$$

wobei  $\mathcal{N}_j$  eine Nachbarschaft um den Pixel  $j$  angibt und  $\omega_k \geq 0$  eine Gewichtung der Pixelwertunterschiede in Abhängigkeit zu dessen Position beschreibt.

Die Wahl eines geeigneten Regularisierungsfunktional stellt einen komplexen und eigenständigen Forschungsbereich dar. Für eine detaillierte Auseinandersetzung mit der Regularisierung von inversen Problemen sei auf [64] verwiesen. Eine neu entwickelte Art der Regularisierung zur Integration von Vorwissen wird in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

### 3.4 Diskrete Projektionen

Die Systemmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  in (3.60), welche die zweidimensionale Radontransformation bzw. den Verlauf der Linienintegrale beschreibt, besitzt in der Praxis eine

### 3.4. DISKRETE PROJEKTIONEN

so enorme Größe, dass sie nicht im Speicher gehalten werden kann. Für ein einzelnes Schichtbild mit einer Größe von  $512 \times 512$  Pixel berechnet sich die Anzahl der Pixel zu

$$N = 512 \times 512 = 262\,144. \quad (3.109)$$

Der Somatom Definition AS Computertomograph der Firma Siemens AG besitzt zudem beispielsweise 1472 Dixel für eine einzelne Detektorzeile. Darüber hinaus werden in der Standardeinstellung Projektionen unter 1152 verschiedenen Winkelabstufungen aufgenommen. Somit berechnet sich die Gesamtanzahl der Projektionen zu

$$M = 1472 \times 1152 = 1\,695\,744. \quad (3.110)$$

Daraus folgt also, dass die Systemmatrix  $1\,695\,744 \times 262\,144 = 444\,529\,115\,136$  Elemente besitzt. Nimmt man weiter an, dass jeder dieser Werte in einem Fließkomma-Format mit 32 bit = 4 B abgespeichert ist, so beansprucht die Matrix

$$4\text{ B} \times 444\,529\,115\,136 = 1\,778\,116\,460\,544\text{ B} = 1778,12\text{ GB}. \quad (3.111)$$

Da diese fast 2 Terabytes<sup>2</sup> nur sehr schlecht im Speicher gehalten werden können, werden die Elemente  $a_{ij}$  während der Berechnung einer Projektion direkt bestimmt.

Bei den Projektionen wird zwischen einer Vorwärtsprojektion und einer Rückprojektion unterschieden (siehe hierzu auch Abbildung 3.8). Bei der Vorwärtsprojektion, in (3.106) ausgedrückt durch

$$p_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j, \quad (3.112)$$

wird das Linienintegral gebildet. Im diskreten Fall bedeutet dies, dass eine gewichtete Summe aller Pixelwerte entlang der Linie berechnet wird. Die Gewichtung erfolgt dabei meist basierend auf der Länge der Linie durch das Pixel. Die Rückprojektion, in (3.106) formal ausgedrückt durch

$$f_j = \sum_{i=1}^M a_{ij} e^{-p_i}, \quad (3.113)$$

---

<sup>2</sup>Zu bemerken ist, dass die Matrix **A** sehr viele Elemente besitzt, welche gleich Null sind. Dies ermöglicht eine dünn besetzte (engl. sparse) Repräsentation der Matrix, mit dessen Hilfe viel weniger Speicher in Anspruch genommen werden muss.

entspricht der Umkehrung der Vorwärtsprojektion. Aufgenommene Projektionswerte werden hierbei entlang der Linie zurück in das Bild geschrieben.

Für die Berechnung der Gewichtungen gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten. Die verbreitetsten Methoden sind dabei das Pixel-gesteuerte (engl. pixel-driven) [98], [99], das Strahlen-gesteuerte (engl. ray-casting) [100]–[102] und das Distanz-gesteuerte (engl. distance-driven) Verfahren [103], [104]. Um ein iteratives Vergrößern von Interpolationsfehlern zu verhindern, sollten Vorwärts- und Rückprojektion in der Regel aufeinander abgestimmt sein. Jedoch gibt es auch Studien, welche die Verwendung von ungleicher Vorwärts- und Rückprojektion untersuchen [105], [106].

Beim Verfahren von Siddon wird der Röntgenstrahl durch eine Linie zwischen Quelle und Detektor modelliert [101]. Für die Berechnung der Gewichtungen wird die Schnittlänge der Linie mit dem jeweiligen Pixel betrachtet. Hierzu werden alle Schnittpunkte der Pixelkanten mit dem Röntgenstrahl ermittelt.

Sei  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$  die Position der Röntgenquelle und  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$  die Position eines Detektors, dann kann der Röntgenstrahl zwischen  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{d}$  beschrieben werden durch

$$L(\alpha) = \mathbf{s} + \alpha (\mathbf{d} - \mathbf{s}), \quad (3.114)$$

wobei  $\alpha \in (0, 1)$  eine Position entlang der Linie angibt. Weiter seien durch

$$X(i) = X(1) + (i - 1)\delta_x, \quad i \in \{1, \dots, N_x + 1\} \quad (3.115)$$

die vertikalen Pixelkanten beschrieben. Die Variable  $N_x$  gibt dabei die Anzahl der Pixel entlang der  $x$ -Richtung an. Die Ausmaße eines einzelnen Pixels ist durch  $\delta_x$  gegeben und die Position der ersten Kante kann durch  $X(1) = 0$  festgelegt werden. Analog seien durch

$$Y(i) = Y(1) + (i - 1)\delta_y, \quad i \in \{1, \dots, N_y + 1\} \quad (3.116)$$

die horizontalen Pixelkanten beschrieben. Ziel soll es nun sein, die Schnittpunkte der horizontalen und vertikalen Pixelkanten, beschrieben durch  $\alpha \in \mathbb{R}^I$ , mit der Linie  $L$  zu bestimmen, wobei mit  $I$  die Anzahl der Schnittpunkte angegeben ist. Der Schnittpunkt

mit der  $i$ -ten vertikalen Pixelkante ist gegeben durch

$$\alpha_x(i) = \frac{X(i) - s_1}{(d_1 - s_1)}. \quad (3.117)$$

Analog gilt für die horizontalen Pixelkanten

$$\alpha_y(i) = \frac{Y(i) - s_2}{(d_2 - s_2)}. \quad (3.118)$$

Sollten die Nenner in (3.117) oder (3.118) Null sein, so ist  $\alpha_x(i)$  bzw.  $\alpha_y(i)$  undefiniert. Eine schematische Darstellung des Zusammenhangs ist in Abbildung 3.9 gezeigt. Die Schnittpunkte an  $\alpha_x(i)$  bzw.  $\alpha_y(i)$  sind in blau bzw. rot dargestellt.

Sind alle Schnittpunkte bestimmt, so können die verschiedenen  $\alpha_x(i)$ - und  $\alpha_y(i)$ -Werte zum Vektor  $\alpha$  zusammengefasst werden, indem die Werte aufsteigend sortiert werden. Die Distanz zwischen zwei Punkten, welche durch zwei aufeinanderfolgende  $\alpha$ -Werte definiert sind, ergibt die Länge des Röntgenstrahles durch den Pixel. Die korrespondierende Position des Pixels und damit auch die korrekte Position in der Systemmatrix wird mit Hilfe des Mittelpunktes auf der Geraden durch den Pixel bestimmt, da dieser immer innerhalb des zugehörigen Pixels liegt.

Die Berechnung der Systemmatrixeinträge für die Rückprojektion erfolgt auf dem gleichen Weg wie bei der Vorwärtsprojektion. Unterschiede gibt es nur hinsichtlich der Multiplikations- bzw. Zuweisungsvorschriften in Form von (3.112) und (3.113).

## 3.5 Grundlagen der Bildregistrierung

Im Rahmen der Regularisierung von Rekonstruktionsproblemen kann es mitunter vorkommen, dass es notwendig ist, zwei Bilder im Ortsraum aneinander anzugleichen. Ist beispielsweise Vorwissen in Form von Bildinformationen vorhanden, sei es von einer vorhergehenden Aufnahme oder von Geometriebeschreibungen eines Metallimplantates, so müssen diese Bildinformation eine örtliche Korrespondenz zum zu rekonstruierenden Bild aufweisen [107]–[110].

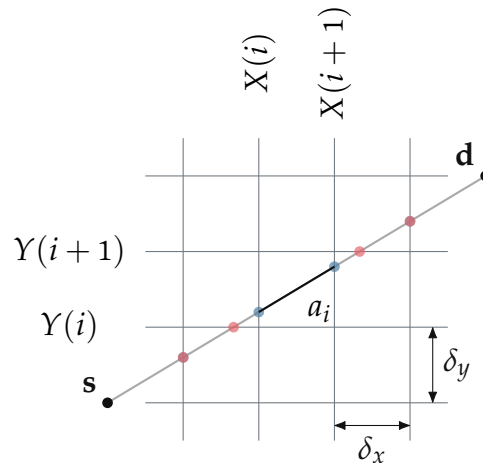


Abbildung 3.9: Schematische Darstellung der Vorwärtsprojektion nach Siddon. Die Schnittpunkte des Röntgenstrahles, welcher zwischen der Röntgenquelle  $s$  und Detektor  $d$  verläuft, und den vertikalen Pixelkanten  $X(i)$ , dargestellt in blau, und den horizontalen Pixelkanten  $Y(i)$ , dargestellt in rot.

Das Problem der Bildregistrierung beschreibt im Allgemeinen das Finden einer geeigneten Transformation, welche die räumliche Übereinstimmung eines Bildes  $t$  zu einem Bild  $r$  herstellen soll [111]–[114]. Üblicherweise bilden dabei das Bild  $t$ , im Folgenden als Targetbild bezeichnet, und  $r$ , im Folgenden als Referenzbild bezeichnet, das gleiche Objekt ab. Unterschiede treten zumeist durch verschiedene bildgebende Verfahren, eine unterschiedliche Position des Objektes oder unterschiedliche Aufnahmezeitpunkte auf [E9], [115], [116]. Die Herausforderung besteht hierbei darin zu bestimmen, wie eine Ähnlichkeit der beiden Bilder festgestellt werden kann und wie viele Freiheitsgrade eine Transformation haben sollte, um eine Korrespondenz zwischen den Bildern herzustellen.

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit sei das Problem der Bildregistrierung für zweidimensionale Bilder formal durch die folgende Definition gegeben.

**Definition 3.5.1.** Seien  $\mathcal{D} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ein Distanzmaß und  $r, t \in \mathbb{R}^N$  zwei Bilder, dann beschreibt das **Registrierungsproblem** das Finden einer Transformation  $\Gamma : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit den  $d$ -dimensionalen Transformationsparametern  $\gamma \in \mathbb{R}^d$

und ist gegeben durch das Optimierungsproblem

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^d} \mathcal{D}(\mathbf{r}, \Gamma(\mathbf{t}, \gamma)). \quad (3.119)$$

*Bemerkung.* Bei multimodalen Bildregistrierungsproblemen lässt sich (3.119) durch eine zusätzliche Transformation  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erweitern, welche dazu dient, den Grauwertbereich der unterschiedlichen Modalitäten anzupassen [117].

Im Idealfall weisen die Bilder  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{t}$  nach der Minimierung des Registrierungsproblems eine räumliche Korrespondenz auf, sodass Bildelemente gleicher Struktur sich räumlich überlagern. Das Distanzmaß  $\mathcal{D}$  ist ein Maß für die Ungleichheit der Bilder  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{t}$ . Für die Wahl des Maßes gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, wobei eine geeignete Bestimmung wesentlich von der konkreten Aufgabenstellung abhängig ist. Eine Zusammenfassung der gängigsten Distanzmaße wird in Abschnitt 3.5.2 vorgestellt. Auch die Wahl einer geeigneten Transformation  $\Gamma$  ist stark abhängig vom konkreten Registrierungsproblem. Transformationen, welche auch im Laufe dieser Arbeit Verwendung finden, werden in Abschnitt 3.5.1 diskutiert.

Das Problem der Bildregistrierung ist in der Regel ein schlecht gestelltes Problem, da weder Eindeutigkeit, Existenz einer Lösung noch eine stetige Abhängigkeit der Lösung zu den Daten gewährleistet werden kann (vergleiche hierzu Definition 3.1.2) [111], [117]. Aufgrund dessen wird das Optimierungsproblem (3.119) häufig durch einen Regularisierungsterm  $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  erweitert, sodass das Problem

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^d} \mathcal{D}(\mathbf{r}, \Gamma(\mathbf{t}, \gamma)) + \alpha R(\gamma) \quad (3.120)$$

zu lösen ist. Hierbei beschreibt  $\alpha > 0$  einen Regularisierungsparameter. Um eine sinnvolle Lösung für das Registrierungsproblem zu erhalten, ist es im Allgemeinen empfehlenswert, eine gewisse Glattheitsforderung an die Transformation  $\Gamma$  zu stellen. Der Term  $R(\gamma)$  dient dazu, die Lösungsmenge so einzuschränken, dass Lösungen mit gewünschten Eigenschaften bevorzugt und Lösungen, welche diese Eigenschaften nicht besitzen, durch diesen Term bestraft werden.

### 3.5.1 Transformationen zur Bildregistrierung

Die Wahl einer geeigneten Transformation ist stark abhängig vom konkreten Registrierungsproblem. Vor der Lösung des Problems sollte hinterfragt werden, ob es beispielsweise sinnvoll ist, eine Skalierung, Scherung, Translation, Rotation, Überlappung von Pixeln oder gar eine komplett freie Transformation zu erlauben. Man unterscheidet hierbei zwischen parametrischen und nicht-parametrischen Transformationen. Die parametrischen Transformationen sind durch eine gewisse Anzahl an Transformationsparametern, welche Abhängig von den jeweils erlaubten Verformungen sind, eindeutig bestimmt. Eine nicht-parametrische Transformation hingegen zeichnet sich durch eine sehr hohe Anzahl an Freiheitsgraden aus, wobei  $\gamma$  einen Verschiebungs- oder Verformungsvektor darstellt, welcher beispielsweise Krümmungseigenschaften oder Elastizität modelliert [113], [117], [118].

Sei im Folgenden  $\Gamma(\mathbf{t}, \gamma)$  eine Abbildung, die durch  $\varphi_\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jedem Bildelement  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  in  $\mathbf{t}$  eine eindeutig bestimmte Position zuweist. Hierbei ist der Zusammenhang zwischen dem vektorisierten Bild und dem zweidimensionalen Bild gegeben durch  $(x_1 - 1)N_x + x_2 = j, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , wobei  $N_x$  die Anzahl der Spalten beschreibt.

Die **rigide Transformation** für zweidimensionale Bilder sei dann durch

$$\varphi_\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (3.121)$$

mit der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $\det(\mathbf{Q}) = 1$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  gegeben. Diese Transformation erlaubt ausschließlich eine Rotation und Translation des Bildes  $\mathbf{t}$  und hat somit die Eigenschaft, dass die Distanz zwischen zwei Punkten im Bild stets erhalten bleibt. Der Vektor  $\gamma \in \mathbb{R}^3$  definiert dabei durch  $\gamma_1$  den Rotationswinkel und durch  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  die Translation, sodass

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \\ -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

Die Transformation besitzt somit 3 Freiheitsgrade.

Die **affin lineare Transformation** erlaubt zusätzlich noch eine Skalierung und Scherung von  $\mathbf{t}$  und ist gegeben durch

$$\varphi_{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (3.123)$$

wobei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit  $\det(\mathbf{A}) > 0$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  festgelegt ist. Die Transformation weist mit  $\gamma \in \mathbb{R}^6$  für die 4 Matrixeinträge in  $\mathbf{A}$  und den 2 Translationsparametern 6 Freiheitsgrade auf und besitzt damit die Eigenschaft, dass parallele Linien nach der Transformation stets parallel bleiben. In Abbildung 3.10 sind eine Reihe von Beispielen gezeigt, für welche eine bestimmte Art von Transformation notwendig ist, um sie auf ein gegebenes Referenzbild zu registrieren.

Für die rigide und affine Transformation ist eine Regularisierung in einer Art und Weise wie in (3.120) nicht sinnvoll, da die Lösungsmenge jeweils schon hinsichtlich der möglichen Bildmodifikationen eingeschränkt ist.

Mit Hilfe von nicht-rigiden Transformationen ist es möglich, gerade Linien auf Kurven abzubilden. Es gibt eine Vielzahl an Modellen, um eine solche Transformation zu beschreiben [119]. Für eine detaillierte Betrachtung von verschiedenen Transformationen und insbesondere für eine Auseinandersetzung mit nicht-rigiden Registrierungsansätzen sei auf [117] und [120] verwiesen.

### 3.5.2 Distanzmaße für die Bildregistrierung

Die Wahl eines geeigneten Distanzmaßes ist kritisch in Bezug auf eine erfolgreiche Bildregistrierung. Insbesondere hinsichtlich des Problems in (3.119) und den darauf anzuwendenden Optimierungsalgorithmus muss darauf geachtet werden, dass es sich bei  $\mathcal{D}$  um eine hinreichend oft differenzierbare Abbildung handelt.

Die gängigsten Distanzmaße in der Bildregistrierung basieren auf Intensität, Korrelation oder gegenseitigen Bildinformationen. Auch Distanzmaße, welche auf bestimmte Bildinformationen, wie zum Beispiel Kanten im Bild, zurückgreifen, sind verbreitet [121], [122].

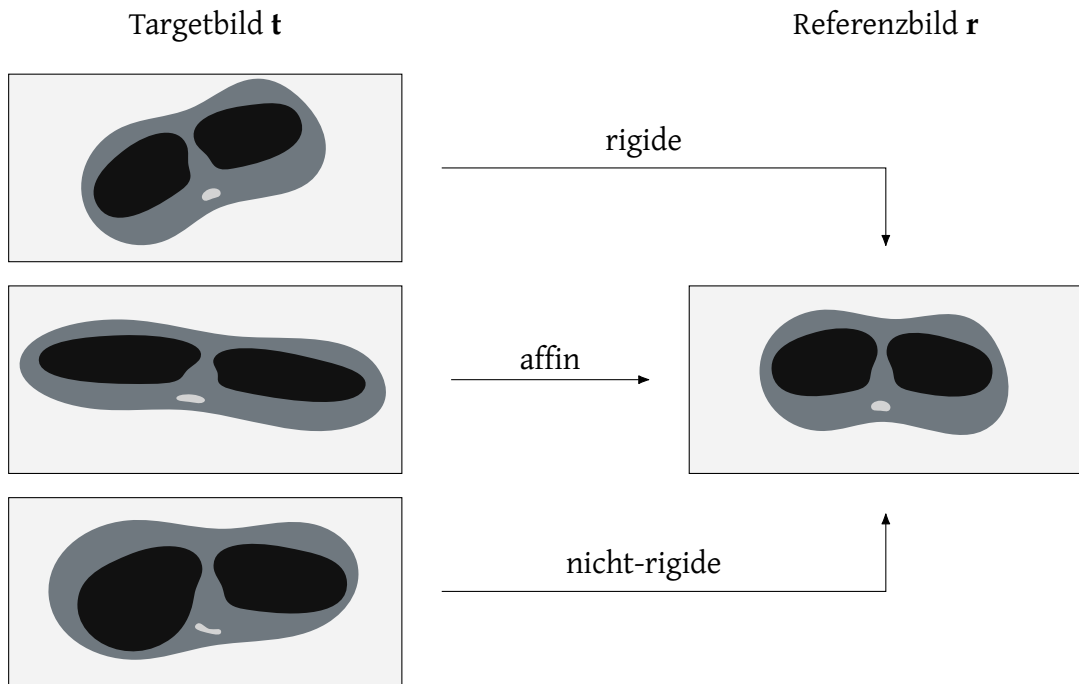


Abbildung 3.10: Beispiel für verschiedene Transformationen. Das erste Targetbild unterscheidet sich nur durch eine Rotation um  $23^\circ$  vom Referenzbild. Um eine örtliche Korrespondenz der beiden Bilder herzustellen ist es ausreichend, eine rigide Transformation zu verwenden. Das zweite Targetbild wurde rotiert und gestreckt. Um eine korrekte Registrierung durchzuführen, wird mindestens eine affine Transformation benötigt. Das dritte Targetbild ist flexibel verformt und kann nur mit Hilfe einer nicht-rigiden Transformation dem Referenzbild angeglichen werden.

Bilder, welche von der gleichen Modalität abgebildet wurden und das gleiche Objekt zeigen, haben die Eigenschaft, dass gleiche Strukturen auch gleiche Grauwertverteilungen aufweisen. In diesem Fall liegt es nahe, ausschließlich Intensitätsunterschiede in den Bildern zu bestrafen. Hierzu kann die **Summe der quadrierten Differenzen** (SSD, engl. sum of squared differences) herangezogen werden, welche im Folgenden durch

$$\mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{t} - \mathbf{r}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (t_j - r_j)^2 \quad (3.124)$$

definiert ist. Die Summe der quadrierten Differenzen ist sehr sensibel gegenüber Ausreißern in den Grauwerten, welche zum Beispiel durch Rauschen oder im Speziellen auch durch Artefakte hervorgerufen werden können. Der Effekt kann reduziert werden, indem absolute Differenzen in Form von

$$\mathcal{D}^{\text{SAD}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |t_j - r_j| \quad (3.125)$$

benutzt werden.

Ein weiteres sehr verwandtes Distanzmaß basiert auf der Pearson **Korrelation**. Sie liefert Informationen bezüglich des linearen Zusammenhangs der beiden Bilder und sei hier definiert durch

$$\mathcal{D}^{\text{Corr}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{r_j - \mu_{\mathbf{r}}}{\sigma_{\mathbf{r}}} \right) \left( \frac{t_j - \mu_{\mathbf{t}}}{\sigma_{\mathbf{t}}} \right), \quad (3.126)$$

wobei  $\mu_{\mathbf{x}}$  den Mittelwert und  $\sigma_{\mathbf{x}}$  die Standardabweichung einer Verteilung  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  beschreibt.

*Bemerkung.* Im Gegensatz zu den meisten Formulierungen in der Literatur ist das Distanzmaß hier als negative Korrelation angegeben, damit es mit dem Problem (3.119) im Einklang ist.

Basieren die in den Bildern vorhandenen Grauwerte nicht auf der gleichen Modalität, besitzen gleiche Strukturen nicht zwangsläufig gleiche Grauwertbereiche. So besitzen Knochenstrukturen in einem CT-Bild beispielsweise einen tendenziell hohen Kontrast im Vergleich zu Weichteilstrukturen und weisen in der Magnetresonanztomographie

im Allgemeinen eine relativ geringe Signalstärke auf.<sup>3</sup> Soll nun das Optimierungsproblem aus (3.119) für zwei Bilder aus verschiedenen Modalitäten gelöst werden, so ist es nicht empfehlenswert, ein Distanzmaß zu verwenden, welches allein auf Intensitätswertunterschieden basiert. Vielmehr sollte in diesem Fall der gemeinsame Informationsgehalt der Bilder bewertet werden. Ein in der Informationstheorie weitverbreitetes Maß, welches auf statistischen Zusammenhängen basiert, sind die so genannten Transinformationen oder **gegenseitigen Informationen** (MI, engl. mutual information). Das Distanzmaß beruht auf der Entropie und sei hier gegeben durch

$$\mathcal{D}^{\text{MI}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = H(\mathbf{t}, \mathbf{r}) - H(\mathbf{t}) - H(\mathbf{r}), \quad (3.127)$$

wobei  $H(\mathbf{x})$  die Entropie einer Dichteverteilung  $\mathbf{x}$  beschreibt und  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  die gemeinsame Entropie von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  darstellt. Die Entropie  $H(\mathbf{x})$  drückt die Unordnung der Variable  $\mathbf{x}$  aus und ist gegeben durch

$$H(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^I \rho_i(\mathbf{x}) \log \rho_i(\mathbf{x}), \quad \text{mit } \sum_{i=1}^I \rho_i(\mathbf{x}) = 1 \text{ und } \rho_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, I\}. \quad (3.128)$$

Hierbei beschreibt  $\rho(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^I$  das Histogramm des Bildes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  mit  $I$  verschiedenen Grauwertabstufungen.

*Bemerkung.* In der Literatur lassen sich verschiedene Definitionen der Entropie eines Bildes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  finden. Eine alternative Definition interpretiert jeden Pixeleintrag als Wahrscheinlichkeitswert. Wie aus (3.128) ersichtlich, würde in diesem Fall eine Normalisierung des Bildes  $\mathbf{x}$  erwartet werden, sodass  $\sum_{j=1}^N x_j = 1$ . Weiter würde gefordert werden, dass alle Pixeleinträge positiv sind. In Bezug auf CT-Bilder ist dies physikalisch plausibel, da Abschwächungskoeffizienten stets positiv sein sollten. Im Rahmen der Erläuterung zum ALIR-Algorithmus wird hierauf im weiteren Verlauf explizit eingegangen.

Die gemeinsame Entropie sei gegeben durch

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \rho_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log \rho_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.129)$$

---

<sup>3</sup>Mit Hilfe bestimmter Aufnahmesequenzen ist es jedoch auch möglich Knochenstrukturen hervorzuheben [123].

Das gemeinsamen Histogramm  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$  gibt an der Stelle  $\rho_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  die relative Häufigkeit an, wie oft sich die Grauwerte  $i \in \{1, 2, \dots, I\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$  in  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  überlappen, d.h. wie oft  $\mathbf{x}_k = i$  mit  $\mathbf{y}_k = j$ , wobei  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  gilt. Eine Beispielberechnung hierfür sei in Beispiel 3.5.1 gegeben. Für die gemeinsame Entropie gilt  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y})$  für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ . Sie berechnet den Informationsgehalt, welchen beide Bilder gemeinsam haben. Zeigen die Bilder  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  keine Korrespondenz, so ist die gemeinsame Entropie gleich der Summe der beiden Einzelentropien. Je mehr Korrespondenz zwischen den beiden Bildern besteht, desto kleiner wird die gemeinsame Entropie.

**Beispiel 3.5.1.** Seien zwei Bilder  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.130)$$

dann berechnet sich das gemeinsame Histogramm mit  $I = 3$  und  $J = 4$  verschiedenen Grauwertabstufungen zu

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.131)$$

wobei  $\rho_{11} = \frac{3}{9}$  angibt, wie oft der Grauwert 1 in  $\mathbf{x}$  mit 1 in  $\mathbf{y}$  überlappt.

*Bemerkung.* Ohne die Einzelentropien in (3.127) könnte leicht ein Minimum, welches möglicherweise sogar ein globaler Minimalpunkt sein könnte, von (3.119) angenommen werden, indem beide Bilder so transformiert werden, dass  $\mathbf{r} = \mathbf{t} = \mathbf{0}$  gilt. Durch die negative Gewichtung von  $H(\mathbf{r})$  und  $H(\mathbf{t})$  in (3.127) kann dies verhindert werden.

Die Bildregistrierung stellt ein komplexes und eigenständiges Forschungsfeld dar, welches im Rahmen dieser Arbeit nicht im Detail besprochen werden kann. Für Eigenschaften bezüglich der Differenzierbarkeit der vorgestellten Maße und weiterführende Erläuterungen sei jedoch auf [117] verwiesen.



## Kapitel 4

# Die Augmented Likelihood Image Reconstruction

Metallobjekte im Messfeld eines Computertomographen bergen viele Herausforderungen für die Bildrekonstruktion. Die Artefakte, welche durch das Metallobjekt hervorgerufen werden, überlagern zumeist das gesamte Bild und sind in der Lage, den diagnostischen Wert des Bildes massiv zu verringern. In der Regel ist es erforderlich, die inkonsistenten Projektionswerte, welche zu Strahlenverläufen durch das Metallobjekt korrespondieren, aus den Rohdaten zu entfernen. In der Konsequenz führt dieser Ansatz jedoch zu einem Informationsverlust in den Rohdaten.<sup>1</sup> Der Informationsgehalt, welcher durch die fehlenden Projektionen verloren geht, bezieht sich hierbei nicht ausschließlich auf das Metallobjekt. Vielmehr enthalten die verlorengangenen Projektionen Informationen bezüglich des Metallobjektes und der Anatomie des Patienten.

Für eine Berücksichtigung dieses Sachverhaltes bei Bildrekonstruktion können zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden: Die Entwicklung eines Algorithmus, welcher das Bild ohne diese Informationen rekonstruiert oder ein approximatives Wiederherstellen der verlorengangenen Projektionen. Einer der ersten Vorschläge, die fehlenden

---

<sup>1</sup>Im Falle einer Totalabsorption verursacht das Entfernen der inkonsistenten Projektionsdaten aus den Rohdaten keinen zusätzlichen Informationsverlust. In diesem Fall wird durch diesen Schritt vielmehr definiert, welche Informationen im Vorfeld schon nicht vorhanden waren, da die Metallprojektionen, wie zuvor bereits beschrieben, nicht für die Rekonstruktion geeignet sind.

Daten neu zu berechnen bestand darin, eine lineare Interpolation individuell für jeden Winkel entlang der bekannten Projektionswerte durchzuführen [124]. Die Methode ist leicht umsetzbar und erzeugt mitunter eine merkliche Reduktion von Artefakten. Betrachtet man jedoch eine iterative Vorgehensweise und formuliert die Bildrekonstruktion durch ein Optimierungsproblem, so ergeben sich eine Vielzahl an Möglichkeiten, die Rekonstruktion auf eine elaborierte Art und Weise zu beeinflussen. So ist es zum Beispiel möglich, mit Hilfe von Nebenbedingungen und Regularisierungstermen bestimmte wünschenswerte Eigenschaften im Bild zu erzwingen. Durch diese flexible Vorgehensweise lässt sich unter anderem Vorwissen über das zu rekonstruierende Bild in die Rekonstruktion integrieren. Ein Beispiel hierfür wurde bereits in Abschnitt 3.3.4 vorgestellt. Nimmt man an, dass das zu rekonstruierende Bild eine gewisse Glattheit besitzt, so kann beispielsweise ein quadratischer Strafterm, welcher die Grauwertunterschiede benachbarter Pixel bestraft, zur Regularisierung verwendet werden. Nimmt man weiterführend eine bestimmte Ähnlichkeit zu einem gegebenen bereits rekonstruierten Bild an, so können zudem Unterschiede zu diesem gegebenen Bild bestraft werden [107].

Im Speziellen soll hier untersucht werden, wie Informationen bezüglich eines gegebenenfalls vorhandenen Metallobjektes in die Rekonstruktion integriert werden können. Hierzu muss im Vorfeld bestimmt werden, welche Art von Informationen theoretisch vorhanden sein können. Diesbezüglich sei zunächst anzumerken, dass Hersteller von Metallimplantaten grundsätzlich Auskunft über die Zusammensetzung von Implantaten geben können. Zusammen mit einer exakten Geometriebeschreibung, welche sich von einer Modellbeschreibung des Implantates ableiten lässt, können so theoretisch Abschwächungskoeffizienten für das Metallobjekt bestimmt werden. Der hier vorgestellte Algorithmus basiert in den Grundzügen auf dem Augmented Lagrangian Algorithmus, welcher in Abschnitt 3.2.5 vorgestellt wurde, wobei das Zielfunktional zur Bildrekonstruktion von der Log-Likelihood-Funktion aus Abschnitt 3.3.3 abgeleitet ist. Das daher auch als Augmented Likelihood Image Reconstruction (ALIR) bezeichnete Verfahren bietet die Möglichkeit, mit Hilfe einer geeigneten Formulierung von Nebenbedingungen Vorwissen über die Form des Metallobjektes und dessen Abschwächung in den Rekonstruktionsprozess zu integrieren. Weitergehend wird zusätzlich der iterative Charakter des Optimierungsprozesses ausgenutzt, um verlorengegangene Informationen im Rohdatenraum approximativ wiederherzustellen.

Im Folgenden werden die einzelnen Komponenten des Algorithmus zusammen mit einer neuartigen, nicht-lokalen Regularisierung genauer diskutiert. Hierzu wird zunächst in Abschnitt 4.1 die Zielfunktionen für die Rekonstruktion gemeinsam mit den zur Verfügung gestellten Parametern vorgestellt. In Abschnitt 4.2 wird die Integration von Vorwissen in Form von Nebenbedingungen, welche an die Rekonstruktion gestellt werden, beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 4.3 die Berechnung von fehlenden Projektionsdaten basierend auf Zwischenergebnissen der Rekonstruktion diskutiert. Eine Zusammenfassung des kompletten Algorithmus wird in Abschnitt 4.4 gegeben. Am Ende des Kapitels wird ein Regularisierungsterm vorgestellt, welcher in der Lage ist, ein gegebenes Bild mit in die Rekonstruktion einfließen zu lassen.

### 4.1 Die Zielfunktion

Für die Rekonstruktion des Bildes wird im Rahmen des hier vorgestellten Algorithmus die in Abschnitt 3.3.3 hergeleitete negative Log-Likelihood-Funktion verwendet. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass auch andere Zielfunktionen für die Rekonstruktion verwendet werden können. So kann die negative Log-Likelihood-Funktion beispielsweise durch das in Abschnitt 3.3.1 vorgestellte Kleinste-Quadrate-Funktional ersetzt werden. Ein wichtiger Aspekt für die Wahl der Zielfunktion sind die Konvexitätseigenschaften der Funktion. Die Konvexitätseigenschaften der hier gewählten Funktion werden in Abschnitt 4.1.4 genauer analysiert.

Für die Korrektur von Metallartefakten mit Hilfe des ALIR-Algorithmus muss die negative Log-Likelihood-Funktion angepasst werden. Hierzu sei jedoch im folgenden Abschnitt zunächst angegeben, welche Parameter dem Algorithmus zur Rekonstruktion eines Bildes bereitstehen.

#### 4.1.1 Gegebene Parameter

Da im Folgenden davon ausgegangen wird, dass sich im zu rekonstruierenden Bild ein Metallobjekt befindet und die Form dieses Objektes als bekannt angenommen wird,

kann die Menge der für die Rekonstruktion bekannten Parameter erweitert werden. Neben den aufgenommenen Intensitäten stehen dem Algorithmus daher auch genauere Information in Bezug auf das Metallobjekt zur Verfügung.

Ist die Form eines Implantates in Form eines CAD-Datensatzes<sup>2</sup> gegeben, so kann von diesem eine Matrix  $\mathbf{Q} \in [0, 1]^{N \times N}$  abgeleitet werden, welche eine Maske für das Metallobjekt repräsentiert. Diese Matrix gibt an, welche Pixel im Bild zum Metallobjekt korrespondieren und welche nicht. Die Matrix ist so modelliert, dass sie eine Diagonalform besitzt, wobei für ihre Matrixelemente  $q_{ij} = 0$  gilt, wenn  $i \neq j$  mit  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Ferner sei auf der Diagonalen die Form des Objektes gegeben, so dass die Matrix-Vektor-Multiplikation  $\mathbf{Q}\mathbf{f}$  die Form des Implantates im Bild  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  beschreibt. Hierbei werden alle Pixelwerte im Bild, die nicht zum Metallobjekt korrespondieren, auf den Wert 0 gesetzt.

Weiter seien basierend auf Informationen bezüglich der Materialzusammensetzung des Metallimplantates und der genutzten Strahlung die Abschwächungskoeffizienten des Implantates gegeben. Diese werden im weiteren Verlauf durch den Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  repräsentiert. Für die Maske  $\mathbf{Q}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  gilt basierend auf diesen Werten somit

$$q_{jj} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } b_j = 0 \\ m_j & \text{wenn } b_j > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

mit  $m_j \in \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ .

Die Maske  $\mathbf{Q}$  stellt primär eine binäre Formbeschreibung des Implantates dar, erlaubt jedoch durch die Menge  $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$  auch eine Modellierung des Partialvolumeneffektes an der Kante des Implantates.

### 4.1.2 Identifizierung der Metallprojektionen

Wie in Abschnitt 2.3.7 erläutert, ist die effektive Energie des Röntgenstrahls im klinischen Computertomographen nicht ausreichend, um das erhöhte Absorptionsvermögen eines Metallimplantates hinreichend zu überwinden und eine Detektion von

<sup>2</sup>CAD steht für Computer-aided design und bezeichnet die computergestützte Konstruktion von Produkten.

Photonen über dem Rauschlevel zu ermöglichen. In der Konsequenz können Projektionen, welche durch ein Metallimplantat verlaufen, nur inkonsistente Informationen für die Rekonstruktion des Bildes beitragen und sollen daher im Folgenden für die Rekonstruktion nicht berücksichtigt werden. Eine direkte Identifizierung dieser Metallprojektionen im Rohdatenraum ist mit Hilfe von einfachen Schwellwertverfahren im Allgemeinen nicht möglich, da hierbei zumeist auch andere Projektionswerte segmentiert werden. Einfacher ist eine Segmentierung im Bildbereich, da die Abschwächungskoeffizienten für das Metall in der Regel sehr viel größer sind als die Abschwächungskoeffizienten der umgebenden Anatomie. In Abbildung 4.1 ist eine mögliche Vorgehensweise schematisch dargestellt. Basierend auf einem gegebenen Sinogramm kann mit Hilfe der gefilterten Rückprojektion (FBP, engl. filtered backprojection) eine initiale Rekonstruktion erstellt werden. Dieses Bild kann anschließend durch Verwendung eines Schwellwertverfahrens und dem Schwellwert  $\tau \in \mathbb{R}$  segmentiert werden, sodass ein Bild  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$  mit der Eigenschaft

$$g_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f_j < \tau \\ f_j & \text{sonst} \end{cases}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4.2)$$

entsteht. Der Schwellwert  $\tau$  muss dabei so gewählt werden, dass  $\mathbf{g}$  ausschließlich das Metallobjekt beinhaltet. Durch Anwendung einer Vorwärtsprojektion können im Anschluss die Metallprojektionen im Rohdatenraum identifiziert werden. Formal sei die Menge der Indizes, welche zu Metallprojektionen korrespondieren, gegeben durch

$$\mathcal{M}_{\text{metal}} = \{i \in \mathcal{M} \mid (\mathbf{A}\mathbf{g})_i > 0\}, \quad (4.3)$$

wobei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  die Systemmatrix beschreibt,  $M$  die Anzahl an Projektionen angibt und  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$  gilt.

Ist kein Vorwissen in Bezug auf das Metallimplantat vorhanden, so produziert dieses Segmentierungsverfahren hinreichend gute Ergebnisse. In der Praxis ist es meist ratsam, die Segmentierung des Metallimplantates um eine Pixelgröße zu erweitern. Dies hat zur Folge, dass auch Projektionswerte, welche aufgrund des Partialvolumeneffektes nicht in der Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  enthalten sind, berücksichtigt werden. Enthält die initiale Rekonstruktion, welche für die Segmentierung genutzt wird, sehr stark ausgeprägte Artefakte, so kann eine exakte Schwellwertsegmentierung schwierig sein. Dies

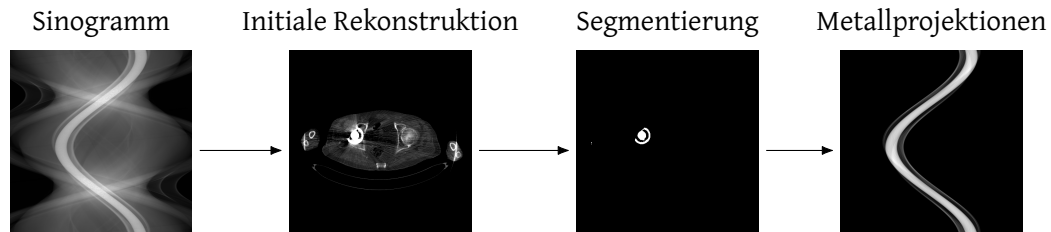


Abbildung 4.1: Segmentierung der Metallprojektionen mit Hilfe eines Schwellwertverfahrens im Bildbereich. Zunächst wird eine initiale Rekonstruktion mit Hilfe der FBP erstellt. Das resultierende Bild wird anschließend unter Verwendung eines Schwellwertverfahrens bezüglich des Metallimplantates segmentiert. Eine anschließende Vorwärtsprojektion der Segmentierung liefert ein Sinogramm, welches ausschließlich an den Positionen, welche mit dem Metallobjekt assoziiert werden, Werte größer Null aufweist.

ist bedingt durch die Tatsache, dass die Artefakte Abschwächungskoeffizienten im Bild verursachen können, welche ähnlich hoch sind wie die des Metallimplantates. Um bei weniger stark ausgeprägten Segmentierungsfehlern falsch segmentierte Artefakte zu korrigieren, kann eine Erosion gefolgt von einer Dilatation durchgeführt werden. In Abbildung 4.2 ist diese mögliche Vorgehensweise beispielhaft dargestellt. Auf der linken Seite ist eine initiale Segmentierung gezeigt, welche falsch segmentierte Streifen beinhaltet. Mit Hilfe der morphologischen Bildverarbeitungsoperation Erosion können die Streifen aus der Segmentierung entfernt werden.<sup>3</sup> Hierbei wird für jeden Pixel geprüft, ob ein gegebenes Strukturelement in die initiale Segmentierung passt. Ist dies nicht gegeben, so wird das Pixel aus der Segmentierung entfernt. In dem hier gezeigten Beispiel wurde ein quadratisches Strukturelement mit einer Größe von 4 Pixeln in  $x$ - und  $y$ -Richtung gewählt. Die resultierende Segmentierungsmaske ist im Vergleich zur initialen Segmentierung verkleinert. Um diesen Effekt zu korrigieren, wird eine Dilatation auf die Segmentierung angewandt. Die Dilatation stellt die Umkehrung der Erosion dar, bei welcher für jedes Pixel geprüft wird, ob mindestens ein Pixel innerhalb des Strukturelementes zur ursprünglichen Segmentierung gehört. Ist dies der Fall, so gehört das Pixel zur neuen Segmentierung.

<sup>3</sup>Für sehr kleine oder schmale Metallimplantate, wie zum Beispiel Stents oder Metalldrähte ist dieses Vorgehen nicht geeignet, da sie durch den Erosionsschritt gegebenenfalls komplett aus der Segmentierung entfernt werden. Allerdings verursachen solche Objekte selten stark ausgeprägte Artefakte, sodass eine Korrektur der Segmentierung in den meisten Fällen nicht notwendig ist.

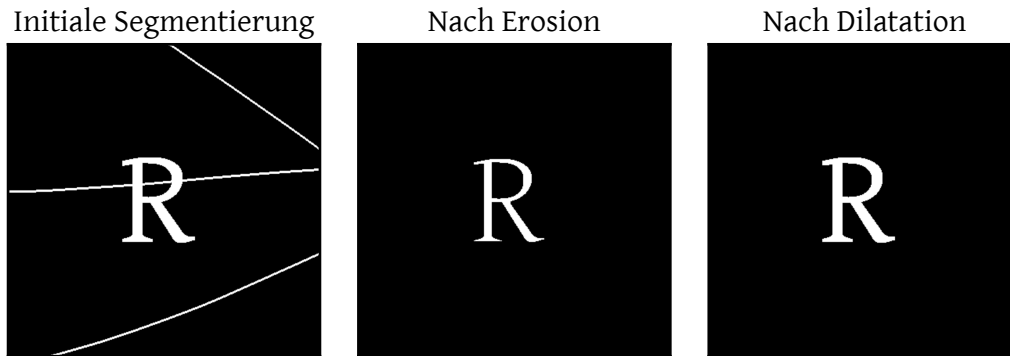


Abbildung 4.2: Korrektur von Segmentierungsfehlern mit Hilfe von Erosion und Dilatation. Mit Hilfe der Erosion kann die Segmentierung so verkleinert werden, dass die falsch segmentierten Streifen nicht mehr zur Maske gehören. Eine anschließende Dilatation vergrößert die Segmentierungsmaske wieder.

Liegt Vorwissen über das Metallobjekt im zu rekonstruierenden Bild vor, so bietet sich eine neue Möglichkeit der Segmentierung an, welche eine potenziell exaktere Differenzierung der Metallprojektionen erlaubt. Die Formulierungen für  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{b}$  im vorhergehenden Abschnitt suggerieren indirekt, dass bekannt sei, an welcher Position im Bild sich das Metallobjekt befindet. Ohne zusätzliche Schritte ist dies jedoch nicht der Fall. Ein mögliches Vorgehen ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Um die Indizes der Metallprojektionen herauszufinden, kann abermals mit einer initialen Rekonstruktion begonnen werden. Mit Hilfe eines Schwellwertverfahrens wird zunächst eine grobe Segmentierung des Metallimplantates erstellt, sodass  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$  wie in (4.2) definiert ist. Basierend auf dieser Segmentierung kann anschließend der Masseschwerpunkt (COM, engl. center of mass) des segmentierten Objektes berechnet werden. Hierzu seien die Koordinaten

$$\{x_{\text{COM}}, y_{\text{COM}}\} = \left\{ \frac{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} x \mathcal{G}(x-1)N_x+y}{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \mathcal{G}(x-1)N_x+y}, \frac{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} y \mathcal{G}(x-1)N_x+y}{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \mathcal{G}(x-1)N_x+y} \right\} \quad (4.4)$$

definiert, wobei  $N_x$  die Anzahl der Spalten und  $N_y$  die Anzahl der Zeilen im Bild angibt. Weiter sei der hierzu korrespondierende Index im segmentierten Bild  $\mathbf{g}$  angegeben durch  $j_{\text{COM}} = (x_{\text{COM}} - 1)N_x + y_{\text{COM}}$  mit  $j_{\text{COM}} \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Auch für den von der vorhandenen Geometriebeschreibung des Metallimplantates abgeleiteten Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  kann der Masseschwerpunkt ermittelt werden. So können basierend auf den beiden Masseschwerpunkten Translationsparameter berechnet werden, welche dafür sorgen, dass eine initiale Übereinstimmung der Position des Vorwissens mit dem im Bild vorhandenem Implantat entsteht. Aufbauend auf dieser initialen Positionierung kann nun ein Registrierungsprozess durchgeführt werden, welcher die exakte Position des Implantates bestimmt. Hierfür ist es ausreichend, eine rigide Transformation zu erlauben, da nicht zu erwarten ist, dass sich das Metallimplantat bezüglich des Vorwissens stark verformt hat. Da weiter angenommen wird, dass  $\mathbf{b}$  von der Geometriebeschreibung abgeleitete Abschwächungskoeffizienten enthält, können mit Hilfe des Distanzmaßes theoretisch direkt die Intensitätsunterschiede bestraft werden. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass die Abschwächungskoeffizienten des Implantates aufgrund von Artefakten in der initialen Rekonstruktion nicht korrekt angegeben sind. Daher ist es notwendig, mehr Variabilität zu erlauben und ein Distanzmaß basierend auf der Korrelation oder Mutual Information zu verwenden (siehe Abschnitt 3.5.2). Letzteres sorgt hierbei insbesondere bei stark ausgeprägten Artefakten für mehr Stabilität, sodass das Problem

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^3} \mathcal{D}^{\text{MI}}(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma)) \quad (4.5)$$

zum Finden der finalen Position des Metallimplantates gelöst werden sollte. Das Ergebnis dieses Optimierungsproblems liefert die exakte Position und Ausrichtung des Metallobjektes. Ähnlich wie in (4.3) kann nun eine Vorwärtsprojektion des Vorwissens in Form von  $\Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*)$  durchgeführt werden, um die Menge der Indizes für die Metallprojektionen durch

$$\mathcal{M}_{\text{metal}} = \{i \in \mathcal{M} \mid (\mathbf{A}\Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*))_i > 0\}, \quad (4.6)$$

zu ermitteln. Die hier beschriebene Vorgehensweise verspricht eine deutlich genauere Identifizierung der Metallprojektionen als die zuvor beschriebene Methode, da die

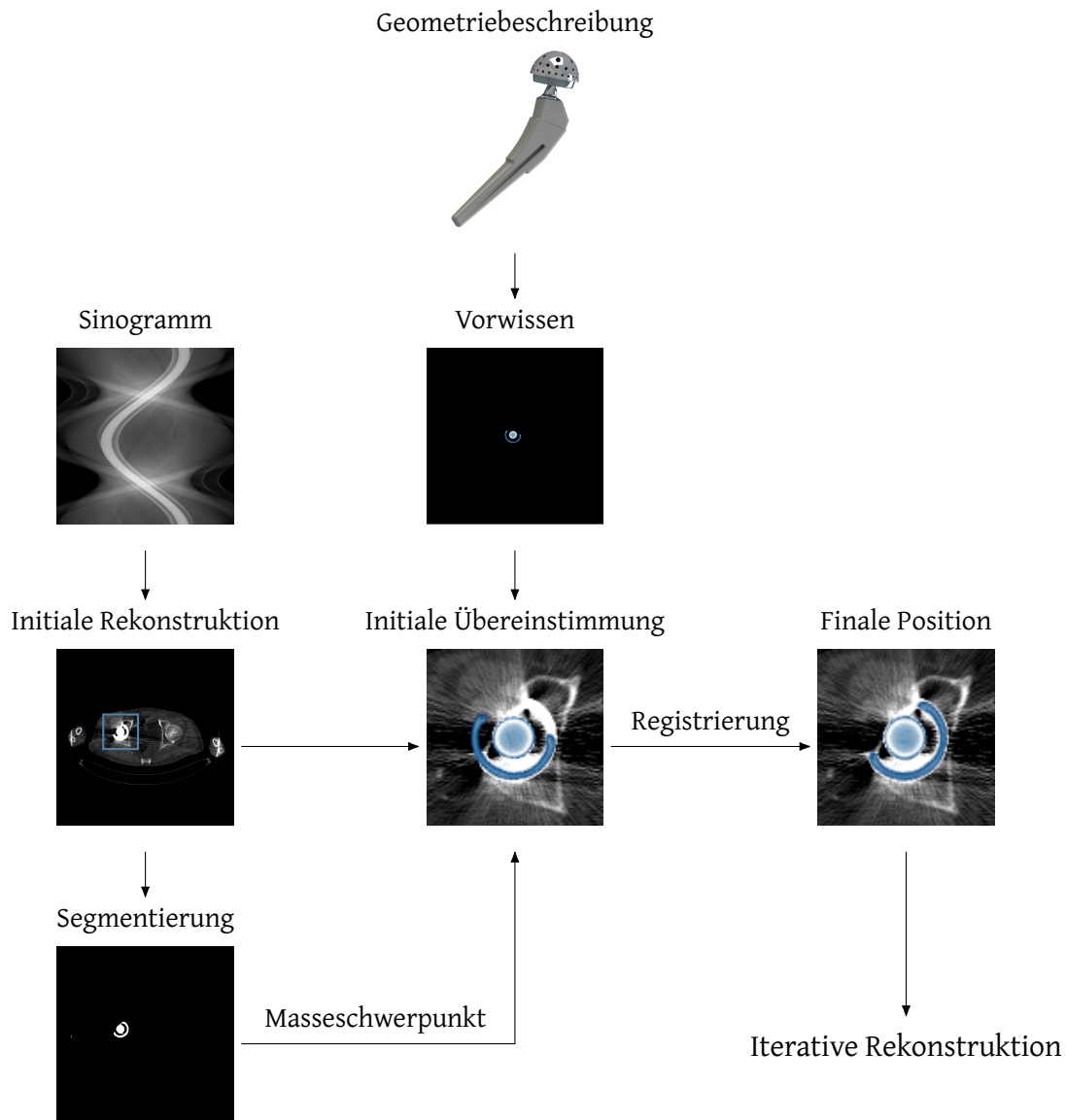


Abbildung 4.3: Sind Geometrieinformationen bezüglich des Metallimplantates bekannt, so kann eine Segmentierung des Implantates mit Hilfe eines Registrierungsansatzes erfolgen. Hierzu wird zunächst eine initiale Rekonstruktion ohne Metallartefaktkorrektur erstellt. Basierend auf diesem Bild wird eine simple schwellwertbasierte Segmentierung durchgeführt, welche dazu dient, eine approximative Position des Metallobjektes zu ermitteln. Anschließend kann ein Registrierungsprozess mit Hilfe dieser Position initialisiert werden. Das Ergebnis der Registrierung liefert die gewünschte Position und Form des Metallimplantates. Eine anschließende Vorwärtsprojektion liefert wiederum die gesuchten Metallprojektionen.

Segmentierung auf einer exakten Geometriebeschreibung in Form des Vorwissens über das Implantat beruht.

### 4.1.3 Formulierung der Zielfunktion ohne Metallprojektionen

Mit Hilfe der zuvor definierten Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  lässt sich nun die negative log-likelihood Funktion so umschreiben, dass Projektionen, welche durch Metall verlaufen, nicht berücksichtigt werden. Hierzu wird zunächst die Menge der Indizes, welche nicht zu Metallprojektionen korrespondieren, durch

$$\mathcal{M}_{\text{valid}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{\text{metal}} \quad (4.7)$$

definiert, wobei  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{valid}} \cup \mathcal{M}_{\text{metal}}$  und  $\mathcal{M}_{\text{valid}} \cap \mathcal{M}_{\text{metal}} = \emptyset$  gilt. Die in (3.91) angegebene Funktion wird nun so abgewandelt, dass die Summe nicht mehr alle Projektionen berücksichtigt, sondern sich auf die korrekt aufgenommenen Projektionen beschränkt. Dementsprechend wird die Zielfunktion für die Rekonstruktion zu

$$\hat{l}(\mathbf{f}) = \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} \left( n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j + n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) \quad (4.8)$$

umformuliert.

### 4.1.4 Konvexitätseigenschaften

Einen negativen Einfluss auf die Konvexitätseigenschaften der Zielfunktion hat die Verwendung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  im Vergleich zur Funktion (3.91) nicht (vergleiche hier-

zu auch Abschnitt 3.3.3). Betrachtet man die zweite partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{l}(\mathbf{f})}{\partial f_r \partial f_s} &= \frac{\partial \left( \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} n_i a_{ir} - n_0 \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right)}{\partial f_s} \\ &= n_0 \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} a_{ir} a_{is} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

so kann mit Hilfe der quadratischen Form

$$\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N v_r \left( n_0 \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} a_{ir} a_{is} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) v_s, \quad (4.10)$$

wobei  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ , festgestellt werden, dass es sich beim Zielfunktional (4.8) um eine konvexe Funktion handelt. Dies gilt, da dessen Hessematrix positiv definit ist, sofern  $\mathbf{A}$  mindestens so viele Zeilen (entspricht der Anzahl an Projektionen  $M$ ) wie Spalten (entspricht der Anzahl an Pixeln  $N$ ) besitzt und  $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \min\{N, M\}$  gilt [95].

#### 4.1.5 Entstehender Informationsverlust durch das Implantat

Die Verwendung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  für die Rekonstruktion erzeugt einen Informationsverlust, welcher für einen betroffenen Pixel mit dem Datenverlust bei der "Limited-Angle"-Tomographie vergleichbar ist [57], [125]–[127]. Betrachtet man beispielsweise die Tomosynthese, so handelt es sich dabei um ein Verfahren, bei welchem nur ein limitierter Winkelbereich für die Rekonstruktion zur Verfügung steht [60]. Grund hierfür ist, dass das Quelle-Detektor-System nicht mehr  $360^\circ$  (bzw.  $180^\circ$  plus Öffnungswinkel des Fächerstrahls) um das Zielobjekt rotiert, sondern nur einen kleinen Bereich abdeckt. Für die Rekonstruktion der Bilder bedeutet dies, dass der Rohdatenraum nicht mehr hinreichend stark gefüllt ist und dass ein so genanntes Limited-Angle-Problem bewältigt werden muss [57], [58].

Die Tatsache, dass für den hier vorgestellten Rekonstruktionsalgorithmus nicht mehr die Menge  $\mathcal{M}$  benutzt wird, sondern  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$ , erzeugt eine ähnliche Problemstellung.

Ein fundamentaler Unterschied besteht jedoch darin, dass sich der fehlende Winkelbereich für jede Pixelposition im zu rekonstruierenden Bild unterscheidet. Die fehlenden Winkel werden hierbei nicht mehr global durch die Rotation des Quelle-Detektor-Systems bestimmt, sondern lassen sich anhand der pixelspezifischen Öffnungswinkel zum Metallobjekt bestimmen. In Abbildung 4.4 ist dieser Sachverhalt schematisch dargestellt. Betrachtet man einen Pixel  $j$ , so können Linien bestimmt werden, welche diesen schneiden und tangential zum Metallobjekt verlaufen. Der Winkel  $\alpha$  zwischen diesen Linien gibt an, wie groß der Winkelbereich ist, welcher aufgrund der Verwendung von  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  für die Rekonstruktion eines individuellen Pixels nicht zur Verfügung steht.

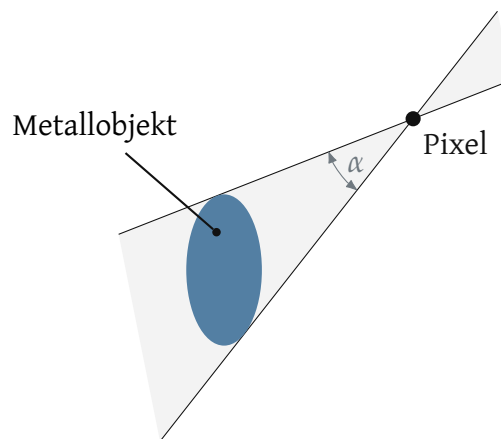


Abbildung 4.4: Werden Projektionsdaten, welche durch Metall verlaufen, für die Rekonstruktion nicht verwendet, so entsteht für jeden Pixel im Bild ein Informationsverlust, der durch den Öffnungswinkel  $\alpha$  zum Metallobjekt beschrieben werden kann.

Abhängig von der Position des Pixels im Bild, dem Abstand zum Metallobjekt und dessen Form, kann für jeden Pixel individuell der entstandene Informationsverlust bestimmt werden. In Abbildung 4.5 ist für jeden Pixel der Winkel  $\alpha_j$  bezüglich des schwarz visualisierten Metallobjektes dargestellt. Während Pixel, welche weit entfernt vom Metallobjekt liegen, einen relativ geringen Informationsverlust erleiden ( $< 20^\circ$ ), stehen einem Pixel, welcher sich in der unmittelbaren Umgebung des Metallobjektes befindet, kaum Informationen für die Rekonstruktion zur Verfügung.

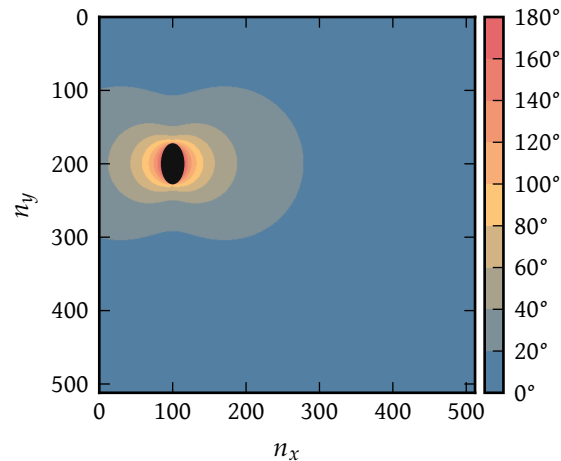


Abbildung 4.5: Entstehender Verlust an Winkelinformationen für jeden Pixel, wenn Projektionen, welche zum Metallobjekt (dargestellt in schwarz) gehören, nicht für die Rekonstruktion berücksichtigt werden. Die Pixelwerte entsprechen dem in Abbildung 4.4 dargestellten Öffnungswinkel  $\alpha$ .

## 4.2 Die Nebenbedingungen

Um dem im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Informationsverlust entgegenzuwirken, wird die Minimierung von (4.8) durch Nebenbedingungen erweitert. Da eine negative Abschwächung des Röntgenstrahles in der Realität physikalisch nicht erklärbar wäre, ist eine erste sinnvoll erscheinende Bedingung die Positivitätsforderung an den Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ . Weiterhin wird an dieser Stelle gefordert, dass sich die rekonstruierten Abschwächungskoeffizienten in einer kompakten Menge  $\Omega$  von zulässigen Abschwächungskoeffizienten befinden. Hierdurch kann nicht nur eine untere Grenze mit  $\omega_{\min} = 0 = \min\{\Omega\}$ , sondern auch eine obere Grenze  $\omega_{\max} = \max\{\Omega\}$  festgelegt werden. Diese kann beispielsweise dazu genutzt werden, um einen maximalen Abschwächungskoeffizienten für das Metallimplantat festzulegen. Durch die Forderung ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{f} \in \Omega^N} \mathring{l}(\mathbf{f}), \quad (4.11)$$

welches sich, da in der Regel  $\Omega := [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  gilt,<sup>4</sup> auch durch

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \mathring{l}(\mathbf{f}), \quad (4.12a)$$

$$\text{sodass } \omega_{\min} \leq f_j \leq \omega_{\max} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4.12b)$$

formulieren lässt.

Eine weitere Nebenbedingung sorgt dafür, dass das bekannte Vorwissen bezüglich des Metallimplantates mit in die Rekonstruktion integriert wird. Hierzu soll forciert werden, dass die bekannten Abschwächungskoeffizienten  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  an der korrekten Position im Bild rekonstruiert werden. Eine Möglichkeit, dies zu realisieren, besteht darin, die Unterschiede zwischen dem rekonstruierten Bild und den bekannten Abschwächungskoeffizienten durch die Forderung

$$\mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

zu bestrafen. Um den Strafterm auf die Region des Implantates zu begrenzen, wird hierbei die Maske  $\mathbf{Q} \in [0, 1]^{N \times N}$  verwendet.

Ist die Position des Implantates initial nicht bekannt, so muss der Vektor  $\mathbf{b}$  beziehungsweise die Matrix  $\mathbf{Q}$  angepasst werden. Hierzu können die Transformationsparameter  $\gamma^*$  aus Abschnitt 4.1.2 herangezogen werden. Eine Umformulierung der Nebenbedingungen ergibt die Gleichung

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{f} - \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*)) = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

wobei  $\text{diag}(\mathbf{Q}^*) = \Gamma(\text{diag}(\mathbf{Q}), \gamma^*)$  gilt. Hierbei beschreibt  $\text{diag}(\cdot)$  die Diagonale einer Matrix.

Eine weitere Möglichkeit, eine geeignete Transformation durchzuführen, besteht in einer simultanen Registrierung und Rekonstruktion. Hierbei werden in jedem Iterationsschritt der Rekonstruktion neue Transformationsparameter bestimmt. Eine detailliertere Beschreibung dieses Ansatzes wird in Abschnitt 4.6 gegeben.

<sup>4</sup>Ein Ausschließen von speziellen Abschwächungskoeffizienten  $f_i \in (\omega_{\min}, \omega_{\max})$  erscheint im hier beschriebenen Zusammenhang wenig sinnvoll. Jedoch bleibt ein Vorgehen mit einer solchen Modellierung für den ALIR-Algorithmus weiterhin möglich.

## 4.3 Berechnung von fehlenden Projektionsdaten

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Nebenbedingungen helfen zwar dabei, sinnvolle Abschwächungskoeffizienten im Bild zu rekonstruieren, jedoch reichen sie nicht aus, um alle Streifenartefakte im Bild zu vermeiden. Hauptverantwortlich für die Fehler im rekonstruierten Bild sind die fehlenden Projektionswerte im Rohdatenraum, welche durch die Verwendung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{valid}} \subset \mathcal{M}$  in (4.8) verursacht werden.

Um diesem Problem entgegenzuwirken, soll im Folgenden erläutert werden, wie neue Projektionswerte für die Indexmenge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  berechnet werden können.

### 4.3.1 Lineare Interpolation

Eine naheliegende Methodik, die fehlenden Projektionswerte zu berechnen, wurde bereits 1987 von Kalender et al. vorgestellt [124]. Hierbei wird jeder aufgenommene Winkel  $\theta$  individuell betrachtet und die fehlenden Projektionswerte werden durch lineare Interpolation auf Basis der bekannten Werte ermittelt.

Sei für einen festen Aufnahmewinkel  $\theta$  der letzte linksseitig liegende Projektionswert  $p_l$  mit  $l \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  und  $(l + 1) \notin \mathcal{M}_{\text{valid}}$  beziehungsweise  $(l + 1) \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  definiert. Analog sei der rechtsseitige Index mit  $r \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  und  $(r - 1) \notin \mathcal{M}_{\text{valid}}$  beziehungsweise  $(r - 1) \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  festgelegt (siehe hierzu auch Abbildung 4.6). Die fehlenden Projektionswerte  $p_i$  für den Winkel  $\theta$  mit  $i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  können dann durch

$$p_i = p_l + x(p_r - p_l) \quad (4.15)$$

bestimmt werden, wobei

$$x = \frac{(i - l)}{(r - l)} \quad (4.16)$$

mit  $i \in [l, r]$  gegeben ist. Wird diese Interpolation für alle Aufnahmewinkel  $\theta$  durchgeführt, so kann in der Zielfunktion (4.8) wieder die Menge  $\mathcal{M}$  statt der Menge  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  verwendet werden.

Die Neuberechneten Projektionen füllen den Rohdatenraum zwar hinreichend, jedoch entsprechen sie einer sehr starken Approximation. Ob es für eine iterative Rekonstruktion sinnvoll ist, die linear interpolierten Daten zu nutzen oder sich auf die Menge  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  zu beschränken, hängt in der Regel von der Größe und Form des Metallimplantates ab. Einige Beispiele hierfür sind in Kapitel 5 gegeben.

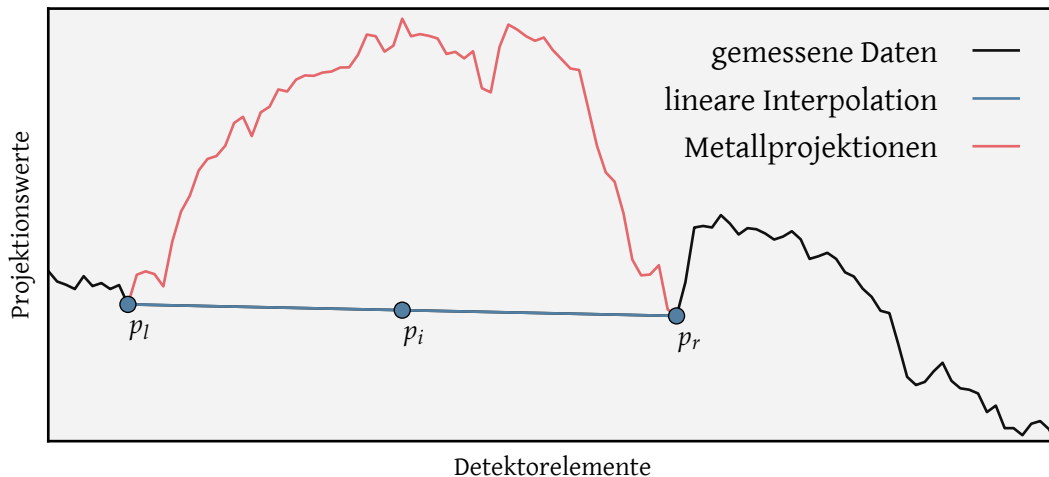


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der linearen Interpolation zwischen Projektionswerten, welche nicht durch Metall beeinflusst sind. Der Index  $l$  korrespondiert zum letzten linksseitig liegenden Projektionswert  $p_l$ , welcher nicht durch Metall beeinflusst ist. Analog beschreibt  $p_r$  den letzten rechtsseitig liegenden Projektionswert. Die Projektionswerte  $p_i$  mit  $i \in [l, r]$  entsprechen den durch lineare Interpolation neu berechneten Werten. In rot dargestellt sind die ursprünglich gemessenen Projektionen, welche durch das Metallobjekt verlaufen.

In Abbildung 4.7 ist eine Rekonstruktion nach linearer Interpolation der fehlenden Projektionswerte gezeigt. Dem gegenübergestellt ist eine Rekonstruktion der ursprünglich aufgenommenen Daten. Beide Bilder wurden unter Verwendung der FBP rekonstruiert. Die lineare Interpolation ist in der Lage, einige Streifenartefakte zu unterdrücken. Andererseits verursacht sie neue Artefakte im Bild. Da das Metallobjekt durch den Verlust der ursprünglich gemessenen Projektionen  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  aus den Rohdaten entfernt wurde, kann das zuvor segmentierte Objekt (siehe Abschnitt 4.1.2) nicht im Bild rekonstruiert werden.

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONS DATEN

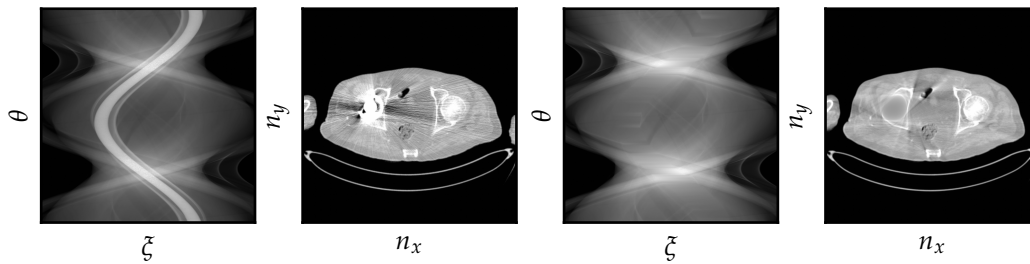


Abbildung 4.7: Artefaktkorrektur mit Hilfe der linearen Interpolation. Auf der linken Seite ist eine Rekonstruktion mit den ursprünglich aufgenommenen Projektionsdaten gezeigt. Auf der rechten Seite wurden die Projektionen, welche durch Metall verlaufen, durch eine lineare Interpolation ersetzt. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL=-200$  HU und  $WW=1000$  HU dargestellt.

#### 4.3.2 Vorwärtsprojektion von Zwischenergebnissen

Der iterative Charakter des Optimierungsprozesses ermöglicht es, im Vergleich zur zuvor vorgestellten linearen Interpolation, neue Projektionswerte auf eine elaboriertere Art und Weise zu berechnen. Betrachtet man hierzu ein Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  der Rekonstruktion, wobei  $k$  die aktuelle Iteration beschreibt, so beinhaltet dieses Bild, je nachdem wie fortgeschritten die Rekonstruktion ist, bereits Informationen bezüglich des zu rekonstruierenden Bildes. In Abbildung 4.8 ist der Verlauf einer iterativen Rekonstruktion gezeigt. Mit steigender Iterationszahl beinhaltet das Bild mehr und mehr Informationen bezüglich des zu rekonstruierenden Objektes. Im Folgenden wird gezeigt, wie diese Bildinformationen genutzt werden können, um neue Projektionen  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu berechnen.

Für die Berechnung neuer Projektionswerte wird der Kernannahme gefolgt, dass Bildinformationen in den Zwischenergebnissen der Rekonstruktion genutzt werden können. Die Berechnung soll nur dann durchgeführt werden, wenn die Rekonstruktion hinreichend weit fortgeschritten ist und die Zwischenergebnisse ausreichend viele Informationen über das zu rekonstruierende Bild beinhalten. Hierzu soll mit Hilfe der Abbruchkriterien aus Abschnitt 3.2.3 zunächst festgelegt werden, wann dieser Zeitpunkt erreicht ist. Übertragen auf die Bildrekonstruktion basieren die verschiedenen Kriterien auf unterschiedlichen Eigenschaften des Bildes und der Zielfunktion. Die Kriterien (3.36) und (3.37) beruhen dabei auf den Unterschieden zwischen aufeinanderfol-

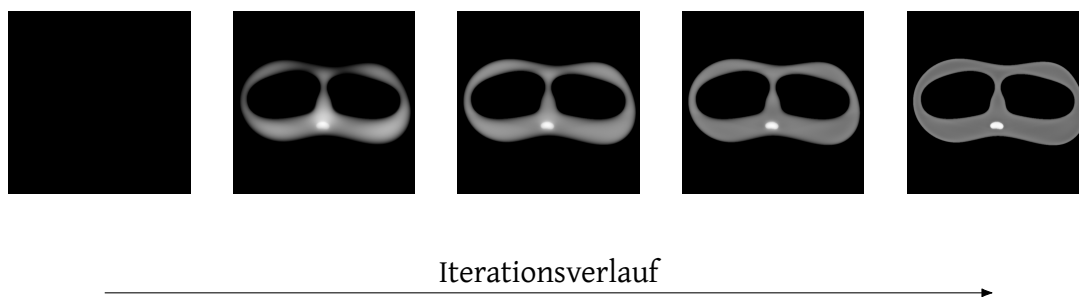


Abbildung 4.8: Verlauf einer iterativen Rekonstruktion. Beginnend mit einem leeren Bild werden im Laufe der Iterationen immer mehr Details über das zu rekonstruierende Objekt deutlich.

genden Iterationen. Diese geben in erster Linie keine Informationen über den Bildinhalt als solches, sondern nur über Differenzen. Die Kriterien (3.38) und (3.39) basieren jedoch auf der Größe des Gradienten der Zielfunktion. Nimmt die Norm des Gradienten einen Wert von Null an, so ist das Minimum der Zielfunktion gefunden und das Argument der Zielfunktion repräsentiert das gesuchte Bild. Dieser Sachverhalt kann ausgenutzt werden, um mit Hilfe eines Schwellwertes  $\tau_\omega > 0 \in \mathbb{R}$  für die Größe der Norm einen geeigneten Zeitpunkt für die Neuberechnung von Projektionswerten  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu bestimmen. Die Annahme, welche hier verfolgt wird, ist, dass das Bild  $\mathbf{f}$  ausreichend viele Bildinformationen für die Neuberechnung der Projektionen beinhaltet, wenn die Norm des Gradienten kleiner als  $\tau_\omega$  ist.

Um den Fortschritt der Rekonstruktion zu bewerten, ist es im Falle des ALIR-Algorithmus jedoch nicht nur relevant, die Bildinformationen bezüglich des Patienten zu betrachten, sondern auch zu überprüfen, ob die festgelegten Nebenbedingungen zu einem hinreichend starken Grad eingehalten werden. In der Konsequenz bedeutet dies, dass der Zeitpunkt für die Neuberechnung der Projektionsdaten auch von den Nebenbedingungen in Gleichung (4.14) abhängig sein sollte. Hierzu wird ein weiterer Schwellwert  $\tau_c > 0 \in \mathbb{R}$  festgelegt, welcher dazu dient, durch die Bedingung

$$\|\mathbf{Q}^*(\mathbf{f} - \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*))\| \leq \tau_c \quad (4.17)$$

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONS DATEN

die zuvor definierten Nebenbedingungen in den Entscheidungsprozess miteinzubeziehen.<sup>5</sup> Wie sich die beiden Schwellwerte in den gesamten Rekonstruktionsalgorithmus integrieren, kann dem Abschnitt 4.4 entnommen werden.

Ist ein geeigneter Zeitpunkt, welcher besagt, dass hinreichend viele Bildinformationen vorhanden sind, im Laufe der Rekonstruktion erreicht, so kann damit begonnen werden, neue Projektionswerte zu berechnen. Um die Bildinformationen aus dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  in den Radonraum zu übertragen, wird eine Vorwärtsprojektion des Bildes vorgenommen. Da auch für den weiteren Verlauf der Rekonstruktion stets die original aufgenommenen Projektionen, welche nicht durch Metall verlaufen, verwendet werden sollen, ist es ausreichend, lediglich die fehlenden Projektionen, welche mit der Indexmenge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  assoziiert werden, zu berechnen. Die fehlenden Projektionen können somit in jeder Iteration durch

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{(k)}, \quad \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}} \quad (4.18)$$

bestimmt werden.

Da alle Projektionen  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  durch Metall verlaufen und bereits bekannt ist, welche Abschwächungskoeffizienten für das Metallobjekt rekonstruiert werden müssen, kann die Berechnung der neuen Projektionen noch weiter verbessert werden. Hierzu wird zunächst der Bereich des Metallobjektes im Zwischenergebnis durch

$$\bar{f}_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*) > 0 \\ f_j^{(k)} & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.19)$$

auf Null gesetzt. Anschließend können die exakten Abschwächungskoeffizienten durch eine Vorwärtsprojektion des Vektors  $\Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*) \in \mathbb{R}^N$  in den Radonraum überführt werden und durch

$$\hat{p}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*)_j + \sum_{j=1}^N a_{ij} \bar{f}_j^{(k)}, \quad \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}} \quad (4.20)$$

---

<sup>5</sup>Im Rahmen des kompletten Algorithmus wird diese Bedingung noch leicht abgewandelt, da sich die Nebenbedingungen durch die Struktur der Optimierung und insbesondere durch einen zusätzlichen Normalisierungsschritt leicht verändern. Der Kern der Bedingung bleibt jedoch bestehen.

mit der Vorwärtsprojektion des Zwischenergebnisses kombiniert werden. In der darauffolgenden Iteration  $k + 1$  kann die Zielfunktion (4.8) mit Hilfe der Projektionen  $\hat{p}_i^{(k)}, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  somit auf die gesamte Indexmenge  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{valid}} \cup \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zurückgreifen. Das beschriebene Vorgehen ist in Abbildung 4.9 durch ein Ablaufdiagramm zusammengefasst.

Die zentrale Annahme bei diesem Ansatz basiert auf der Idee, dass es zielführender ist, die Vorwärtsprojektion der Zwischenergebnisse zu verwenden als sich auf die Indexmenge  $\mathcal{M}_{\text{valid}}$  zu beschränken. Diese Herangehensweise birgt jedoch zwei Herausforderungen in sich. Erstens, die neuen, auf der Vorwärtsprojektion basierenden Projektionen beziehen sich auf die aktuelle Iteration im Bildbereich. Das bedeutet, dass  $\mathbf{f}^{(k)}$  bereits exakt zu den Projektionen  $\hat{p}_i^{(k)}, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  passt und für die nächste Iteration diesbezüglich nicht mehr variiert werden muss. Für das Ergebnis der Rekonstruktion hat dies eine geringe Bedeutung, da in der Regel  $|\mathcal{M}_{\text{valid}}| \gg |\mathcal{M}_{\text{metal}}|$  gilt, jedoch kann die Konvergenzgeschwindigkeit durch diesen Sachverhalt vermindert werden. Eine zweite Herausforderung besteht in den bereits vorhandenen Bildartefakten in den Zwischenergebnissen. Sind in der jeweiligen Iteration  $k$  Artefakte im Bild vorhanden, so werden diese durch die Vorwärtsprojektion in die Projektionsdaten transferiert. Weiter noch werden die Artefakte durch die Verwendung der neu berechneten Projektionen in Iteration  $k + 1$  wieder in  $\mathbf{f}^{(k+1)}$  übertragen, sodass sie stets im Bildbereich erhalten bleiben.

### 4.3.3 Filterung von Zwischenergebnissen

Die zuvor beschriebenen Herausforderungen stellen keine Hindernisse bei der Reduktion von Metallartefakten dar. Vielmehr noch bieten sie eine geeignete Möglichkeit, Artefakte mit Hilfe von zusätzlichen Arbeitsschritten zu unterdrücken. Hierzu ist in Abbildung 4.10 ein Beispiel für den Verlauf einer iterativen Rekonstruktion gezeigt. Mit steigender Zahl der Iterationen  $k$  beinhaltet das Bild mehr und mehr Details über die Anatomie des Patienten. Beginnend in Iteration  $k = 6$  und noch deutlicher ab  $k = 10$  können jedoch auch Streifenartefakte im Bild wahrgenommen werden. Angenommen, es können Streifenartefakte vor der Berechnung der Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  im Zwischenergebnis unterdrückt werden, so bewirkt das Verwenden der neuen Projektionen in der darauf folgenden Iteration eine Reduktion der Artefakte. Entscheidend

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONS DATEN

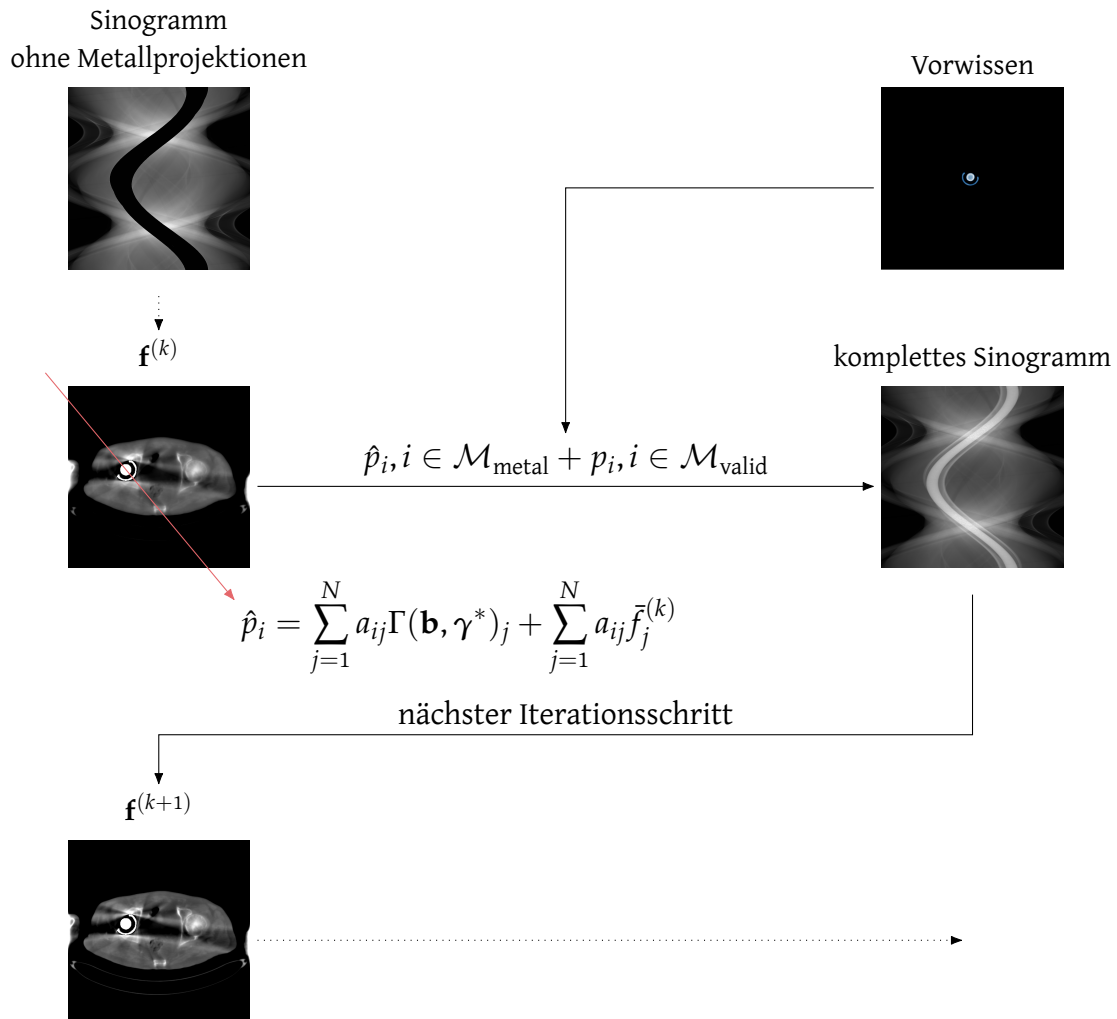


Abbildung 4.9: Berechnung von neuen Metallprojektionen. Sind bestimmte Kriterien bezüglich des Gradienten der Zielfunktion und der Nebenbedingung erfüllt, werden neue Projektionen basierend auf den Zwischenergebnissen der Rekonstruktion berechnet. Die neuen Projektionen setzen sich aus einer Vorwärtsprojektion des Zwischenergebnisses, aus welchem das Metallobjekt entfernt wurde (gekennzeichnet durch  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)}$ ), und einer Vorwärtsprojektion des Vorwissens bezüglich des Metallobjektes zusammen.

ist hierbei, dass der Parameter  $\mathbf{f}^{(k)}$  nicht als solcher verändert werden soll, sondern nur dafür genutzt wird, geeignetere Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu berechnen. Im Folgenden soll nun untersucht werden, wie das Bild  $\mathbf{f}^{(k)}$  hinsichtlich der Streifenartefakte bearbeitet werden kann.

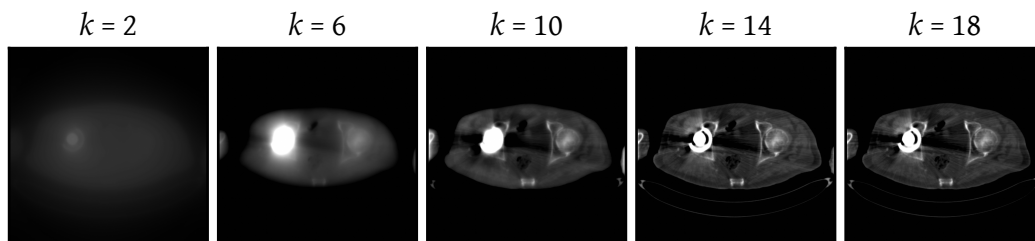


Abbildung 4.10: Verlauf einer iterativen Rekonstruktion (in diesem Fall der ML-TR-Algorithmus aus Abschnitt 3.3). Mit steigender Zahl der Iterationen  $k$  wird das Bild immer schärfer und weist mehr Details auf.

Eine relativ simple Art und Weise, das Bild zu filtern, besteht im Weichzeichnen (engl. blurring). Hierbei handelt es sich um eine lineare Tiefpassfilterung, welche durch eine Faltung des Bildes mit einer Gauß-Funktion realisiert werden kann. Im Zuge dessen setzt sich jeder gefilterte Pixelwert aus einer Summe von gewichteten Pixelwerten aus der Nachbarschaft zusammen. Die Gauß-Funktion sei hier gegeben durch

$$c_{\text{Gauß}}(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.21)$$

wobei  $d(x, y)$  die Distanz zwischen den Pixelpositionen  $x$  und  $y$  im zweidimensionalen Bild angibt und  $\sigma$  der Standardabweichung der Gauß-Funktion entspricht.<sup>6</sup> Das gefilterte Bild  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$  setzt sich durch die Vorschrift

$$g_r = \sum_{s=1}^N c_{\text{Gauß}}(r, s) f_s, \quad \forall r \in \{1, \dots, N\} \quad (4.22)$$

zusammen. Die Standardabweichung  $\sigma$  kann dazu genutzt werden, um den Einfluss der Nachbarschaft zu kontrollieren. Die Gauß-Funktion (4.21) besitzt in der Theorie einen unendlich großen Träger. In der Praxis ist es jedoch nützlich, diesen auf einen endli-

<sup>6</sup>Für den Zusammenhang zwischen dem vektorisierten Bild und einer zweidimensionalen Darstellung sei auf den Abschnitt 3.5.1 verwiesen.

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONSDATEN

chen Träger zu reduzieren, indem ein Schwellwert  $\tau_d$  definiert wird. Dieser wird dazu genutzt,  $c_{\text{Gauß}} = 0$  zu setzen, wenn  $d(x, y) \geq \tau_d$ . Mit Hilfe des Schwellwerts  $\tau_d$  kann die Größe der zu berücksichtigenden Nachbarschaft festgelegt werden. So führt ein großer Wert zu einer größeren Anzahl an Pixeln, welche in die Berechnung des neuen Pixelwertes miteinbezogen werden. In der Konsequenz führt dies jedoch auch zu einer stärkeren Mittelung. Die Annahme, welche bei dem Filter verfolgt wird, ist, dass das gewünschte Bild lokal konstante Strukturen enthält. Dies zeigt sich auch darin, dass der Filter ausschließlich ortsabhängig ist und nicht die Intensität der einzelnen Pixel berücksichtigt. Kanten im Bild werden hierdurch unterdrückt. Wird ein Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  gefiltert, welches bereits Informationen bezüglich der Anatomie des Patienten enthält, so gehen hierdurch sinnvolle und notwendige Informationen für die Berechnung von  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  verloren.

Um diesem Effekt entgegenzuwirken, muss bei der Filterung des Bildes berücksichtigt werden, ob ein spezifisches Pixel Bestandteil einer Kante ist, oder nicht. Der bilaterale Filter, welcher auf Aurich und Weule zurückzuführen ist und von Tomasi und Manduchi weiter bekannt gemacht wurde, bietet die Möglichkeit, die Gewichtung der Pixel nicht nur ortsabhängig zu gestalten, sondern erlaubt auch eine Berücksichtigung der Intensität des jeweiligen Pixels [128]–[130]. Im Detail setzt sich das so gefilterte Bild  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$  durch

$$g_r = \frac{1}{w(r, \mathbf{f})} \sum_{s=1}^N c_{\text{spatial}}(s, r) c_{\text{range}}(f_s, f_r) f_r, \quad \forall r \in \{1, \dots, N\} \quad (4.23)$$

zusammen, wobei

$$w(x, \mathbf{f}) = \sum_{s=1}^N c_{\text{spatial}}(s, x) c_{\text{range}}(f_s, f_x) \quad (4.24)$$

ein Normalisierungsterm ist. Die Funktion  $c_{\text{spatial}}$  beschreibt analog zum Gauß-Filter eine ortsabhängige Gewichtung mit Hilfe einer Gauß-Funktion und ist hier definiert durch

$$c_{\text{spatial}}(x, y) = e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{d(x, y)}{\sigma_d}\right)^2\right)}. \quad (4.25)$$

Dieser Term wird mit einer intensitätsabhängigen Gewichtung in Form von

$$c_{\text{range}}(x, y) = e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{h(x, y)}{\sigma_r}\right)^2\right)} \quad (4.26)$$

kombiniert, wobei  $h(x, y)$  die photometrische Distanz der Werte  $x$  und  $y$  angibt. Diese kann durch die absolute Differenz der jeweilige Abschwächungskoeffizienten modelliert werden.

Die geometrische Ausbreitung der Artefakte kann mit Hilfe der Standardabweichung  $\sigma_d$  in der Filterung berücksichtigt werden. Sie gibt an, wie groß die mit einzubeziehende Nachbarschaft ist. Anders als beim Gauß-Filter, kann hier auch die Differenz in den Abschwächungskoeffizienten zwischen den Streifenartefakten und den korrekt rekonstruierten Werten mit einbezogen werden. Durch die Standardabweichung  $\sigma_r$  im zusätzlichen Term  $c_{\text{range}}$  wird ermöglicht, die Gewichtung auf die Ausprägung der Artefakte anzupassen.

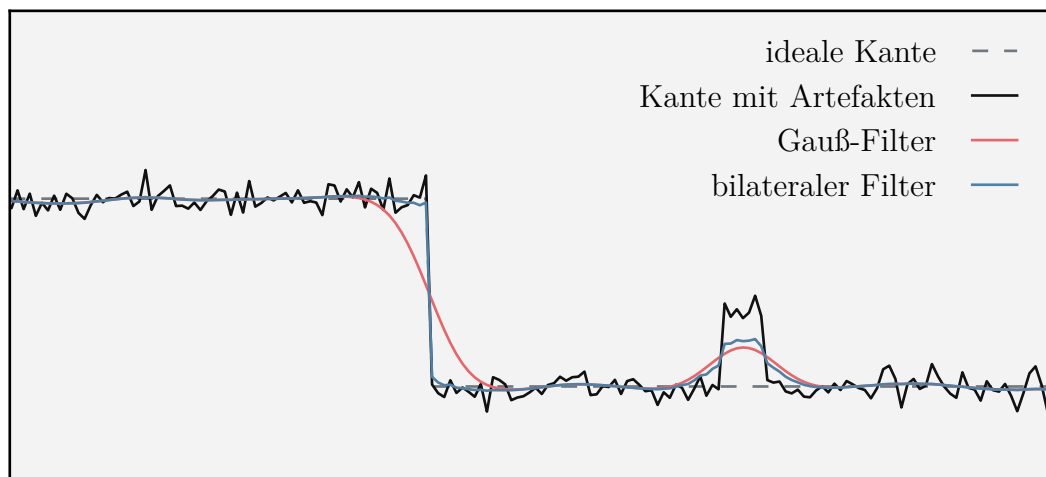


Abbildung 4.11: Filterung eines verrauschten Signales, welches eine Kante und einen Peak zur Simulation eines Artefaktes enthält. Nach der Bearbeitung mit Hilfe des Gauß-Filters (rote Kurve) konnte das Rauschen beseitigt und das Artefakt unterdrückt werden. Gleichzeitig wurde jedoch auch die Kante im Signal entschärft. Der bilaterale Filter ist in der Lage, die Kante zu erhalten, Rauschen zu beseitigen und Artefakte zu unterdrücken.

Abbildung 4.11 zeigt ein verrauschtes Beispielsignal mit einer Kante und einem kleineren Peak, welcher ein Artefakt simulieren soll. Ziel ist es nun, das Signal so zu filtern, dass der Peak unterdrückt beziehungsweise an das umliegende Signal angepasst wird und die Kantenstruktur dabei erhalten bleibt. Nach einer Gauß-Filterung ist das Rauschen im Signal nahezu vollständig reduziert. Der Peak konnte um etwa die Hälfte der

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONSDATEN

ursprünglichen Ausprägung unterdrückt werden, was sich im Laufe der Iterationen des Rekonstruktionsalgorithmus positiv auswirken würde, da die Information durch die Neuberechnung von Projektionen nicht in die nächste Iteration weitergetragen wird. Ein deutlich zu erkennender Nachteil ist jedoch die Entschärfung der Kante. Anders ist das Ergebnis nach Anwendung des bilateralen Filters zu bewerten. Auch hier kann das Rauschen und das Artefakt deutlich reduziert werden. Jedoch bleibt auch die Kante, wie gewünscht, im Signal erhalten.

Eine genauere Betrachtung der Gewichtungskernel für den Gauß-Filter und den bilateralen Filter zeigt den Grund hierfür. In Abbildung 4.12 sind die verschiedenen Gewichtungen für einen Signalwert, welcher direkt an der Kante liegt, gezeigt. Für den Gauß-Filter entsteht eine Gewichtung der Nachbarschaft, welche lediglich vom Abstand im Ortsraum abhängig ist. Dies führt dazu, dass zwischen Werten oberhalb der Kante und unterhalb der Kante gemittelt wird. Das Resultat ist eine Weichzeichnung der Kante. Beim bilateralen Filter wird eine zusätzliche Gewichtung mit einer Abhängigkeit zum Wertebereich integriert. Signalwerte, welche einen bestimmten Abstand zum aktuellen Wert überschreiten, werden weniger gewichtet als Signalwerte, welche dem jeweiligen Wert sehr ähnlich sind. Eine Anpassung des Filters auf die Ausprägung von Kanten im Bild kann mit Hilfe des Wertes  $\sigma_r$  vorgenommen werden. Die resultierende Gewichtung zeigt, dass Signalwerte, welche auf der gleichen Seite der Kante liegen wie der gerade betrachtete Wert, eine hohe Gewichtung erhalten, während Werte auf der anderen Seite der Kante eine kleine Gewichtung zugewiesen bekommen. Die kombinierte bilaterale Gewichtung führt nun dazu, dass nur über Werte gemittelt wird, welche auf der gleichen Seite der Kante liegen.

Der Einfluss dieses Effekts zeigt sich deutlich in der Filterung eines zweidimensionalen Bildes. Abbildung 4.13 zeigt verschiedene Filterergebnisse. Auf der linken Seite ist ein Softwarephantom gezeigt, welches mit Rauschen sowie vertikalen, horizontalen und diagonalen Streifen überlagert ist. Nach einer Filterung mit dem Gauß-Filter können die künstlichen Streifenartefakte reduziert werden. Als Nebenprodukt der Filterung werden jedoch auch die Kanten des Phantoms stark abgeschwächt, sodass das Bild deutlich verschwommener wahrgenommen wird. Eine Anwendung des bilateralen Filters ermöglicht eine Reduktion der Streifen im Bild mit gleichzeitigem Erhalt der Kantenstrukturen. Der Wert  $\sigma_d$  entspricht dem gleichen Wert wie bei der Gauß-Filterung, während  $\sigma_r$  so gewählt ist, dass die Streifenartefakte mit in die Filterung

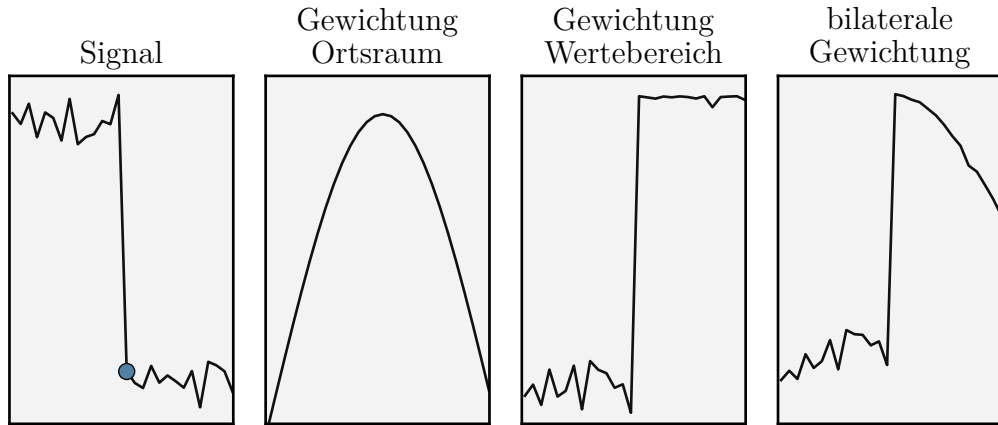


Abbildung 4.12: Resultierende Gewichtungen für einen Signalwert, welcher direkt an der Kante liegt (dargestellt in blau). Die Gewichtung im Ortsraum, welche auch im Gauß-Filter genutzt wird, berücksichtigt nur den geometrischen Abstand der Werte. Die Gewichtung im Wertebereich bewertet hingegen den Abstand der Signalwerte. Eine Kombination der Gewichtungen wird für den bilateralen Filter genutzt. Die Gewichtung entspricht einer Mittlung ähnlicher Signalwerte.

miteinander bezogen werden. Zusätzlich erlaubt der Filter eine iterative Anwendung. Durch die kantenerhaltende Eigenschaft führt eine mehrfache Anwendung des Filters zu keinem Informationsverlust im Bild, sondern lediglich zu einer weiteren Unterdrückung der Streifenartefakte. Dieser Aspekt wirkt sich positiv auf die Neuberechnung der Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  aus. Das Potenzial dieser Filterung zeigt sich im rechten Bild in Abbildung 4.13. Nach einer mehrfachen Anwendung des bilateralen Filters sind die Streifenartefakte im Bild nahezu komplett herausgefiltert, während die Kanten des Phantoms weitestgehend erhalten bleiben.

Wird die Filterung mit in die Artefaktreduktion integriert, hat dies für die Berechnung der neuen Projektionswerte aus (4.20) zur Folge, dass statt des Zwischenergebnisses ohne Metallobjekt  $\tilde{\mathbf{f}}^{(k)}$  das gefilterte Bild  $\tilde{\mathbf{g}}^{(k)}$  verwendet wird. Die Projektionswerte werden nun durch

$$\hat{p}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*)_j + \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{g}_j^{(k)}, \quad \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}} \quad (4.27)$$

### 4.3. BERECHNUNG VON FEHLENDEN PROJEKTIONSDATEN

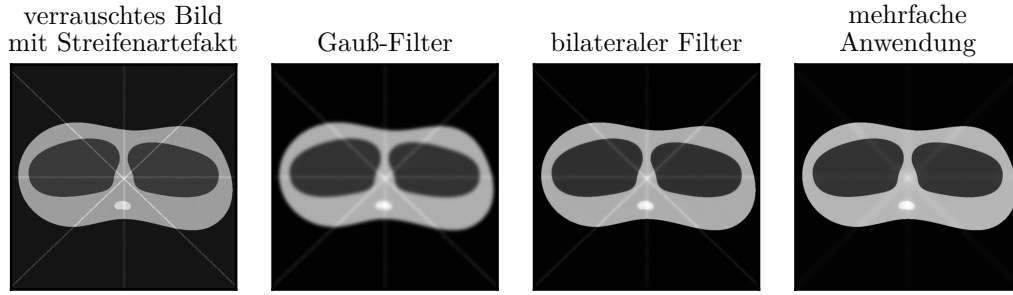


Abbildung 4.13: Unterdrückung von Streifenartefakten im Bild. Auf der linken Seite ist ein Softwarephantom gezeigt, welches mit Rauschen sowie mehreren Streifenartefakten versehen wurde. Das Ergebnis nach einer Gauß-Filterung zeigt unterdrückte Artefakte und verschwommene Kanten. Der bilaterale Filter erhält die Kanten im rekonstruierten Bild, während die Streifen unterdrückt wurden. Nach einer mehrfachen Anwendung des bilateralen Filters sind die Streifen im Bild kaum noch zu erkennen, während die Kanten des Phantoms weitestgehend erhalten werden konnten.

bestimmt, wobei  $\bar{\mathbf{g}}^{(k)} \in \mathbb{R}^N$  durch die Vorschrift

$$\bar{g}_r^{(k)} = \frac{1}{w(r, \bar{\mathbf{f}}^{(k)})} \sum_{s=1}^N c_{\text{spatial}}(s, r) c_{\text{range}}(\bar{f}_s^{(k)}, \bar{f}_r^{(k)}) \bar{f}_r^{(k)}, \quad \forall r \in \{1, \dots, N\} \quad (4.28)$$

berechnet wird. Im Rahmen des kompletten Algorithmus kommt es dazu, dass der Filterungsschritt iterativ wiederholt wird, um Streifenartefakte stärker zu unterdrücken (siehe hierzu Abschnitt 4.4).

In Abbildung 4.14 ist der Ablauf für die Berechnung der Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  noch einmal schematisch dargestellt. Aus dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  der Iteration  $k$  wird zunächst das Metallobjekt entfernt. Dies ist sinnvoll, da davon ausgegangen wird, dass die korrekten Abschwächungskoeffizienten für das Metallobjekt bekannt sind und explizit in (4.27) integriert werden. Das resultierende Bild  $\bar{\mathbf{f}}$  wird anschließend unter Verwendung des bilateralen Filters hinsichtlich der Streifenartefakte bearbeitet. Das gefilterte Bild  $\bar{\mathbf{g}}$  wird daraufhin für die Berechnung der neuen Projektionsdaten herangezogen, welche zusammen mit den originalen Messwerten  $p_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  in der Iteration  $k + 1$  verwendet werden.

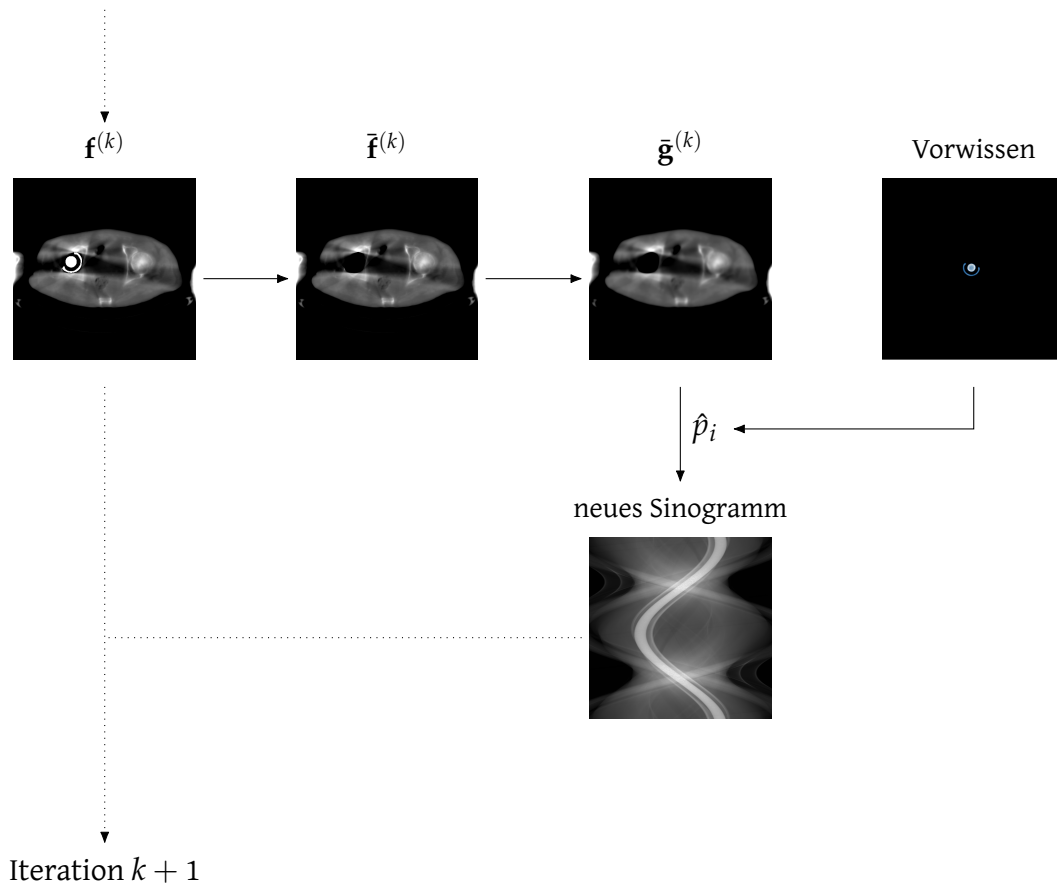


Abbildung 4.14: Filterung des Zwischenergebnisses und Berechnung von Vorwärtsprojektionen. Aus dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  aus Iteration  $k$  wird zunächst das Metallobjekt entfernt. Das resultierende Bild  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)}$  wird anschließend mit Hilfe des bilateralen Filters hinsichtlich der Streifenartefakte gefiltert. Das gefilterte Bild  $\bar{\mathbf{g}}^{(k)}$  wird für die Neuberechnung von Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  verwendet, welche in der nächsten Iteration zusammen mit den original gemessenen Projektionen  $p_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  zu einem neuen Sinogramm kombiniert werden.

## 4.4 Der komplette Algorithmus

Um die Vorbetrachtungen aus den vorhergehenden Abschnitten zu einem Rekonstruktionsalgorithmus zu vereinen, wird das in Kapitel 3.2.5 vorgestellte Augmented-Lagrangian-Verfahren adaptiert. Hierzu wird zunächst die Zielfunktion (4.8) betrachtet, welche nach erstmaliger Berechnung von neuen artifiziiellen Projektionen durch die Funktion (3.91) ersetzt wird. Weiter sollen die Nebenbedingungen aus Abschnitt 4.2 integriert werden. Dies führt mit Anlehnung an das Augmented-Lagrangian-Verfahren zu dem Funktional

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = & \dot{l}(\mathbf{f}) - \sum_{j=1}^N \lambda_j \left( q_{jj}^* (f_j - \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_j) \right) \\ & + \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \left( q_{jj}^* (f_j - \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_j) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Gleichung (4.29) enthält eine Kombination aus einem quadratischen Strafterm, welcher mit  $\mu \in \mathbb{R}$  gewichtet ist, und einem Lagrangian-Strafterm mit den Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ . Die Werte  $q_{jj}^*$  beschreiben die Matrixelemente der bezüglich der Transformationsparametern  $\boldsymbol{\gamma}^*$  angepassten Matrix  $\mathbf{Q}^*$  aus Gleichung (4.14).

Um mehr Einfluss auf das Verhältnis zwischen der Zielfunktion und den Nebenbedingung nehmen zu können, wird für den ALIR-Algorithmus die Gleichung (4.29) um einen weiteren Gewichtungsfaktor  $\zeta \in [0, 1]$  erweitert. Diesbezüglich müssen jedoch zunächst die Zielfunktion und die Nebenbedingungen normalisiert werden. Bei der Zielfunktion (4.8) wird eine Normalisierung hinsichtlich der Anzahl der Projektionen durchgeführt. Dies führt zu der Gleichung

$$l_{\Lambda}^{\text{valid}}(\mathbf{f}) = \frac{1}{|\mathcal{M}_{\text{valid}}|} \dot{l}(\mathbf{f}) = \frac{1}{|\mathcal{M}_{\text{valid}}|} \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} \left( n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j + n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right), \quad (4.30)$$

wobei  $|\cdot|$  die Mächtigkeit einer Menge angibt. Im Laufe des Algorithmus werden neue Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  berechnet, welche anschließend in Kombination mit den ursprünglich gemessenen Projektionen  $p_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  verwendet werden. Dies

hat zur Folge, dass die normalisierte Zielfunktion

$$l_{\Lambda}^{\text{all}}(\mathbf{f}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j + n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \right) \quad (4.31)$$

verwendet wird, wobei  $M = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_{\text{valid}} \cup \mathcal{M}_{\text{metal}}|$  entspricht.

Weiter werden die Nebenbedingungen bezüglich der Anzahl der Pixel  $N$  normalisiert. Dies führt zu der Formulierung

$$c_{\Lambda}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{q_{jj}^* (f_j - \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_j)}{N} \right)^2 - \sum_{j=1}^N \lambda_j \left( \frac{q_{jj}^* (f_j - \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_j)}{N} \right). \quad (4.32)$$

Mit Hilfe der normalisierten Zielfunktion und den normalisierten Nebenbedingungen sowie dem Gewichtungsfaktor  $\zeta \in [0, 1]$  kann nun der Einfluss der Nebenbedingungen bezüglich des Zielfunktional bestimmt werden. Im Rahmen des ALIR-Algorithmus wird im Folgenden die Funktion

$$\Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = l_{\Lambda}(\mathbf{f}) + \zeta c_{\Lambda}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) + \delta R(\mathbf{f}) \quad (4.33)$$

verwendet. Abhängig davon, ob im Laufe der Rekonstruktion bereits die Projektionen  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  berechnet wurden, wird die Funktion (4.30) oder (4.31) an die Stelle von  $l_{\Lambda}(\mathbf{f})$  gesetzt. Zusätzlich wurde in (4.33) die Zielfunktion durch einen Regularisierungsterm  $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  und den Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$  erweitert. Für die Regularisierung kann die in Abschnitt 3.3.4 vorgestellte Funktion (3.108) verwendet werden. Eine neu entwickelte Regularisierung basierend auf einem Prior-Image und einem nicht-lokalen Strafterm wird in Abschnitt 4.5 vorgestellt.

Aus Abschnitt 4.2 geht die Bedingung hervor, dass das rekonstruierte Bild ausschließlich Abschwächungskoeffizienten aus  $\Omega$  enthält. Für die hier beschriebene Bildrekon-

struktion bedeutet dies, dass das Problem

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu), \quad (4.34a)$$

$$\text{sodass } \mathbf{l} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{u}, \quad (4.34b)$$

gelöst werden muss, wobei die untere Grenze  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$  mit  $l_j = \min\{\Omega\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$  und die obere Grenze  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$  mit  $u_j = \max\{\Omega\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$  festgelegt ist.

Für die Optimierung von (4.34) folgt aus Theorem 3.2.1 die Forderung

$$0 = \nabla_{\mathbf{f}} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu). \quad (4.35)$$

Hierzu werden die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu)}{\partial f_r} = \frac{\partial l_{\Lambda}(\mathbf{f})}{\partial f_r} + \frac{\partial \zeta_{c_{\Lambda}}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu)}{\partial f_r} + \frac{\partial \delta R(\mathbf{f})}{\partial f_r}, \quad (4.36)$$

betrachtet, wobei

$$\frac{\partial l_{\Lambda}^{\text{valid}}(\mathbf{f})}{\partial f_r} = \frac{1}{|\mathcal{M}_{\text{valid}}|} \sum_{i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}} \left( n_i a_{ir} - n_0 a_{ir} e^{\left( -\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j \right)} \right) \quad (4.37)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial l_{\Lambda}^{\text{all}}(\mathbf{f})}{\partial f_r} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( n_i a_{ir} - n_0 a_{ir} e^{\left( -\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j \right)} \right) \quad (4.38)$$

den partiellen Ableitungen für die hergeleitete negative Log-Likelihood-Funktion entsprechen. Dabei muss die Gleichung 4.37 für den Fall, dass Projektionen durch Metall nicht berücksichtigt werden und die Gleichung 4.38 für den Fall, dass alle Projektionen

verwendet werden, genutzt werden. Weiter gilt für die Nebenbedingungen zur Integration des Vorwissen bezüglich des Metallimplantates

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta c_{\Lambda}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu)}{\partial f_r} &= \frac{\zeta}{N} \left( \frac{\mu}{2N} (2q_{rr}^{*2} f_r - 2q_{rr}^{*2} \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_r) - \lambda_r q_{rr}^* \right) \\ &= \frac{\zeta}{N} \left( \frac{\mu q_{rr}^{*2}}{N} (f_r - \Gamma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}^*)_r) - \lambda_r q_{rr}^* \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Der Ablauf des Rekonstruktionsalgorithmus ist in Algorithmus 3 in Form eines Pseudocodes gegeben. Zu Beginn der Rekonstruktion wird ein Startpunkt  $\mathbf{f}^{(0)}$  festgelegt. Dieser ist zunächst beliebig und kann durch einen konstanten Wert für alle  $f_j^{(0)}, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  realisiert werden. Alternativ bietet sich eine einfache Rückprojektion der aufgenommenen Daten als initiale Schätzung an. Dabei sollten die durch Metall verlaufenden Projektionen jedoch nicht berücksichtigt werden. Des Weiteren ist eine Initialisierung der Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$  erforderlich. Diese können ebenfalls durch einen einheitlichen Wert für alle  $\lambda_j^{(0)}, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  festgelegt werden. Die Toleranzen  $\eta^*$  und  $\omega^*$  bezüglich der Konvergenz haben Einfluss auf die Bildqualität der finalen Rekonstruktion. Sofern nicht anders angegeben, sind die Werte für alle im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse stets mit  $\omega^* = 10^{-10}$  und  $\eta^* = 10^{-5}$  festgelegt. Diese Werte wurden empirisch ermittelt und erzielen konsistent gute Ergebnisse. Des Weiteren werden analog zum Augmented-Lagrangian-Verfahren die Startwerte  $\mu^{(0)} = 10, \omega^{(0)} = 1/\mu^{(0)}$  und  $\eta^{(0)} = 1/(\mu^{(0)})^{0,1}$  festgelegt. Darüber hinaus müssen für ein individuelles Rekonstruktionsproblem die Parameter  $\zeta$  und  $\delta$  festgelegt werden. Der Bedingung (3.40) in Abschnitt 3.2.3 folgend, wird eine maximale Anzahl an Iterationen mit  $k_{\max} = 20$  festgelegt (vergleiche hierzu Zeile 3). In jeder Iteration  $k$  wird nun das Subproblem

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)}) \quad (4.40a)$$

$$\text{so dass } \mathbf{l} \leq \mathbf{f}^{(k)} \leq \mathbf{u} \quad (4.40b)$$

gelöst. Hierbei ist das Bild  $\mathbf{f}$  der variierende Parameter und die Parameter  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$  und  $\mu^{(k)}$  bleiben fixiert für ein individuelles Optimierungsproblem. Zum Lösen von (4.40) wird

das in Abschnitt 3.2.4 vorgestellte l-BFGS-b-Verfahren verwendet. Die hierfür benötigten Ableitungen sind in (4.36), (4.37), (4.38) und (4.39) gegeben. Das Problem (4.40) wird in Iteration  $k$  bis zur Konvergenztoleranz  $\omega^{(k)}$  gelöst. Diese Toleranz bezieht sich auf die Norm des Gradienten (4.36) und ist wie in (3.39) in Abschnitt 3.2.3 modelliert. Zeile 5 bis 18 sind analog zum Augmented-Lagrangian-Algorithmus in Abschnitt 3.2.5 gestaltet. So wird in Zeile 6 eine Validierung der finalen Konvergenz des Algorithmus basierend auf der Norm der Nebenbedingungen und der Norm des Gradienten der Zielfunktion durchgeführt. Hierbei werden die zuvor festgelegten Grenzen  $\eta^*$  und  $\omega^*$  herangezogen. Ist eine Konvergenz noch nicht eingetreten, werden die Strafparameter und Toleranzen basierend auf der Größe der Norm der Nebenbedingungen angepasst (Zeile 9 bis 17).

In Zeile 19 wird nun geprüft, ob die vorhandenen Bildinformationen in der aktuellen Iteration es erlauben, neue Projektionswerte  $\hat{p}_i, \forall i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu berechnen. Hierzu werden die in Abschnitt 4.3.2 definierten Schwellwerte  $\tau_\omega$  und  $\tau_c$  verwendet. Der Wert  $\tau_\omega$  wird dabei für eine Auswertung des Gradienten herangezogen. Ein Vergleich wird mit dem Wert  $\omega^{(k)}$  durchgeführt, welcher angibt, bis zu welchem Grad das Subproblem (4.40) in der aktuellen Iteration gelöst wurde. In einer zusätzlichen Bedingung wird mit Hilfe des Schwellwertes  $\tau_c$  überprüft, ob die Nebenbedingung (4.32) hinreichend stark eingehalten werden.<sup>7</sup> Sind beide Bedingungen erfüllt, wird das Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  hinsichtlich der Streifenartefakte gefiltert (siehe Abschnitt 4.3.3). Durch die Schleife in Zeile 20 wird es ermöglicht,  $\mathbf{f}^{(k)}$  iterativ zu filtern. Das Ergebnis des hervorgehenden Filterungsschrittes wird dabei als Grundlage für den nächsten Schritt verwendet. Sofern nicht anders angegeben, wird stets  $k_{\text{filter}} = 14$  gesetzt. Dieser Wert wurde empirisch ermittelt und sorgt für eine hinreichend starke Filterung. Ist der Filterungsprozess abgeschlossen, werden der Gleichung (4.27) folgend neue Projektionswerte  $\hat{p}_i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  berechnet. Anschließend werden die neu berechneten Projektionen mit den ursprünglich gemessenen Projektionen  $p_i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  kombiniert. Die zusammengeführten Rohdaten werden daraufhin beim Lösen des Subproblems (4.40) in der nächsten Iteration verwendet. In der Konsequenz wird nun (4.30) durch Gleichung (4.31) in der Zielfunktion (4.33) ersetzt und es kann mit der nächsten Iteration begonnen werden.

<sup>7</sup>Im Vergleich zur Formulierung in (4.17) wird hier sowohl der gewichtete und normalisierte quadratische Strafterm als auch der normalisierte Lagrange-Term berücksichtigt.

---

**Algorithmus 3** Der Augmented Likelihood Image Reconstruction Algorithmus.
 

---

- 1: Given measurement  $\mathbf{p}$ , prior information  $\mathbf{b}$ , starting point  $\mathbf{f}^{(0)}$ , initial multipliers  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ , convergence tolerances  $\eta^*$  and  $\omega^*$ , relation factors  $\zeta$  and  $\delta$
  - 2: Set  $\mu^{(0)} = 10, \omega^{(0)} = 1/\mu^{(0)}, \eta^{(0)} = 1/(\mu^{(0)})^{0,1}$
  - 3: **for**  $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}$  **do**
  - 4:     find an approximated solution  $\mathbf{f}^{(k)}$  with the tolerance  $\omega^{(k)}$  of the subproblem  

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)}), \text{ such that } \mathbf{l} \leq \mathbf{f}^{(k)} \leq \mathbf{u}$$
  - 5:     **if**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \max(\eta^{(k)}, \eta^*)$  **then**  
       # test for convergence
  - 6:         **if**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \eta^*$  **and**  
            $\|\nabla_{\mathbf{f}} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \omega^*$  **then**
  - 7:             stop with approximated solution  $\mathbf{f}^{(k)}$
  - 8:         **end if**  
       # update multipliers, tighten tolerance
  - 9:          $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \mu^{(k)} c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})$
  - 10:          $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}$
  - 11:          $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} / (\mu^{(k+1)})^{0,9}$
  - 12:          $\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} / \mu^{(k+1)}$
  - 13:     **else**  
       # increase penalty parameter, tighten tolerance
  - 14:          $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)}$
  - 15:          $\mu^{(k+1)} = 100\mu^{(k)}$
  - 16:          $\eta^{(k+1)} = 1/(\mu^{(k+1)})^{0,1}$
  - 17:          $\omega^{(k+1)} = 1/\mu^{(k+1)}$
  - 18:     **end if**
  - 19:     **if**  $\omega^{(k)} \leq \tau_{\omega}$  **and**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \tau_c$  **then**  
       # compute new projection values
  - 20:         **for**  $k_g = 0, 1, 2, \dots, k_{\text{filter}}$  **do**
  - 21:             calculate filtered image  $\bar{\mathbf{g}}^{(k)}$  as shown in (4.28) and set  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)} = \bar{\mathbf{g}}^{(k)}$
  - 22:         **end for**
  - 23:         compute forward projections  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  as shown in (4.27)
  - 24:         combine projection values  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  and  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$
  - 25:     **end if**
  - 26: **end for**
-

In Abbildung 4.15 ist ein Ablaufdiagramm des Algorithmus mit Fokus auf das Ersetzen der Metallprojektionen gegeben. Initial werden alle Projektionen, welche durch Metall verlaufen, aus der ursprünglichen Messung entfernt. Anschließend kann mit dem iterativen Prozess der Rekonstruktion basierend auf den Projektionen  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  begonnen werden. Nachdem das Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  der Iteration  $k$  durch Lösen des Subproblems in Zeile 4 ermittelt wurde, wird mit Hilfe der Schwellwerte  $\omega^*$  und  $\eta^*$  auf Konvergenz geprüft. Ist die Norm der Nebenbedingungen kleiner als  $\eta^*$  und die Norm des Gradienten der Zielfunktion kleiner als  $\omega^*$ , so wird der Algorithmus mit dem finalen Rekonstruktionsergebnis beendet.

Sofern eine Konvergenz noch nicht eingetreten ist, wird überprüft, ob bereits genug Bildinformationen vorhanden sind, um neue Projektionswerte zu berechnen. Für diesen Schritt muss die Norm der Nebenbedingungen kleiner sein als  $\tau_c$  und das aktuelle Subproblem muss mindestens bis zur Grenze  $\tau_\omega$  gelöst worden sein. Sind beide Bedingungen erfüllt, so wird das Zwischenergebnis gefiltert und neue Projektionen  $\bar{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  werden berechnet. Diese basieren auf dem Bild  $\bar{\mathbf{g}}^{(k)}$  und beinhalten zunächst nur Informationen über die aktuell rekonstruierte Anatomie des Patienten. Die Projektionen  $\bar{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  werden anschließend mit der Vorwärtsprojektion des Vorwissens  $\sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^*)_j, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  zusammengefasst (siehe Gleichung (4.27)) und mit den ursprünglichen Messdaten  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$  kombiniert. Das resultierende Sinogramm wird anschließend für die nächste Iteration verwendet.

## 4.5 Regularisierung durch bildbasiertes Vorwissen

Die Rekonstruktion von computertomographischen Bildern ist ein inhärent schlecht gestelltes Problem. Die Annahme, dass sie von jeglichem Vorwissen, welches man in einen Rekonstruktionsalgorithmus integrieren kann, profitiert, liegt nahe und wurde bereits durch viele Ansätze und Ideen verfolgt [107], [131], [132]. In dieser Arbeit wird dieses Konzept ebenfalls in Form einer Integration von Vorwissen bezüglich des Metallobjektes verfolgt. Die Regularisierung ist ein zusätzliches Werkzeug, welches es erlaubt, Vorwissen in die Problemlösung mit einzubeziehen. In Abschnitt 3.3.4 wurde bereits ein simpler Regularisierungsterm vorgestellt, welcher vom Gibbs-Prior abgeleitet

KAPITEL 4. DIE AUGMENTED LIKELIHOOD IMAGE RECONSTRUCTION

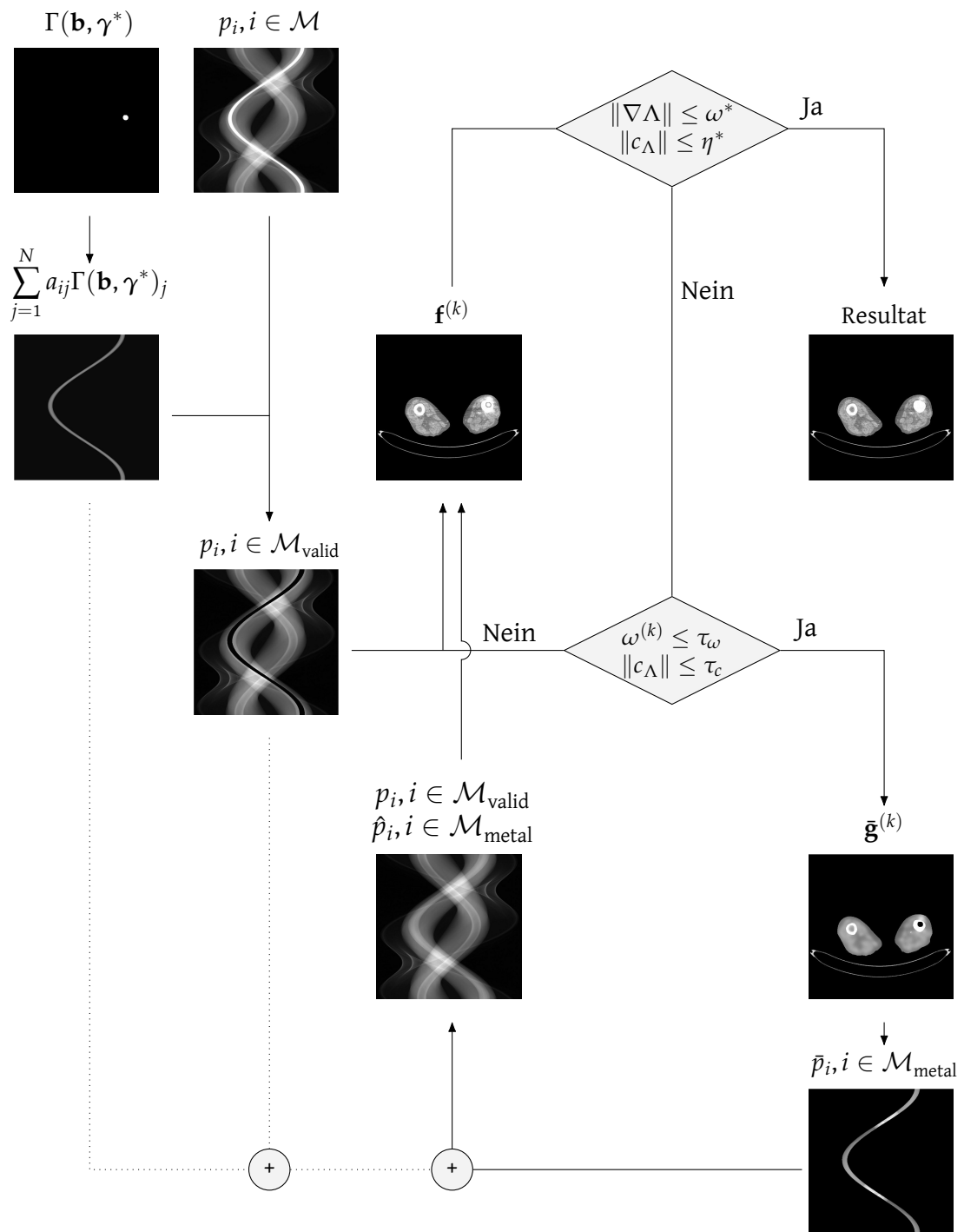


Abbildung 4.15: Ablaufdiagramm der Augmented Likelihood Image Reconstruction.

#### 4.5. REGULARISIERUNG DURCH BILDBASIERTES VORWISSEN

ist [6], [133], [134]. Dieser führt dazu, dass die Annahme von lokaler Glattheit miteinbezogen wird. Andere Regularisierungsansätze verfolgen beispielsweise das Vorwissen, dass Kanten im Bild vorhanden sind und erhalten werden sollten [135], [136] oder dass das lokale Schwingungsverhalten des Bildes gering ist [137]–[142].

Einen Schritt weiter geht die Integration von bildbasiertem Vorwissen. Seit der Vorstellung des bekannten PICCS-Algorithmus (Prior Image Constrained Compressed Sensing) wurde mit steigender Häufigkeit untersucht, auf welche Art und Weise man ein Bild nutzen kann, welches dem zu rekonstruierenden Bild ähnlich sieht [107], [131], [143]–[145]. Ein solches Bild kann entweder von früher aufgenommenen Bildern, medizinischen Verlaufskontrollen oder sogar von anderen Patienten stammen. Im Folgenden sei angenommen, dass ein solches Prior-Image, welches ähnliche anatomische Strukturen wie das zu rekonstruierende Bild  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  aufweist, in Form von  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$  vorliegt.

Ein zunächst naheliegender Term könnte die Intensitätsunterschiede des Priors zum rekonstruierenden Bild bestrafen. Ein schwerwiegendes Problem mit dem Term

$$R(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \sqrt{\sum_{j=1}^N (f_j - h_j)^2} \quad (4.41)$$

wird jedoch schnell deutlich. Anatomische Strukturen, welche im Prior  $\mathbf{h}$  vorhanden sind, werden im zu rekonstruierenden Bild zwangsläufig übernommen, da alle Unterschiede zu diesem bestraft werden. Zwar sorgt ein durch  $\delta$  eingestelltes Gleichgewicht zwischen Zielfunktional und Regularisierungsterm (vergleiche Gleichung (4.33)) dafür, dass auch korrekte anatomische Strukturen rekonstruiert werden, jedoch lassen sich diese im weiteren Verlauf nicht mehr von fehlerhaft rekonstruierten Strukturen unterscheiden.

Im Folgenden wird nun ein Regularisierungsterm hergeleitet, welcher es ermöglicht, die anatomischen Strukturen des Patienten korrekt zu rekonstruieren, und dabei gleichzeitig Artefakte im Bild reduziert. Hierzu wird eine nicht-lokale Gewichtung verwendet, welche es erlaubt, den Strafterm auf das zu rekonstruierende Bild anzupassen. Umgesetzt wird dies durch eine gewichtete Summe von Differenzen zwischen verschiedenen Bildausschnitten. Anschaulich gesprochen wird vor der Berechnung des

Strafterms der Pixel gesucht, welcher dem zu rekonstruierenden Pixel am ähnlichsten ist. Die Ähnlichkeit der Pixel wird dabei durch einen Vergleich von Strukturen in einem Bildausschnitt oder Patch ermittelt. Pixel im Bild  $\mathbf{h}$ , welche eine geringe strukturelle Ähnlichkeit in einem Patch zu dem original Pixel beziehungsweise Patch im Bild  $\mathbf{f}$  aufweisen, erhalten dabei eine kleine Gewichtung und werden somit nicht so stark mit in die Regularisierung einbezogen. Analog erhalten Pixel mit starken strukturellen Gemeinsamkeiten eine hohe Gewichtung und gewinnen somit mehr Bedeutung für die Berechnung des Strafterms. Formal sei der nicht-lokale Regularisierungsterm gegeben durch

$$R(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)) = \sqrt{\sum_{j=1}^N \iota_j \left( f_j - \frac{1}{\kappa_j} \Psi(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*), j) \right)^2}, \quad (4.42)$$

mit

$$\Psi(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*), j) = \sum_{k \in \mathcal{N}_j} \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)_k e^{\left( \frac{-\sigma_{|k-j|} \|\mathbf{f}_{\eta_j} - \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)_{\eta_k}\|_p}{v^2} \right)}. \quad (4.43)$$

Ähnlich wie bei der Integration des Vorwissens bezüglich des Metallobjektes wird auch hier eine Transformation  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)$  durchgeführt, um den Prior an das Bild  $\mathbf{f}$  anzupassen. Geeignete Transformationsparameter  $\gamma^*$  werden durch Lösen des Registrierungsproblems

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^6} \mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma)) \quad (4.44)$$

ermittelt. Das Distanzmaß  $\mathcal{D}^{\text{SSD}}$  kann für spezielle Priors gegebenenfalls ersetzt werden. Zu den möglichen Alternativen zählen hierbei insbesondere die in Abschnitt 3.5.2 vorgestellten Maße. So ist es sinnvoll, das Maß  $\mathcal{D}^{\text{MI}}$  zu verwenden, wenn das Bild  $\mathbf{h}$  zwar gleiche Strukturen besitzt, jedoch stark variierende Abschwächungskoeffizienten aufweist. Für die Art der Anpassung ist eine affine Transformation hinreichend, da das resultierende Bild für die Berechnung der nicht-lokalen Gewichtung genutzt wird und eine exakte Überlagerung von anatomischen Strukturen nicht erforderlich ist. Der Registrierungsprozess dient lediglich dazu, ähnliche Strukturen in einem kleineren Suchfenster bereitzustellen.

#### 4.5. REGULARISIERUNG DURCH BILDBASIERTES VORWISSEN

Der Term (4.43) dient der Berechnung eines geeigneten Pixelwertes, welcher für die Ermittlung des Strafterms in (4.42) herangezogen wird. Hierbei beschreibt  $\eta_x$  einen Patch beziehungsweise Bildausschnitt um den zentralen Pixel  $x$ . Die Menge  $\mathcal{N}_x$  beinhaltet Indizes von Pixeln, welche innerhalb eines Suchfensters um den Pixel  $x$  liegen. Die Metrik  $\|\cdot\|_p$  beschreibt die Minkowski Distanz  $p$ -ten Grades. Gewichtet wird diese mit Hilfe des Wertes  $\sigma_{|x-y|}$ , welcher abhängig von der Entfernung zwischen den Pixelpositionen  $x$  und  $y$  ist und mit steigender Entfernung basierend auf einer Gauß-Funktion abnimmt. Die maximale Größe des Suchfensters ist gleichzusetzen mit der Größe des Bildes. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Laufzeit der Berechnung stark von der Größe des Suchfensters abhängig ist, da bei steigender Größe des Suchfensters die Anzahl der Vergleiche von Patches quadratisch steigt. Auch mit steigender Größe der Patches erhöht sich der Rechenaufwand. Anders jedoch als beim Suchfenster kann ein allzu großer Patch für die Berechnung der Gewichtung sogar hinderlich sein. Zwar bedeutet ein größerer Patch, dass ein größerer Bildbereich miteinbezogen wird, jedoch ist es bei größeren Patches unwahrscheinlicher, ähnliche Strukturen zu finden, als bei kleineren Patches.

Abbildung 4.16 zeigt illustrativ den Vergleich der Patches anhand eines Beispiels. Auf der linken Seite ist ein Ausschnitt eines Bildes  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  gezeigt, während auf der rechten Seite ein Prior  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*) \in \mathbb{R}^N$  gezeigt ist, welcher eine ähnliche Gesamtstruktur wie  $\mathbf{f}$  aufweist. Für die Berechnung des Strafterms wird für den Pixel  $f_j$  ein Suchfenster  $\mathcal{N}_j$  im Prior  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)$  betrachtet. Dieses ist hier durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Die Patches  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)_{\eta_k}, k \in \mathcal{N}_j$  werden basierend auf der Minkowski Distanz mit dem Patch  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  verglichen. Die darauf basierende gewichtete Summe der Pixel  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)_k$  wird anschließend für die Berechnung des Strafterms (4.42) herangezogen.

Die zum in Abbildung 4.16 dargestellten Suchfenster  $\mathcal{N}_j$  gehörenden Patches  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma)_{\eta_k}$  sind auf der linken Seite in Abbildung 4.17 gezeigt. Dem gegenübergestellt sind auf der rechten Seite die Differenzen zum Patch  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  dargestellt. Auffallend hierbei ist, dass es genau einen Patch  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma)_{\eta_k}$  gibt, welcher exakt die gleiche Struktur wie  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  aufweist. Dies ist an dem vollständig schwarz gefüllten Differenz-Patch zu erkennen.

Die für das Suchfenster  $\mathcal{N}_j$  in Abbildung 4.16 resultierende Gewichtungsmatrix ist in Abbildung 4.18 visualisiert. Dem Pixelwert, welcher zum vollständig schwarzen Differenz-Patch korrespondiert, wird folgerichtig eine Gewichtung von 1 zugewiesen.

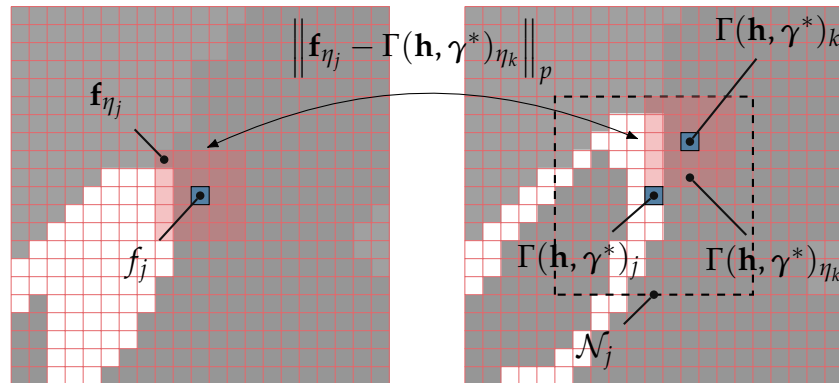


Abbildung 4.16: Berechnung der nicht-lokalen Gewichtungsmatrix. Im Rahmen der Berechnung wird der Patch  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  mit allen Patches  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma)_{\eta_k}, k \in \mathcal{N}_j$  im Suchfenster  $\mathcal{N}_j$  verglichen. Patches mit ähnlicher Struktur erhalten ein hohes Gewicht, Patches mit geringerer struktureller Übereinstimmung erhalten ein kleines Gewicht. Anschließend wird basierend auf den Gewichten ein Pixelwert generiert, welcher zur Regulierung verwendet wird.

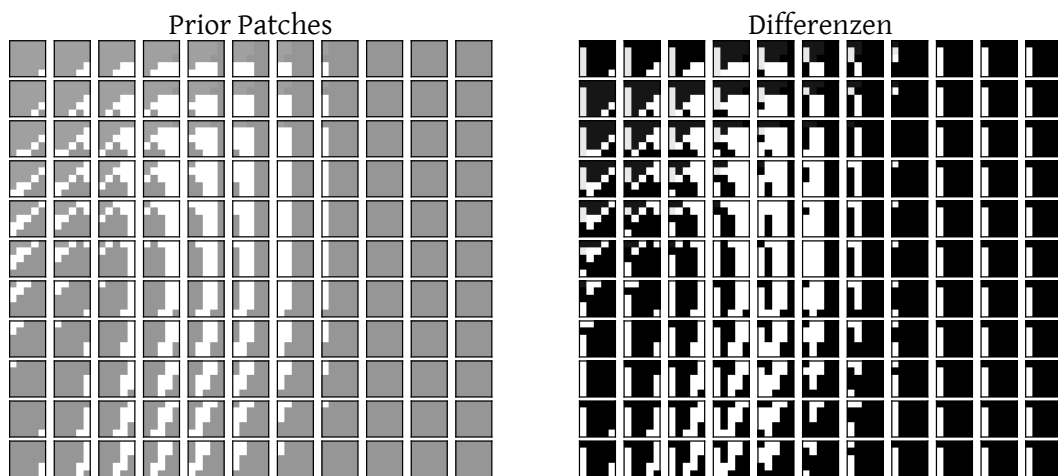


Abbildung 4.17: Patches und Differenzen von Patches. Auf der linken Seite sind die einzelnen Patches  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma)_{\eta_k}, k \in \mathcal{N}_j$  gezeigt. Auf der rechten Seite sind die absoluten Differenzen der jeweiligen Patches zum Patch  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  gezeigt. Hierzu sei zusätzlich auf Abbildung 4.16 verwiesen. Die absoluten Differenzen zeigen, dass es genau einen Patch gibt, welcher exakt die gleiche Struktur wie  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  besitzt.

#### 4.5. REGULARISIERUNG DURCH BILDBASIERTES VORWISSEN

Pixelpositionen, die mehr strukturelle Unterschiede im Patch aufweisen, erhalten geringere Gewichtungen. Der finale Pixelwert, welcher im Strafterm (4.42) verwendet wird, resultiert anschließend aus der Summe der gewichteten Pixelwerte im Suchfenster.

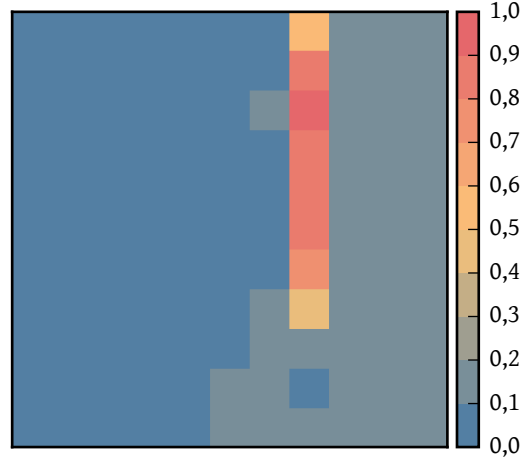


Abbildung 4.18: Gewichtungsmatrix des nicht-lokalen Regularisierungsterms. Visualisierung der Gewichtung für die einzelnen Pixel im Prior (vergleiche hierzu Gleichung (4.43)). Das Pixel, welches zum Patch mit der gleichen Struktur wie  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  korrespondiert, erhält eine Gewichtung von 1, während andere Pixel eine kleinere Gewichtung erhalten. Die Gewichtungsmatrix entspricht dem Suchfenster in Abbildung 4.16.

Der Term

$$\kappa_j = \sum_{k \in \mathcal{N}_j} e^{\left( \frac{-\sigma_{|k-j|} \|\mathbf{f}_{\eta_j} - \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*) \eta_k\|_p}{v^2} \right)} \quad (4.45)$$

in (4.42) dient der Normalisierung der Gewichtung. Weiter noch wird dieser bei der Berechnung von

$$\iota_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \kappa_j < \tau_\psi, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (4.46)$$

verwendet. Der Ausdruck  $\iota_j$  stellt einen Sicherheitsmechanismus dar. Weist der Prior  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)$  im gegebenen Suchfenster keinen Patch auf, welcher eine ähnliche Struktur wie  $\mathbf{f}_{\eta_j}$  besitzt, gibt es keine sinnvolle Rechtfertigung dafür, eine bestrafende Regula-

risierung für die entsprechende Pixelposition durchzuführen. Da also in diesem Fall kein adäquates Vorwissen vorhanden ist, wird der Teil des Strafterms für den entsprechenden Pixelwert auf Null gesetzt, wenn die Summe aller Gewichte für die Patches  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)_{\eta_k}, k \in \mathcal{N}_j$  den Schwellwert  $\tau_\psi$  nicht überschreitet.

An noch mehr Bedeutung gewinnt dieser Mechanismus bei der Integration des Regularisierungsterms in die iterative Rekonstruktion. Eine Neuberechnung des Terms in jeder Iteration, und damit eine Neuberechnung eines Priors basierend auf  $\Gamma(\mathbf{h}, \gamma^*)$ , ist zwar einerseits stark vom gegebenen Bild  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$  abhängig, andererseits ist es jedoch sehr entscheidend, welche Informationen das Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  enthält. Können in frühen Iterationen zunächst keine strukturellen Gemeinsamkeiten zwischen dem Prior und dem Zwischenergebnis festgestellt werden, ist es sinnvoll, dem Strafterm nur eine geringe Bedeutung zuzuschreiben. Erst wenn sichergestellt ist, dass eine hinreichend große Übereinstimmung zwischen dem neu-berechneten Prior und dem Zwischenergebnis besteht, ist eine Regularisierung förderlich. Durch dieses Vorgehen kann sichergestellt werden, dass keine synthetischen Strukturen durch den Regularisierungsterm in das zu rekonstruierende Bild gelangen.

## 4.6 Kombinierte Registrierung und Rekonstruktion

Sowohl für die Integration des Vorwissens bezüglich des Metallobjektes als auch für die nicht-lokale Regularisierung mit Hilfe eines gegebenen Priors ist es notwendig, geeignete Transformationsparameter bereitzustellen. Für die vorgeschlagene Regularisierung wurde hierzu in Abschnitt 4.5 erläutert, dass das Problem

$$\gamma_{\text{prior}}^* = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^6} \mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma)) \quad (4.47)$$

gelöst werden muss. Weiter wurde in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, wie eine passende Transformation für das gegebene Vorwissen über das Metallobjekt gefunden werden kann. Hierbei wird nach einer initialen Positionierung des Metallobjektes basierend auf dem Masseschwerpunkt (4.4) das Registrierungsproblem

$$\gamma_{\text{metal}}^* = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^3} \mathcal{D}^{\text{MI}}(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma)) \quad (4.48)$$

#### 4.6. KOMBINIERTE REGISTRIERUNG UND REKONSTRUKTION

gelöst. Zum Finden einer Lösung der beiden Registrierungsprobleme ist es jeweils notwendig, ein Bild  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  bereitzustellen. Um bestmögliche Voraussetzungen für die Optimierungsaufgaben (4.47) und (4.48) zu gewährleisten, sollte ein artefaktfreies Bild zur Verfügung gestellt werden. Zu Beginn der Rekonstruktion liegt ein solches Bild jedoch nicht vor. Im Falle einer iterativen Rekonstruktion besteht allerdings die Möglichkeit, Zwischenergebnisse für die Registrierung zu verwenden. Die Grundannahme dabei ist, dass mit jeder Iteration mehr und mehr Bildinformationen bereitgestellt werden, welche es erlauben, genauere Transformationsparameter mit jedem weiteren Iterationsschritt zu finden. Bei einer klassischen iterativen Rekonstruktion, wie sie beispielsweise durch den ML-TR-Algorithmus realisiert wird (siehe Abschnitt 3.3), ist der Gewinn an Bildinformationen pro Iteration jedoch nicht groß genug, um den notwendigen Rechenaufwand zum Lösen der Registrierungsprobleme zu rechtfertigen. Bei einer Bildrekonstruktion durch den ALIR-Algorithmus verhält sich dies anders. Unterscheidet man bei dem Algorithmus zwischen äußeren Iterationen, welche durch den Index  $k$  in Algorithmus 3 dargestellt sind, und inneren Iterationen, welche beim Lösen des Subproblems (3.58) in Zeile 4 durchlaufen werden, so ist der Gewinn an Bildinformationen in jedem äußeren Iterationsschritt um ein Vielfaches größer. Das Lösen der Registrierungsprobleme in jeder äußeren Iteration verspricht somit also einen tatsächlichen Gewinn an Genauigkeit bezüglich der ermittelten Transformationsparameter.

Da zu Beginn des ersten Iterationsschrittes noch keine Bildinformationen vorhanden sind, muss eine alternative Initialisierung der Transformationsparameter gewählt werden. Hierzu wird, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, eine unkorrigierte FBP-Rekonstruktion des Bildes herangezogen. Das FBP-Bild enthält trotz Metallartefakte in der Regel ausreichend viele Bildinformationen, um eine hinreichend gute Abschätzung der Transformation zu ermitteln. Bei besonders stark ausgeprägten Artefakten, beispielsweise verursacht durch sehr große Implantate, kann eine initiale Korrektur vorgenommen werden. Eine Rekonstruktion nach einer linearen Interpolation der Metallprojektionen, siehe Abschnitt 4.3.1, ist hierbei eine Möglichkeit, welche einen tolerierbaren zusätzlichen Rechenaufwand erfordert.

Abbildung 4.19 zeigt eine schematische Darstellung des Ansatzes zur simultanen Registrierung und Rekonstruktion. Ausgehend von einer initialen Registrierung von Metallobjekt und Prior basierend auf dem FBP-Bild wird ein äußerer Iterationsschritt des

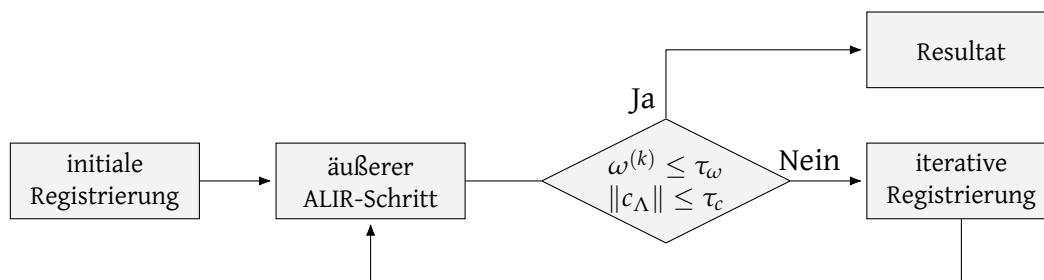


Abbildung 4.19: Integration der Registrierung in die Rekonstruktion. Zunächst wird eine initiale Registrierung basierend auf einer unkorrigierten Rekonstruktion durchgeführt, um eine erste Abschätzung der Transformationsparameter zu erhalten. Anschließend wird ein äußerer Iterationsschritt des ALIR-Algorithmus durchgeführt (Zeile 7 bis 29 in Algorithmus 3). Tritt keine Konvergenz ein, werden die Registrierungsprobleme (4.47) und (4.48) für  $\mathbf{f}^{(k)}$  gelöst und der nächste Iterationsschritt wird ausgeführt.

ALIR-Algorithmus durchlaufen. Werden die zuvor festgelegten Konvergenzkriterien erfüllt (vergleiche Algorithmus 3 und Abbildung 4.15), ist die Rekonstruktion abgeschlossen. Anderenfalls wird das Zwischenergebnis der aktuellen Iteration genutzt, um die Probleme (4.47) und (4.48) zu lösen. Die dabei ermittelten Transformationsparameter werden anschließend für den nächsten äußeren Iterationsschritt verwendet.

Algorithmus 4 zeigt die Integration der Registrierungsprozesse in den ALIR-Algorithmus im Detail. Noch bevor mit dem ersten Iterationsschritt in Zeile 6 begonnen werden kann, wird in Zeile 3 eine FBP durchgeführt. Das Ergebnis dieser Rekonstruktion dient anschließend in Zeile 4 und 5 dazu, eine erste Abschätzung der Transformationsparameter  $\gamma_{\text{metal}}^{*(0)}$  und  $\gamma_{\text{prior}}^{*(0)}$  zu ermitteln. Im Laufe der äußeren Iterationen (Zeile 6 bis 32) sind in den sequenziellen Iterationsschritten die Registrierungsprobleme (4.47) und (4.48) basierend auf dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathbb{R}^N$  zu lösen. Initialisiert werden die Probleme dabei stets mit den Transformationsparametern aus der Iteration davor. Weiter ist zu beachten, dass die im Verlauf der Rekonstruktion immer exakter werdenden Parameter explizit bei der Berechnung von

$$\Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = l_{\Lambda}(\mathbf{f}) + \zeta c_{\Lambda}(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma_{\text{metal}}^*), \boldsymbol{\lambda}, \mu) + \delta R(\mathbf{f}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma_{\text{prior}}^*)) \quad (4.49)$$

herangezogen werden.

---

**Algorithmus 4** Ergänzung von Algorithmus 3 durch simultane Registrierung.

---

- 1: Given measurement  $\mathbf{p}$ , prior information  $\mathbf{b}$ , starting point  $\mathbf{f}^{(0)}$ , initial multipliers  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ , convergence tolerances  $\eta^*$  and  $\omega^*$ , relation factors  $\zeta$  and  $\delta$ , prior image  $\mathbf{h}$
  - 2: Set  $\mu^{(0)} = 10, \omega^{(0)} = 1/\mu^{(0)}, \eta^{(0)} = 1/(\mu^{(0)})^{0,1}$
  - 3: find initial reconstruction  $\mathbf{f}^{\text{FBP}}$   
# find initial transformation paramters
  - 4: solve  $\gamma_{\text{metal}}^{*(0)} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^3} \mathcal{D}^{\text{MI}}(\mathbf{f}^{\text{FBP}}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma))$
  - 5: solve  $\gamma_{\text{prior}}^{*(0)} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^6} \mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathbf{f}^{\text{FBP}}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma))$
  - 6: **for**  $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\text{max}}$  **do**
  - 7: find an approximated solution  $\mathbf{f}^{(k)}$  with the tolerance  $\omega^{(k)}$  of the subproblem  
 $\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})$ , such that  $\mathbf{l} \leq \mathbf{f}^{(k)} \leq \mathbf{u}$
  - 8: **if**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma_{\text{metal}}^{*(k)}), \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \max(\eta^{(k)}, \eta^*)$  **then**  
# test for convergence
  - 9:     **if**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma_{\text{metal}}^{*(k)}), \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \eta^*$  **and**  
        $\|\nabla_{\mathbf{f}} \Lambda_{\zeta, \delta}(\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \omega^*$  **then**
  - 10:         stop with approximated solution  $\mathbf{f}^{(k)}$
  - 11:     **end if**  
       # update multipliers, increase penalty parameter, tighten tolerance
  - :
  - 22: **end if**
  - 23: **if**  $\omega^{(k)} \leq \tau_{\omega}$  **and**  $\|c_{\Lambda}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma_{\text{metal}}^{*(k)}), \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \leq \tau_c$  **then**  
# compute new projection values
  - 24:     **for**  $k_g = 0, 1, 2, \dots, k_{\text{filter}}$  **do**
  - 25:         calculate filtered image  $\bar{\mathbf{g}}^{(k)}$  as shown in (4.28) and set  $\bar{\mathbf{f}}^{(k)} = \bar{\mathbf{g}}^{(k)}$
  - 26:     **end for**
  - 27:     compute forward projections  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  as shown in (4.27)
  - 28:     combine projection values  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  and  $p_i, i \in \mathcal{M}_{\text{valid}}$
  - 29: **end if**  
# find best transformation parameters
  - 30: solve  $\gamma_{\text{metal}}^{*(k+1)} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^3} \mathcal{D}^{\text{MI}}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{b}, \gamma^{*(k)}))$
  - 31: solve  $\gamma_{\text{prior}}^{*(k+1)} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^6} \mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathbf{f}^{(k)}, \Gamma(\mathbf{h}, \gamma^{*(k)}))$
  - 32: **end for**
-



## Kapitel 5

# Durchgeführte Studien und Ergebnisse

Im folgenden Kapitel wird eine detaillierte Evaluierung des vorgestellten Augmented Likelihood Image Reconstruction Algorithmus vorgestellt. Hierzu wird in Abschnitt 5.1 die Fähigkeit des Algorithmus bezüglich der Reduktion von Metallartefakten untersucht. Diesbezüglich wird zunächst ein Softwarephantom betrachtet, welches eine präzise quantitative Evaluierung ermöglicht. Anschließend wird ein Hardwarephantom herangezogen, welches mit verschiedenen Metallobjekten versehen werden kann. Dies erlaubt die Modellierung einer realistischen und praxisnahen Situation zur Evaluierung des Algorithmus und bietet gleichzeitig die Möglichkeit, ein Ground-Truth-Bild zum Vergleich heranzuziehen. Darauf folgend werden verschiedene klinische Fälle betrachtet. Da die Grundwahrheit hierbei für die Evaluierung nicht zur Verfügung steht, wird die Auswertung in Zusammenarbeit mit erfahrenen Radiologen des Universitätsklinikums Schleswig-Holstein, Campus Lübeck, durchgeführt. In Abschnitt 5.2 wird die Rekonstruktion von korrekten Abschwächungskoeffizienten untersucht. Zu diesem Zweck wird ein medizinisches Phantom der Firma Sun Nuclear verwendet. Dieses ist mit Einsätzen bestückt, welche verschiedene gewebeäquivalente Elektronendichten aufweisen. Da hier der Ground Truth bekannt ist, kann untersucht werden, wie exakt Abschwächungskoeffizienten, welche durch Artefakte verunreinigt sind, wiederherge-

stellt werden können. Abschließend wird in Abschnitt 5.3 der nicht-lokale Regularisierungsansatz in Verbindung mit Metallartefakten untersucht.

## 5.1 Metallartefaktkorrektur

Im Folgenden wird der ALIR-Algorithmus hinsichtlich seiner Fähigkeit untersucht, Metallartefakte zu reduzieren. Um die Qualität der rekonstruierten Bilder in einen Kontext zu setzen, werden Vergleiche zu weiteren Metallartefaktkorrekturalgorithmen durchgeführt. Hierzu wird der in Abschnitt 4.3.1 vorgestellte Algorithmus der linearen Interpolation (LI) herangezogen [124]. Hierbei werden Metallprojektionen aus den Rohdaten entfernt und durch eine eindimensionale lineare Interpolationen zwischen bekannten Projektionen für jeden Aufnahmewinkel ersetzt. Weiter soll der ALIR-Algorithmus einem Algorithmus gegenübergestellt werden, welcher dem neusten Stand der Technik entspricht. Hierzu wird eine eigene Implementierung des Normalized Metal Artefact Reduction (NMAR) Algorithmus von Meyer et al. verwendet [144], [146], [147]. Nach einer initialen Identifizierung der Metallprojektionen wird bei diesem Algorithmus eine lineare Interpolation auf normalisierten Rohdaten durchgeführt. Die Normalisierung basiert hierbei auf einer Vorwärtsprojektion eines Referenzbildes. Das Referenzbild beruht dabei auf einer initialen Rekonstruktion, welche durch multiple Schwellwerte in drei verschiedene Gewebeklassen (Luft, Muskelgewebe und Knochen) eingeteilt wird. Die segmentierten Regionen bekommen daraufhin einheitliche gewebeäquivalente Abschwächungskoeffizienten zugewiesen. Nach durchgeführter linearer Interpolation werden die Rohdaten anschließend wieder denormalisiert. Der Algorithmus wird in der folgenden Evaluierung in zwei verschiedenen Versionen appliziert. Die mit NMAR gekennzeichnete Methode verfolgt den oben beschriebenen Ansatz, wohingegen die Methode, welche durch NMAR mit LI (NMAR mit initialer linearer Interpolation) beschrieben ist, das Ergebnis einer linearen Interpolation zur Erstellung der initialen Rekonstruktion verwendet. Dieses Vorgehen verhindert eine Fehlsegmentierung von stark ausgeprägten Streifenartefakten bei der Berechnung des Referenzbildes.

### 5.1.1 Evaluierung unter Verwendung eines Softwarephantoms

Einleitend soll der vorgestellte Algorithmus mit Hilfe eines Softwarephantoms evaluiert werden. Dies ermöglicht eine exakte quantitative Auswertung der Rekonstruktions- und Artefaktkorrekturergebnisse. Zur Erstellung eines geeigneten Phantoms wurde die XCAT-Software von Segars et al. verwendet [148], [149]. Das erstellte Phantom hat eine Größe von  $512 \text{ Pixel} \times 512 \text{ Pixel}$  mit einer Pixelgröße von  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$  und entspricht der Simulation eines polyenergetischen Strahls mit  $140 \text{ kVp}$ . In Abbildung 5.1 ist das Phantom in einer Fensterbreite von  $500 \text{ HU}$  um ein Fensterzentrum von  $0 \text{ HU}$  dargestellt. Es zeigt ein Schichtbild auf Höhe des Schultergürtels und beinhaltet Knochenstrukturen, Lungengewebe, Weichteilgewebe und Muskelstrukturen. Zur Simulation zweier Metallimplantate wurden künstlich zwei sphärische Strukturen mit  $950 \text{ HU}$  in den linken und rechten Humerus hinzugefügt. Anschließend wurde ein Sinogramm unter einer Parallelstrahlgeometrie<sup>1</sup> mit  $1152$  verschiedenen Aufnahmewinkeln über  $360^\circ$ , einer Detektorgröße von  $725 \text{ mm}$  und  $\text{FCD} = \text{DCD} = 400 \text{ mm}$  erstellt (vergleiche hierzu Abschnitt 2.2.1).

Für die Rekonstruktion mit Hilfe des Augmented Likelihood Image Reconstruction (ALIR) Algorithmus wurde die Struktur der Metallimplantate als Vorwissen definiert. Zusätzlich wurden alle Projektionen entfernt, welche ursprünglich in den simulierten Rohdaten durch die Metallobjekte verlaufen. Diese Projektionen wurden anschließend mit Hilfe von verschiedenen Metallartefaktkorrekturalgorithmen wieder hergestellt. In Abbildung 5.1 sind die Rekonstruktionsergebnisse der einzelnen Algorithmen gezeigt. Das Ergebnis nach linearer Interpolation zeigt stark ausgeprägte Streifenartefakte, welche durch die inkonsistenten Informationen entstanden sind. Die Verwendung von NMAR resultiert in einem deutlich verbesserten Ergebnis im Vergleich zu LI. Gleiches gilt für das rekonstruierte Bild mit Hilfe von NMAR mit initialer linearer Interpolation. Ein visueller Unterschied zwischen den beiden NMAR-Methoden ist dabei nicht festzustellen. Besonders zuträglich für die NMAR-Methoden ist die Tatsache, dass die drei verschiedenen Gewebeklassen (Luft, Muskelgewebe und Knochen), welche für das Hilfsbild benötigt werden, im Softwarephantom eindeutig bestimmt werden können. Da das Phantom keine zusätzlichen Strukturen darstellt, entsteht bei einem solchen

<sup>1</sup>Eine Umrechnung in eine Kegelstrahlgeometrie kann durch die Methodik vollzogen werden, welche in Abschnitt 2.2.1 beschrieben ist.

Vorgehen im Idealfall kein Informationsverlust. Die Einteilung der Gewebeklassen ist lediglich durch das Vorhandensein von Streifenartefakten eingeschränkt. Verglichen mit NMAR und LI weist das Ergebnis der Rekonstruktion mit Hilfe von ALIR die geringste Ausprägung von Streifenartefakten auf. Speziell beim Vergleich der anatomischen Strukturen, welche weit entfernt von den Metallobjekten liegen, ist eine deutliche Reduktion der Artefakte zu erkennen.

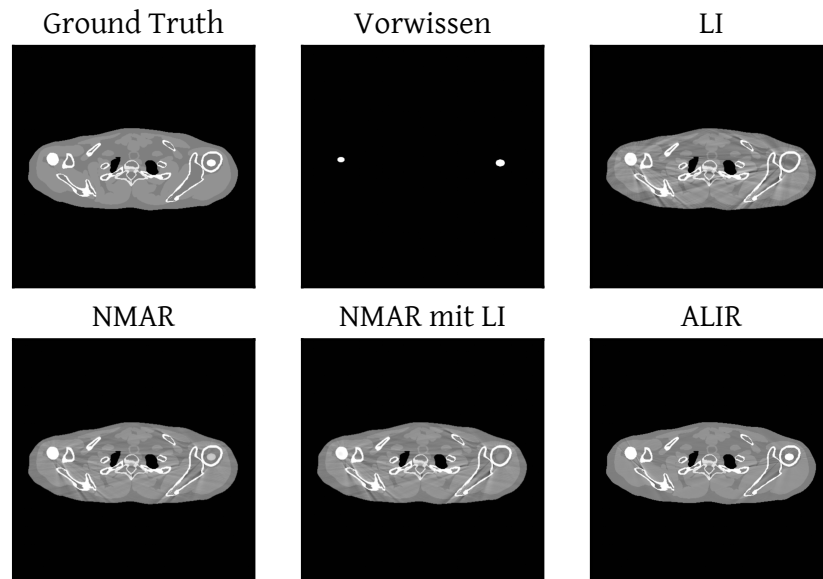


Abbildung 5.1: Rekonstruktions- und Korrekturergebnisse verschiedener Algorithmen. Das Ground-Truth-Bild zeigt ein Schnittbild auf Höhe des Schultergürtels in welches zwei Metallobjekte in den linken und rechten Humerus hinzugefügt wurden. Die Bilder sind mit  $WL = 0 \text{ HU}$ ,  $WW = 500 \text{ HU}$  dargestellt.

Da die gefilterte Rückprojektion (FBP), welche bei den Vergleichsmethoden üblicherweise benutzt wird, negative Werte im Bild erzeugen kann, hat die ALIR durch die integrierte Positivitätsbedingung (siehe hierzu auch Abschnitt 4.2) in der quantitativen Auswertung einen deutlichen Vorteil. Um die quantitative Evaluierung jedoch auf die Reduktion von Streifenartefakten einzuschränken, wurden die Bilder zusätzlich unter Verwendung der negativen Log-Likelihood-Funktion aus (3.91) und des l-BFGS-b-Algorithmus mit Positivitätsforderung rekonstruiert.

In Abbildung 5.2 sind die Differenzbilder der einzelnen Rekonstruktionen aus Abbildung 5.1 mit dem Ground Truth gezeigt. Deutlich zu erkennen ist, dass bei allen Re-

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

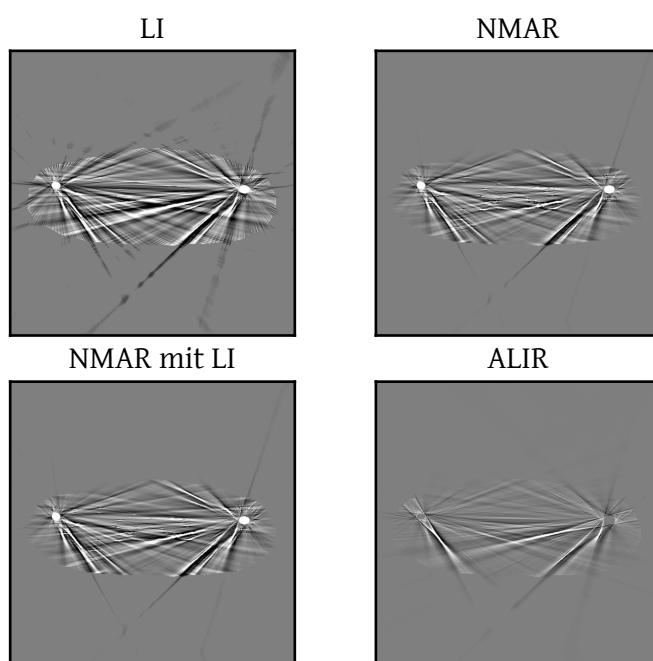


Abbildung 5.2: Differenzbilder der Rekonstruktionen aus Abbildung 5.1 mit dem Ground Truth. Die Bilder sind mit  $WL = 0$  HU,  $WW = 100$  HU dargestellt.

MAR-Methode	Rekonstruktionsmethode	SSD / HU
LI	FBP	635,599
	Likelihood-Rekonstruktion	236,170
NMAR	FBP	479,618
	Likelihood-Rekonstruktion	132,562
NMAR mit LI	FBP	537,979
	Likelihood-Rekonstruktion	182,013
ALIR	ALIR	57,778
ALIR mit LI	ALIR	56,153

Tabelle 5.1: Summe der quadrierten Differenzen (SSD) für die verschiedenen MAR-Methoden in Relation zum Ground Truth.

konstruktionen der Hintergrund einen Grauwert annimmt, welcher einer Differenz von ca. 0 HU entspricht. Bei einer Rekonstruktion mit Hilfe der FBP würde der Hintergrund aufgrund der nicht vorhandenen Positivitätsforderung verrauscht wirken und nicht so homogen wahrgenommen werden, wie es hier der Fall ist. Die in den Differenzbildern deutlicher hervortretenden Streifenartefakte entsprechen der zuvor beschriebenen Wahrnehmung in den Rekonstruktionsbildern. Die stärkste Ausprägung ist LI zuzuweisen, wohingegen NMAR und NMAR mit LI eine leicht verbesserte Reduktion hervorbringen. Die meisten Artefakte konnten mit Hilfe von ALIR unterdrückt werden.

Das Vorhandensein einer Grundwahrheit ermöglicht die Berechnung von quantitativen Fehlermaßen. Für die Evaluierung des verwendeten Software-Phantoms wird hier die Summe der quadrierten Differenzen (SSD, engl. sum of squared differences) verwendet, welche an dieser Stelle durch

$$\text{SSD}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (f_j - g_j)^2 \quad (5.1)$$

für  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$  definiert sei.

In Tabelle 5.1 sind die berechneten Distanzmaße für die verschiedenen MAR-Algorithmen gegeben. Bei LI, NMAR und NMAR mit LI wird zwischen der FBP-Rekonstruktion und der oben beschriebenen Likelihood-Rekonstruktion mit Positivitätsforderung unterschieden. Deutlich zu erkennen ist der Unterschied zwischen den

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

beiden Rekonstruktionsmethoden. Die FBP-Rekonstruktion führt in allen Fällen zu einem sehr viel größeren Abstandsmaß als die Likelihood-Rekonstruktion. Auch die zuvor visuell wahrgenommene Einordnung der MAR-Methoden kann durch das Maß bestätigt werden. LI weist mit 236,2 HU den größten Wert auf. NMAR und NMAR mit LI besitzen mit 132,6 HU beziehungsweise 182,0 HU leicht verbesserte Werte. Die Differenzierung der beiden Methoden mit Hilfe des SSD-Maßes zeigt dabei, dass NMAR für diesen Anwendungsfall etwas bessere Ergebnisse als NMAR mit LI liefert. Dies konnte visuell in den rekonstruierten Bildern nicht wahrgenommen werden. ALIR weist mit 57,8 HU klar den kleinsten Wert aller Methoden auf, was den visuellen Eindruck bestätigt, dass mit dieser Methode die meisten Artefakte unterdrückt werden konnten. Der Vollständigkeit halber ist der Wert für ALIR mit initialer LI angegeben. Dieser ist mit 56,2 HU kaum von dem Wert für ALIR zu unterscheiden. Gleiches gilt für den visuellen Eindruck des Rekonstruktionsergebnisses, was der Grund dafür ist, warum es in Abbildung 5.1 und 5.2 nicht berücksichtigt wurde.

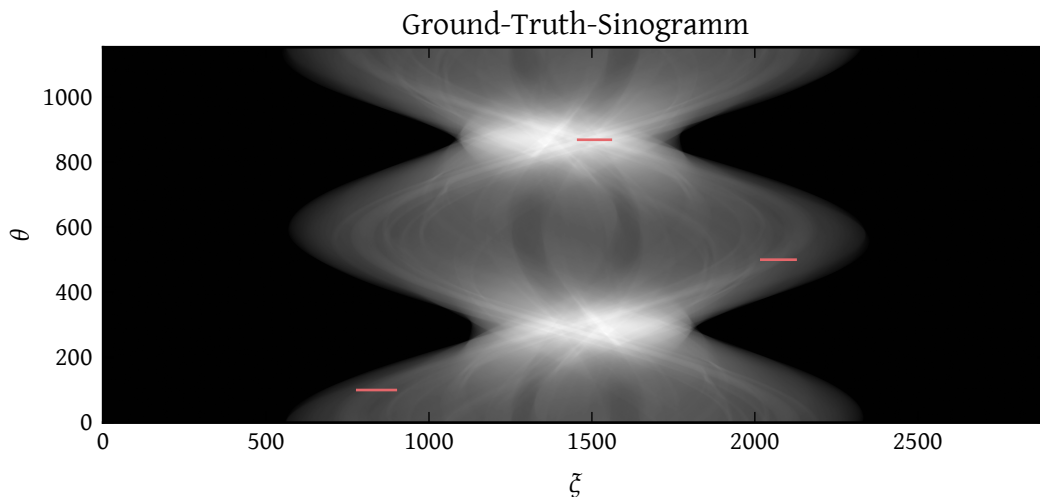


Abbildung 5.3: Ground-Truth-Sinogramm des verwendeten Softwarephantoms. Die roten Linien geben die zur Abbildung 5.4, 5.5 und 5.6 korrespondierenden Abschnitte an.

Die Evaluierung mit Hilfe eines Softwarephantoms hat neben der möglichen quantitativen Auswertung noch einen weiteren Vorteil. Da die Grundwahrheit nicht nur im Bildbereich vorhanden ist, sondern auch die korrekten Werte für die Metallprojektionen bestimmt werden können, ist es möglich, die verschiedenen Algorithmen auch im Rohdatenraum auszuwerten. In Abbildung 5.3 ist das simulierte Sinogramm des Phan-

toms aus Abbildung 5.1 gezeigt. Dargestellt in roten Linien sind Projektionsabschnitte, welche durch das künstlich hinzugefügte Metallobjekt verlaufen und in Abbildung 5.4, 5.5 und 5.6 genauer betrachtet werden.

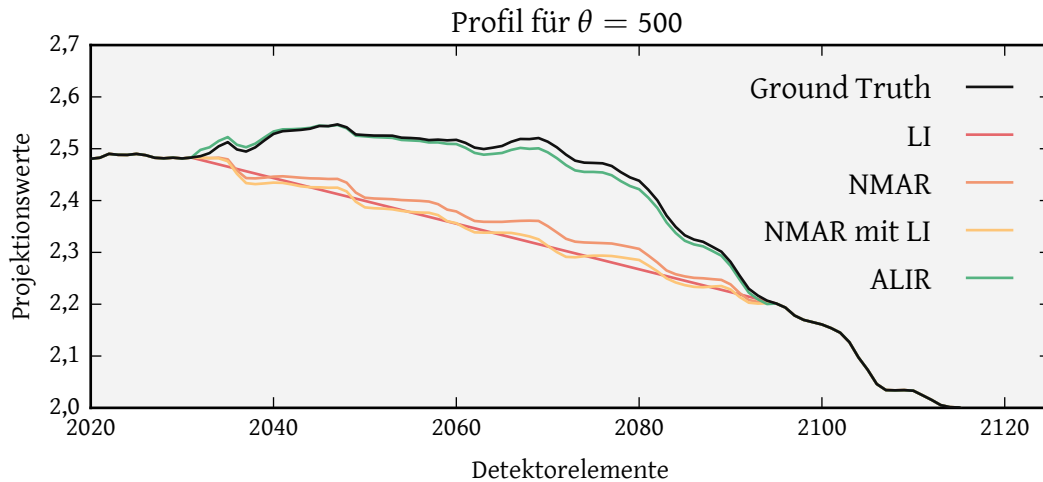


Abbildung 5.4: Profil für Aufnahmewinkel  $\theta = 500$ . Der gezeigte Abschnitt korrespondiert zur roten Linie in Abbildung 5.3 und zeigt Projektionen, die durch die verschiedenen Methoden ersetzt wurden.

Eine Analyse des Profils von Aufnahmewinkel  $\theta = 500$  zeigt wie die verschiedenen Algorithmen die Lücke füllen, welche durch die entfernten Metallprojektionen entsteht. Da der ALIR-Algorithmus das Sinogramm in jeder Iteration, welche die Bedingungen in Algorithmus 4, Zeile 23 erfüllen, durch neu berechnete Projektionen  $\hat{p}_i, i \in \mathcal{M}_{\text{metal}}$  aktualisiert, wird für die Evaluierung das zuletzt genutzte Sinogramm benutzt. Dies ist gerechtfertigt, da es das fertig rekonstruierte Bild am besten repräsentiert. Ein Vergleich zu den Profilen für LI, NMAR und NMAR mit LI in Abbildung 5.5 zeigt, dass ALIR den Verlauf des Ground-Truth-Profiles am besten approximieren kann. Das Profil für LI zeigt wie erwartet eine lineare Verbindungsstrecke zwischen den bekannten Projektionen. NMAR und NMAR mit LI weisen mehr Struktur auf, besitzen jedoch nicht die korrekte Ausprägung. Die neu berechneten Projektionen im ALIR-Algorithmus kommen dem Verlauf des Ground Truths sehr nahe.

Beim Profil für Aufnahmewinkel  $\theta = 868$ , welches in Abbildung 5.5 gezeigt ist, überlagern sich die zwei Sinuskurven, welche mit den hinzugefügten Metallobjekten zu assoziieren sind. Die Peaks im Profil von NMAR und NMAR mit LI zeigen ähnliche Positio-

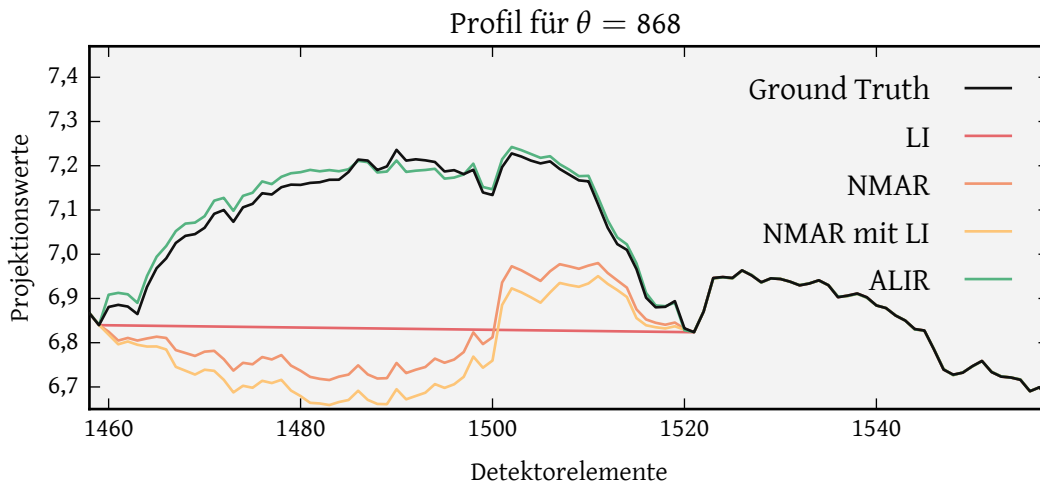


Abbildung 5.5: Profil für Aufnahmewinkel  $\theta = 868$ . Der gezeigte Abschnitt korrespondiert zur roten Linie in Abbildung 5.3 und zeigt Projektionen, die durch die verschiedenen Methoden ersetzt wurden.

nen wie die Peaks im Ground-Truth-Profil, vermissen jedoch die korrekte Ausprägung. Der ALIR-Algorithmus ist jedoch auch hier in der Lage, den idealen Verlauf korrekt zu approximieren.

Eine nahezu perfekte Approximation kann in Abbildung 5.6 für Aufnahmewinkel  $\theta = 100$  betrachtet werden. Ein Unterschied zwischen dem Verlauf des Ground-Truth-Profiles und dem ALIR-Profil ist nicht erkennbar. Dies zeigt, dass die neu berechneten Projektionsdaten die anatomischen Strukturen und die Abschwächungskoeffizienten der Metallimplantate exakt repräsentieren.

### 5.1.2 Evaluierung unter Verwendung eines Hardwarephantoms

Um eine ähnliche Testsituation wie beim Softwarephantom zu schaffen, wurde ein Hardwarephantom der Firma QRM<sup>2</sup> mit zwei beziehungsweise drei Metallstäben versehen. Das Nutzen eines Hardwarephantoms hat den Vorteil, dass zusätzlich zu der Akquirierung von Aufnahmen in einer klinischen Umgebung ein Ground-Truth-Bild

<sup>2</sup>[www.qrm.de](http://www.qrm.de)

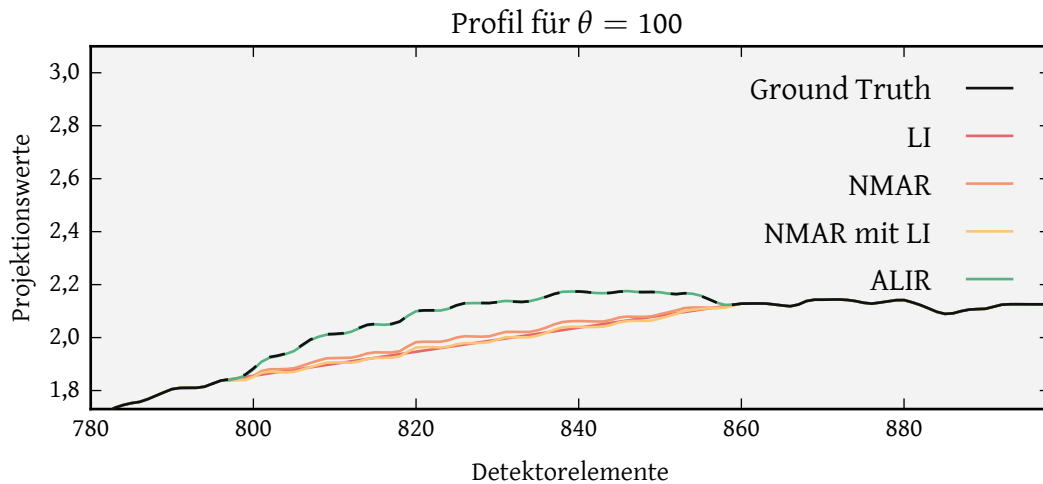


Abbildung 5.6: Profil für Aufnahmewinkel  $\theta = 100$ . Der gezeigte Abschnitt korrespondiert zur roten Linie in Abbildung 5.3 und zeigt Projektionen, die durch die verschiedenen Methoden ersetzt wurden.

rekonstruiert werden kann. Dieses wird bestimmt, indem die Metallobjekte aus dem Phantom vor der Aufnahme entfernt und durch nichtmetallische Objekte ersetzt werden.

Die Akquirierung der Bilddaten wurde unter Verwendung eines Somatom Definition AS, Siemens AG, mit einer Fächerstrahlgeometrie und einem gebogenen Detektor durchgeführt. Zur Ermittlung der Rohdaten wurden 120 kVp und 100 mAs verwendet. Anschließend wurden diese durch Rebinning zu Daten in einer Parallelstrahlgeometrie umgewandelt (siehe hierzu Abschnitt 2.2.1). Das Phantom repräsentiert einen menschlichen Torso mit Rückenwirbeln, Leber und Milz und ist in Abbildung 5.7 sowohl ohne Metallstäbe, als auch mit zwei beziehungsweise drei Metallstäben dargestellt. Deutlich zu erkennen sind die Streifenartefakte, welche durch die Metallstäbe hervorgerufen werden. Während Leber, Milz und Wirbelkörper in der Rekonstruktion ohne Metallstück klar erkennbar sind, erschweren die entstandenen Artefakte die Differenzierung stark. Insbesondere im Fall von drei Metallstäben, sind die Organstrukturen kaum wahrnehmbar.

In Abbildung 5.8 sind die Korrekturergebnisse für den Fall, dass zwei Metallstücke in das Phantom integriert sind, gezeigt. Die Rekonstruktionen für LI, NMAR, NMAR

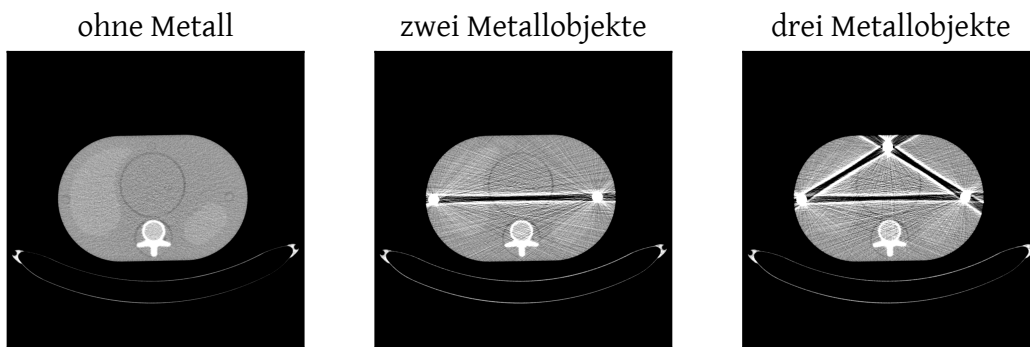


Abbildung 5.7: Das genutzte Hardwarephantom für die Evaluierung. Das Phantom kann mit verschiedenen Metallstäben bestückt werden. Hier dargestellt mit zwei und drei Metallstäben. Für die Fensterung wurde  $WL = 0 \text{ HU}$ ,  $WW = 400 \text{ HU}$  gewählt.

mit LI, sowie für das unkorrigierte Originalbild wurden mit Hilfe der Likelihood-Rekonstruktion und Positivitätsforderung erstellt. Das Ergebnis für LI zeigt eine deutliche Reduktion der Artefakte. Insbesondere der dunkle Streifen zwischen den Metallobjekten, welcher von der Strahlauvhärtung verursacht wird, konnte korrigiert werden. Durch die lineare Interpolation sind jedoch neue deutlich erkennbare Artefakte hinzugekommen, welche den diagnostischen Wert eines medizinischen Bildes verringern würden. NMAR ist nicht in der Lage, das stark ausgeprägte Beamhardening-Artefakt komplett zu korrigieren. Der Grund hierfür ist die unexakte Segmentierung beim Erstellen des Hilfsbildes. Wird jedoch das Ergebnis der linearen Interpolation als Basis für dieses verwendet (NMAR mit LI), so kann ein deutlich besseres Ergebnis erzielt werden. Die Streifenartefakte können auffallend reduziert werden. Einzig die neuentstandenen Artefakte, welche vertikal entlang der Metallobjekte verlaufen, fallen negativ auf. ALIR und ALIR mit LI sind in der Lage, ein ähnlich gutes Ergebnis zu erzeugen, wobei festzustellen bleibt, dass vertikale Artefakte eine deutlich geringere Ausprägung aufweisen. Beim Rekonstruktionsergebnis von ALIR ist ein schwarzer Rand in der Größe von einem Pixel um die Metallobjekte zu erkennen. Dies ist vermutlich auf den Partial-Volumen-Effekt bei der Neuberechnung von Projektionen zurückzuführen. Deutlich reduziert ist dieser Effekt beim Ergebnis von ALIR mit LI. Der Grund hierfür, zusammen mit möglichen Verbesserungen, wird genauer in Abschnitt 6.4 diskutiert.

Durch das Ground-Truth-Bild ohne Metallstäbe ist es wie beim Softwarephantom möglich, ein Differenzbild zu berechnen und so die Streifenartefakte genauer zu untersu-

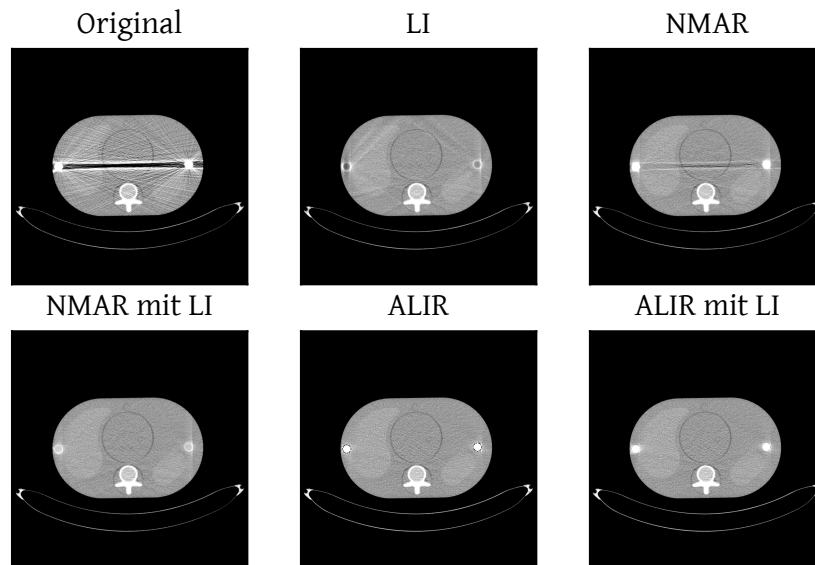


Abbildung 5.8: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für das Hardwarephantom mit zwei Metallstäben. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 0 \text{ HU}$ ,  $WW = 400 \text{ HU}$  dargestellt.

chen. In Abbildung 5.9 sind die Differenzbilder der Korrekturergebnisse in einer Fensterbreite von  $200 \text{ HU}$  dargestellt. Da es sich bei den Aufnahmen des Phantoms mit und ohne Metallstäben um zwei verschiedene Aufnahmen handelt und die Position des Phantoms bei der Montage der Metallstäbe nicht absolut exakt beibehalten werden konnte, ist ein leichter Offset in den Differenzbildern zu erkennen. Besonders deutlich ist dies an den Kanten des Phantoms. Dessen ungeachtet bestätigen die Differenzbilder den visuellen Eindruck der Rekonstruktionsergebnisse aus Abbildung 5.8. Deutlich sind die Ausmaße der Streifenartefakte im LI-Bild zu erkennen, welche sich über das gesamte Bild erstrecken. Das Ergebnis für NMAR mit LI zeigt nun noch besser die Ausprägung des vertikal verlaufenden Artefakts, welches lateral zum Metallobjekt verläuft. Klarer lässt sich nun auch der Unterschied zur ALIR-Rekonstruktion feststellen, welche nur wenig neue Artefakte im Bild hervorruft. Ein Unterschied zwischen ALIR und ALIR mit LI ist auch im Differenzbild nicht zu konstatieren.

In Abbildung 5.10 sind die Rekonstruktionsergebnisse für das Hardwarephantom mit drei Metallstäben gezeigt. Die rekonstruierten Bilder zeigen ein ähnliches Ergebnis wie beim Phantom mit zwei Metallstäben. Auch hier war NMAR nicht in der Lage, die stark

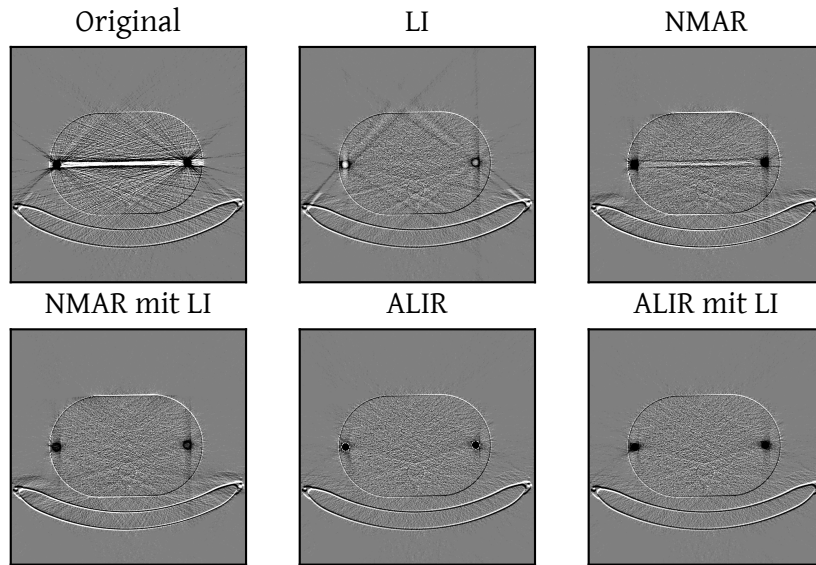


Abbildung 5.9: Differenzbilder der Rekonstruktionsergebnisse aus Abbildung 5.8 zum Ground Truth. Die Differenzen sind in einer Fensterung mit  $WL = 0 \text{ HU}$ ,  $WW = 200 \text{ HU}$  dargestellt.

ausgeprägten Beamhardening-Artefakte zu korrigieren. NMAR mit LI zeigt hingegen ein sehr gutes Korrekturergebnis, in welchem nur noch schwache vertikale Streifen am rechten und linken Metallstab zu erkennen sind. ALIR und ALIR mit LI produzieren ähnlich gute Ergebnisse, wobei die lokalen Artefakte in der Nähe der Metallstäbe weniger stark ausgeprägt sind. Im Kontrast dazu sind jedoch leichte Verbindungslinien zwischen den Metallstäben und dem Rückenwirbel zu sehen. Ein Unterschied zwischen ALIR und ALIR mit LI ist in der Rekonstruktion visuell nicht wahrnehmbar.

Die berechneten Differenzen in Abbildung 5.11 bestätigen den beschriebenen Eindruck. Einzig die zuvor kaum erkennbaren Verbindungsartefakte zum Rückenwirbel im Rekonstruktionsergebnis von NMAR mit LI sind nun deutlicher zu erkennen. Gleiches gilt für das Ergebnis von ALIR mit LI. Auch hier sind die Verbindungsartefakte nun deutlich wahrzunehmen. Beim ALIR-Ergebnis ist dies nicht festzustellen, was dazu führt, dass in einer Qualitätseinordnung ALIR vor ALIR mit LI zu setzen ist.

Wie aus den Rekonstruktionsergebnissen des Hardwarephantoms hervorgeht, ist eine eindeutige Einordnung der Bilder mitunter schwierig. Beim Betrachten der Bilder ist

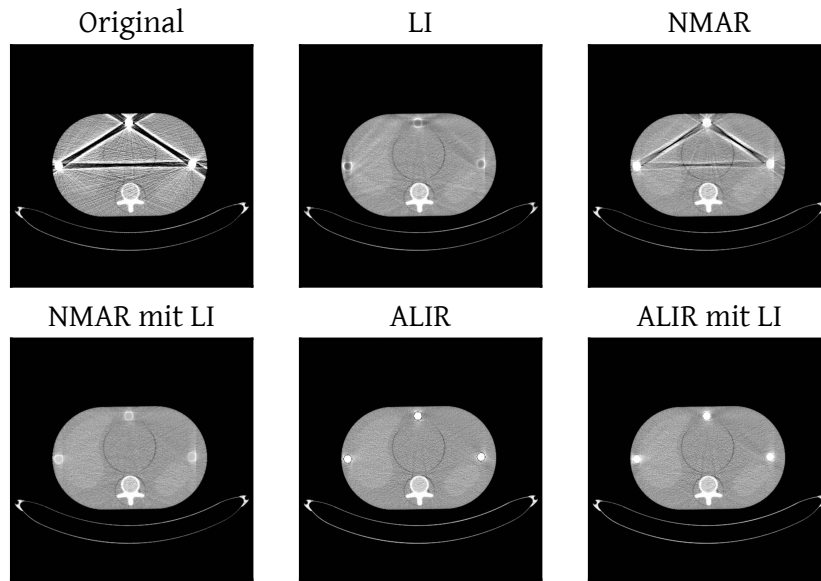


Abbildung 5.10: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für das Hardwarephantom mit drei Metallstäben. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 0$  HU,  $WW = 400$  HU dargestellt.

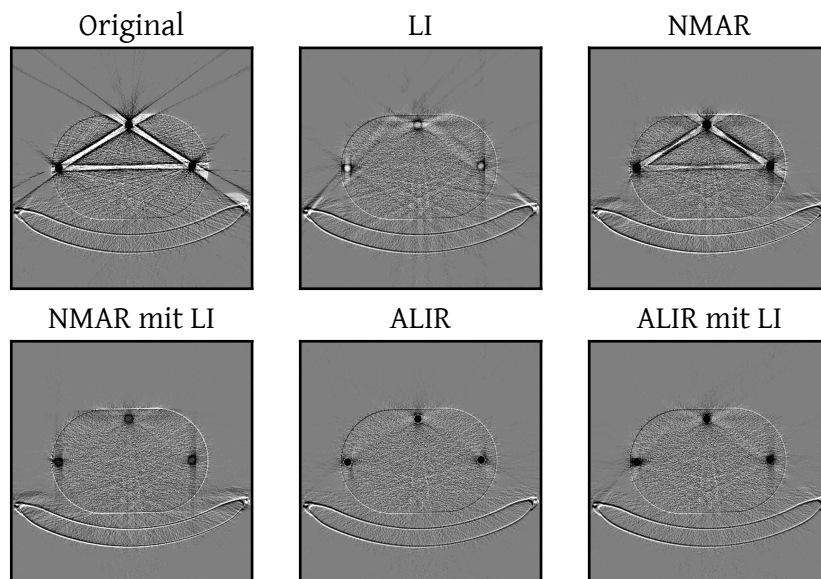


Abbildung 5.11: Differenzbilder der Rekonstruktionsergebnisse aus Abbildung 5.10 zum Ground Truth. Die Differenzen sind in einer Fensterung mit  $WL = 0$  HU,  $WW = 200$  HU dargestellt.

die gewählte Fensterung und die Fokussierung auf bestimmte Aspekte des Bildes entscheidend. Eine objektive Evaluierung beim Softwarephantom ist durch die Berechnung des SSD-Maßes mit Hilfe des Ground Truths gegeben. Zwar liegt im Falle des Hardwarephantoms auch ein Ground-Truth-Bild vor, jedoch ist die Berechnung eines Gütemaßes durch ein sehr starkes Rauschlevel negativ beeinflusst. Eine bessere Alternative bietet eine objektive Beurteilung der Rekonstruktionsergebnisse durch ausgezeichnete Experten. Zu diesem Zwecke wurde ein Programm entworfen, welches es ermöglicht, die verschiedenen Bilder anonymisiert und ohne mögliche Rückschlüsse auf die verwendete Rekonstruktionmethode darzustellen. Ein Bildschirmfoto des Evaluierungsprogramms ist in Abbildung 5.12 gezeigt. Dem Benutzer werden sechs verschiedene randomisiert angeordnete Rekonstruktionsergebnisse präsentiert. Eines der Bilder entspricht dabei stets dem unkorrigierten Rekonstruktionsergebnis. Unter jedem Bild befindet sich ein Benotungsfenster, welches dafür genutzt wird, eine Eingabe zur Evaluierung der Bildqualität vorzunehmen. Um das unkorrigierte Rekonstruktionsergebnis zu kennzeichnen, ist das Benotungsfenster deaktiviert und mit der Note 0 festgelegt. Der Benutzer wird nun aufgefordert den restlichen Bildern eine Note zwischen -10 und 10 zu geben, wobei bis zu zwei Nachkommastellen möglich sind. Eine Benotung mit 0 entspricht dabei der Wahrnehmung, dass es absolut keinen Unterschied zum unkorrigierten Originalbild gibt. Die Note 10 signalisiert die Interpretation, dass alle Artefakte bereinigt wurden, wohingegen die Note -10 angibt, dass die Qualität des Bildes sehr viel schlechter geworden ist. Dadurch, dass es keine Kennzeichnung der benutzten Rekonstruktionmethode gibt und die Anordnung der Bilder zufällig ist, entsteht so eine objektive Einordnung der Bildqualität. Um eine detaillierte Auseinandersetzung mit bestimmten Aspekten im Bild zu erlauben, hat der Nutzer die Möglichkeit, die Fensterung einzustellen, zu zoomen und das Bild zu verschieben. Die Änderungen der Darstellung werden dabei stets auf alle Rekonstruktionsergebnisse gleichzeitig angewandt.

Zur Evaluierung der Bilddaten wurden 10 Radiologinnen und Radiologen der Klinik für Radiologie und Nuklearmedizin, Universitätsklinikum Schleswig-Holstein, Campus Lübeck, gebeten, eine Benotung bezüglich der Bildqualität mit dem Fokus auf die Reduktion von Artefakten durchzuführen. Die erteilten Noten wurden anschließend anonymisiert abgespeichert und in Form eines Violinenplots aufbereitet [150]. Ein Violinenplot visualisiert, ähnlich wie ein Boxplot, die wesentlichen Informationen einer

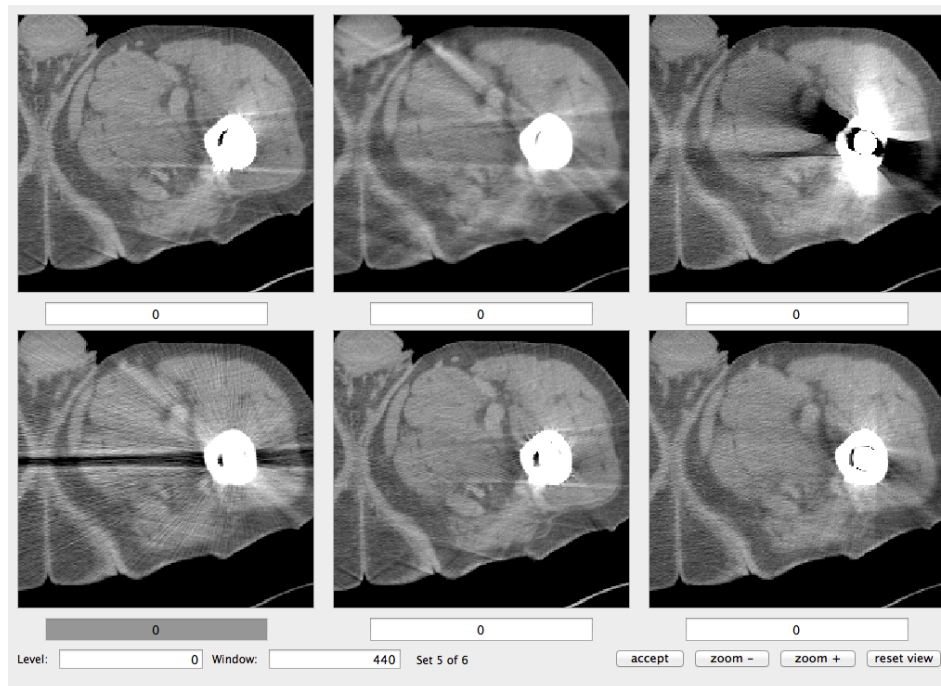


Abbildung 5.12: Bildschirmfoto des Evaluierungsprogramms. Der Benutzer hat die Möglichkeit, die Fensterung anzupassen, zu zoomen und den Bildausschnitt zu verschieben. Unterhalb eines jeden Bildes befindet sich ein Feld zur Benotung der Bildqualität.

Häufigkeitsverteilung, mit dem zusätzlichen Vorteil, dass die Dichteverteilung grafisch dargestellt ist. In Abbildung 5.13 sind die Ergebnisse für das Hardwarephantom mit zwei Metallobjekten gezeigt. Für jede Rekonstruktionsmethode ist eine “Violine” abgebildet, wobei die bauchige Kurve jeweils die Dichteverteilung der Benotung visualisiert. Dargestellt durch einen hellgrauen Punkt ist der Median einer jeden Verteilung. Der Bereich zwischen dem ersten und dritten Quantil ist durch einen dicken dunkelgrauen Balken symbolisiert. Am oberen Rand des Graphen ist jeweils der Mittelwert der Bewertung gegeben.

Für das Hardwarephantom mit zwei Metallstäben hat die Auswertung durch die Experten ergeben, dass NMAR die schlechteste Reduktion der Artefakte erzielen konnte (Durchschnittsnote 2,7). Dieses Ergebnis ist auf das kaum reduzierte Beamhardening-Artefakt zurückzuführen. Die Korrektur durch LI erzielt eine leicht verbesserte Benotung mit einem Durchschnitt von 3,7. Das Rekonstruktionsergebnis von NMAR mit LI

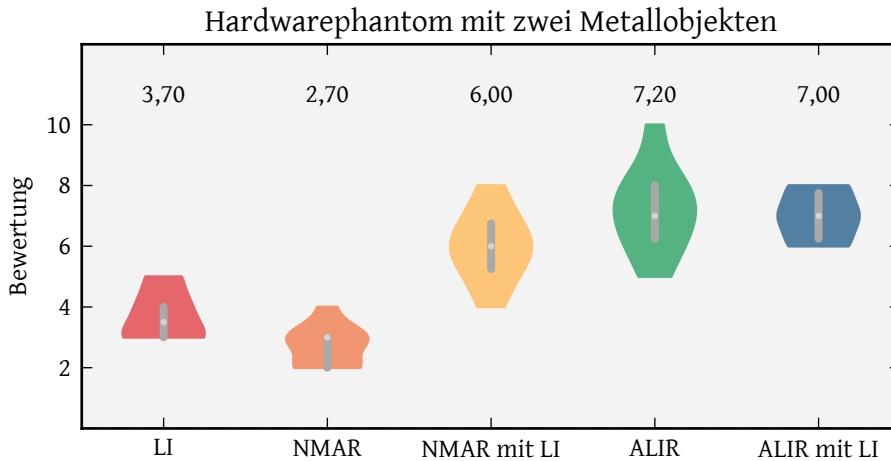


Abbildung 5.13: Violinenplot für die Evaluierungsergebnisse des Hardwarephantoms mit zwei Metallobjekten. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

wird als eine deutliche Verbesserung der Bildqualität bewertet und erhält einer Durchschnittsnote von 6,0. Nur ALIR und ALIR mit LI erhalten noch bessere Durchschnittsnoten mit 7,2 und 7,0. Dies ist mit der sehr geringen Ausprägung der neuentstandenen Streifenartefakte entlang der Metallstäbe zu begründen.

Die Auswertung der Bildqualität für das Hardwarephantom mit drei Metallstäben zeigt ein ähnliches Ergebnis. Das kaum reduzierte Beamhardening-Artefakt in der NMAR-Rekonstruktion hat auf die Bewertung der Radiologinnen und Radiologen einen negativen Effekt und erhält den niedrigsten Notendurchschnitt mit 1,8. Festzustellen ist hierbei, dass die Verteilung eine eindeutige und übereinstimmende Meinung der Experten zeigt. Das LI-Ergebnis erhält eine Durchschnittsnote von 3,4 und deutet damit auf eine gute Reduzierung der Artefakte hin. NMAR mit LI erzielt mit einer Benotung von 6,2 ein sehr gutes Ergebnis. Übertroffen wird dies durch den Durchschnittswert von 6,7 für ALIR, wobei jedoch festzustellen ist, dass die Verteilung ein deutlich größeres Spektrum abdeckt als NMAR mit LI. ALIR mit LI erhält von den Experten eine Durchschnittsbenotung von 5,2, welche ebenfalls auf eine hervorragende Reduzierung der Artefakte hinweist.

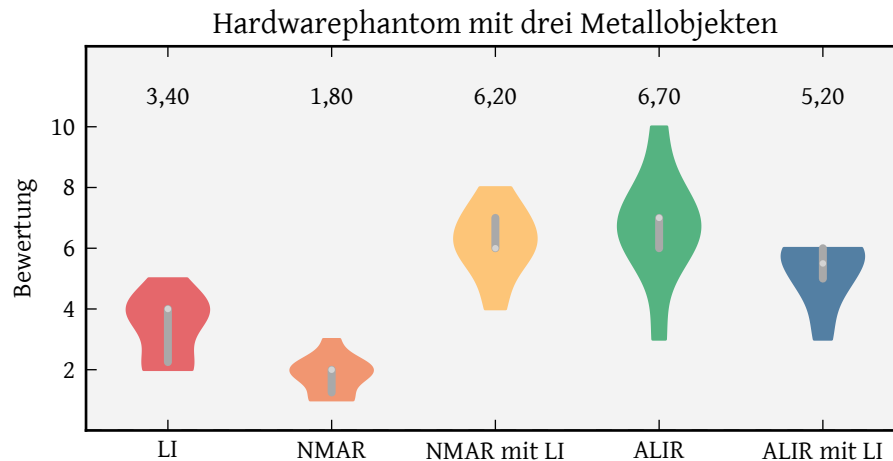


Abbildung 5.14: Violinenplot für die Evaluierungsergebnisse des Hardwarephantoms mit drei Metallobjekten. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

### 5.1.3 Evaluierung mit Hilfe von klinischen Anwendungsfällen

Im Folgenden sollen nun praxisrelevante klinische Anwendungsfälle untersucht werden. Das zuvor betrachtete Hardwarephantom ist zwar für eine detaillierte Evaluierung sehr nutzbringend, weist durch die simple physikalische Form jedoch Schwächen bezüglich der Praxisnähe auf. Dies ist insbesondere für die elaborierten Methoden NMAR und ALIR relevant, da die einfache Struktur des Phantoms der Berechnung des Hilfsbildes bzw. der Berechnung von neuen Projektionsdaten zugutekommt. Klinische Bilddaten stellen mit ihren anatomischen Strukturen und Details neue Herausforderungen an die Korrekturalgorithmen dar. Die Evaluierung der rekonstruierten Bilder wird auch hier mit der Unterstützung von Experten vorgenommen.

Bei den Patientendaten handelt es sich um Körperspender des Instituts für Anatomie, Universität zu Lübeck. Körperspender vermachen ihren Leichnam einem anatomischen Institut und ermöglichen damit die wissenschaftliche Ausbildung von Medizinstudierenden im Präparierkurs sowie der medizinischen Forschung die Durchführung von anderenfalls nicht durchführbaren Studien. Die Durchführung von computertomographischen Aufnahmen und die Verwendung der entstehenden Bilddaten bzw.

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

Rohdaten erfolgt hier unter dem Gesetz über das Leichen-, Bestattungs- und Friedhofs-wesen (Bestattungsgesetz) des Landes Schleswig-Holstein vom 04.02.2005, Abschnitt II, 9 (Leichenöffnung, anatomisch).

Alle hier vorgestellten Daten wurden mit Hilfe eines Somatom Definition AS, Siemens AG, mit einer Fächerstrahlgeometrie und einem gebogenen Detektor akquiriert. Nach Ermittlung der Rohdaten wurden diese durch Rebinning zu Daten in einer Parallelstrahlgeometrie umgewandelt (siehe hierzu Abschnitte 2.2.1). Da genaue Geometriebeschreibungen der Metallimplantate, welche sich im jeweiligen Patienten befinden, nicht vorlagen, wurde die Methode aus Abschnitt 4.1.2 gewählt, welche auf einer initialen Rekonstruktion des Bildes beruht. Für den Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  wurde im Bereich des Metallimplantates der beliebige Wert 1300 HU gewählt.

In Abbildung 5.15 sind die Rekonstruktionsergebnisse eines Patienten mit einem Knieimplantat gezeigt. In der ausgewählten Schicht befindet sich das Implantat im rechten Oberschenkelknochen (Os femoris). Die Aufnahme wurde mit 80 kVp und 100 mAs durchgeführt und zeigt in der unkorrigierten Rekonstruktion stark ausgeprägte Streifenartefakte, die hauptsächlich das rechte Bein überlagern, aber auch noch deutliche Präsenz im linken Bein aufweist. Der diagnostische Wert des Bildes ist dadurch deutlich beeinträchtigt. Eine Korrektur durch LI führt zu einer auffälligen Reduktion der Artefakte. Anatomische Details im rechten Bein können nun klar wahrgenommen werden. Bestehen bleibt jedoch ein dunkler Schatten, welcher das Metallimplantat mit dem linken Femur verbindet. NMAR ist nicht in der Lage, die starken Artefakte in der Nähe des Metallstückes zu reduzieren. Ursache dafür ist eine Fehlsegmentierung bei der Generierung des Hilfsbildes. NMAR mit LI produziert ein Ergebnis, welches der LI-Reduktion sehr ähnlich sieht. Auch hier konnten die Streifen, welche zum linken Femur hinausragen, nicht reduziert werden. Einzig ALIR und ALIR mit LI sind in der Lage, auch dieses Artefakt zu korrigieren. Bei der Rekonstruktion mit Hilfe von ALIR bleibt einzig ein zirkulärer Fehler von der Größe eines Pixels um das Metallimplantat bestehen. Für ALIR mit LI sind in der gezeigten Fensterung kaum bis keine Artefakte wahrnehmbar.

Die Evaluierung durch die Radiologinnen und Radiologen, welche in Abbildung 5.16 zusammengefasst ist, bestätigt diese Interpretation. NMAR erhält die deutlich kleinste Durchschnittsbenotung mit 2,1. LI und NMAR mit LI bekommen eine sehr ähnliche Bewertung mit 3,9 und 3,6 zugeteilt. Deutlich absetzen können sich hingegen ALIR und

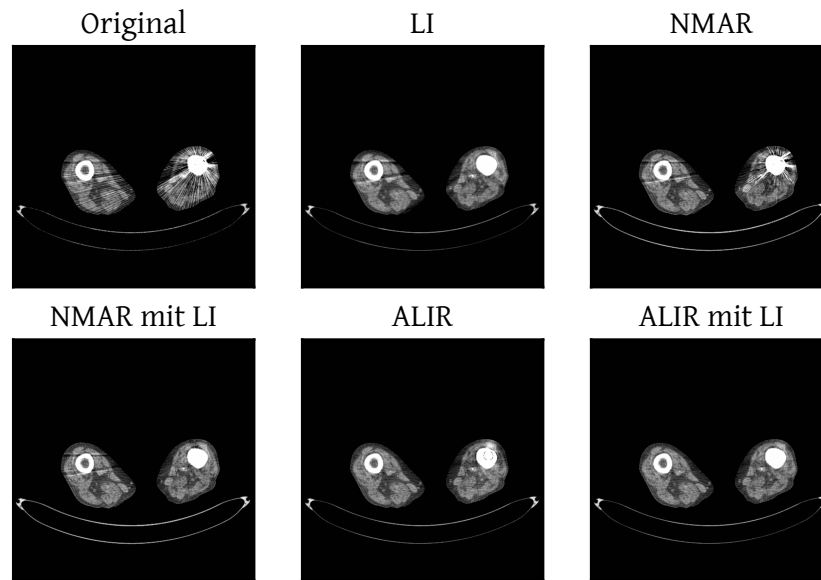


Abbildung 5.15: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für die Aufnahmen eines Patienten mit einem künstlichen Kniegelenk. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 0 \text{ HU}$ ,  $WW = 400 \text{ HU}$  dargestellt.

ALIR mit LI mit den Durchschnittsnoten 6,8 und 7,0. Diese Benotung der Experten deutet auf eine hervorragende Reduktion der Artefakte hin.

Abbildung 5.17 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse für einen Patienten mit einem künstlichen Hüftimplantat im linken Femur in einer Fensterung mit  $WL = 50 \text{ HU}$ ,  $WW = 500 \text{ HU}$ . Die Rohdaten wurden unter Verwendung von  $120 \text{ kVp}$  und  $250 \text{ mAs}$  aufgenommen. Die unkorrigierte Rekonstruktion zeigt leicht ausgeprägte Streifenartefakte, welche das gesamte Bild überlagern. Eine Korrektur mit LI führt zu einer Reduktion von schmalen Streifen, verursacht jedoch deutlich erkennbare neue Artefakte im Bild. Auffallend hierbei ist das erneute Verbindungsartefakt zum rechten Femur. Sowohl NMAR als auch NMAR mit LI sind in der Lage, die feinen Streifenartefakte zu korrigieren und den dunklen Schimmer um das Metallobjekt zu beseitigen. Lokal um das Metallobjekt ist NMAR mit LI in der Lage, mehr Artefakte zu korrigieren als NMAR. Das ALIR-Rekonstruktionsergebnis führt zur einer deutlichen Verschlechterung der Bildqualität in der Nähe des Metallobjektes. Neuentstandene Artefakte zeigen sich in breiten, hellen und dunklen Streifen. Begründet werden kann dies durch die Nichtberücksichtigung der Projektion  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  und der Form des Metallobjektes. Eine initiale

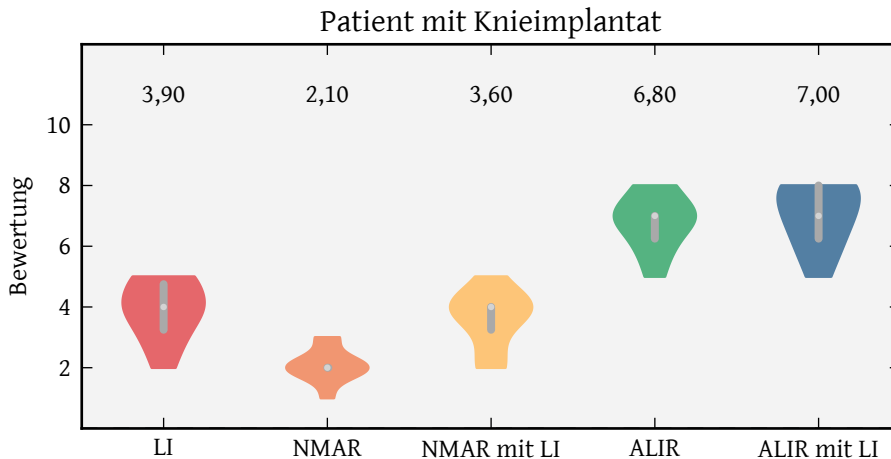


Abbildung 5.16: Violinenplot der Evaluierungsergebnisse für die Aufnahme eines Patienten mit einem künstlichen Kniegelenk. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

Berechnung von künstlichen Projektionen durch lineare Interpolation bei ALIR mit LI resultiert in einem deutlich besseren Ergebnis. Insbesondere wurden hier, neben den feinen Streifenartefakten, auch Artefakte am rechten Femur korrigiert. Dies ist den Vergleichsmethoden nicht gelungen.

In Abbildung 5.18 sind die Evaluierungsergebnisse der Radiologinnen und Radiologen graphisch zusammengefasst. Diese bestätigen den zuvor beschriebenen Eindruck. Die stark ausgeprägten Artefakte, welche von ALIR verursacht wurden, führen zu einer negativen Bewertung der Bildqualität mit einer Durchschnittsnote von -2,4. Auch das Ergebnis von LI erhält eine leicht negative Bewertung mit -0,4, wenngleich in diesem Fall die von den Experten wahrgenommene Bildqualität im Vergleich zur unkorrigierten Rekonstruktion als nahezu gleichbleibend zu interpretieren ist. NMAR und NMAR mit LI erhalten eine fast übereinstimmende Bewertung mit 2,4 und 2,7. ALIR mit LI erhält mit 4,5 eine annähernd doppelt so gute Bewertung und erzielt damit in den Augen der Experten deutlich die beste Artefaktkorrektur.

In Abbildung 5.19 sind die Rekonstruktionsergebnisse für einen Patienten mit einer zweiseitigen Totalendoprothese der Hüfte gezeigt. Die Rohdaten wurden mit 120 kVp

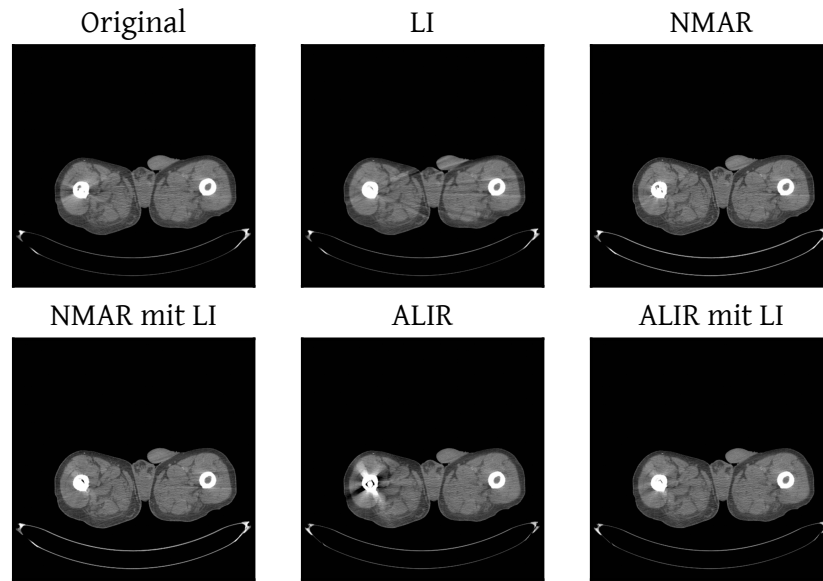


Abbildung 5.17: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für die Aufnahmen eines Patienten mit einem künstlichen Hüftimplantat. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 50 \text{ HU}$ ,  $WW = 500 \text{ HU}$  dargestellt.

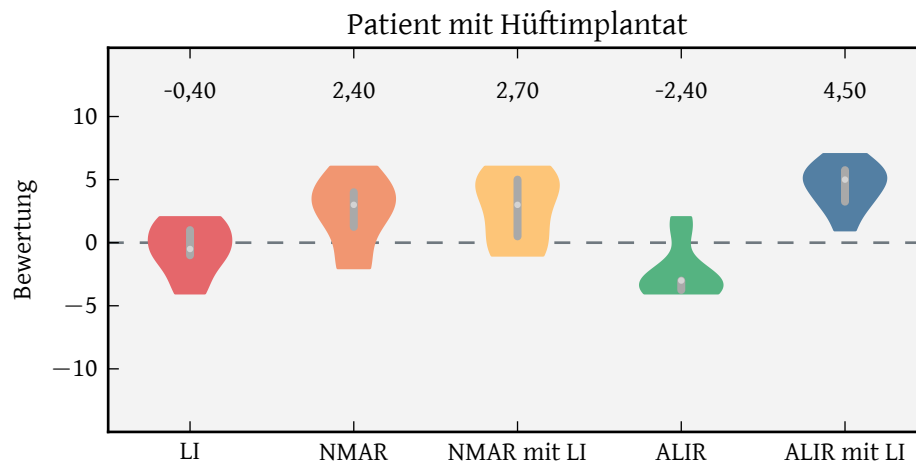


Abbildung 5.18: Violinenplot der Evaluierungsergebnisse für die Aufnahme eines Patienten mit einem künstlichen Hüftgelenk. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

und 200 mAs akquiriert. Auch hier ist ALIR, begründet durch die initiale Vernachlässigung der Metallprojektion, nicht in der Lage, die Artefakte hinreichend gut zu reduzieren. Zwar konnte das stark ausgeprägte Beamhardening-Artefakt, welches in der Original-Rekonstruktion die beiden Metallimplantate verbindet, reduziert werden, jedoch erzeugt das Verfahren dunkle und helle Schattenartefakte in der Nähe der Metallimplantate. Auch LI konnte das dunkle Beamhardening-Artefakt korrigieren, erzeugt in diesem Zusammenhang jedoch auch neue Artefakte im Bild. NMAR zeigt ein ähnliches Ergebnis, wobei neue Artefakte zumeist lokal in der Nähe der Implantate entstehen und nicht über das gesamte Bild verteilt sind. Diese lokalen Artefakte konnten durch NMAR mit LI mit Hilfe der initialen linearen Interpolation weiter reduziert werden. Horizontale Streifen ober- und unterhalb der Implantate bleiben in beiden Verfahren bestehen. Diese konnte mit ALIR mit LI sichtbar korrigiert werden, sodass nur noch wenige Artefakte in der Nähe der Metallobjekte bestehen bleiben.

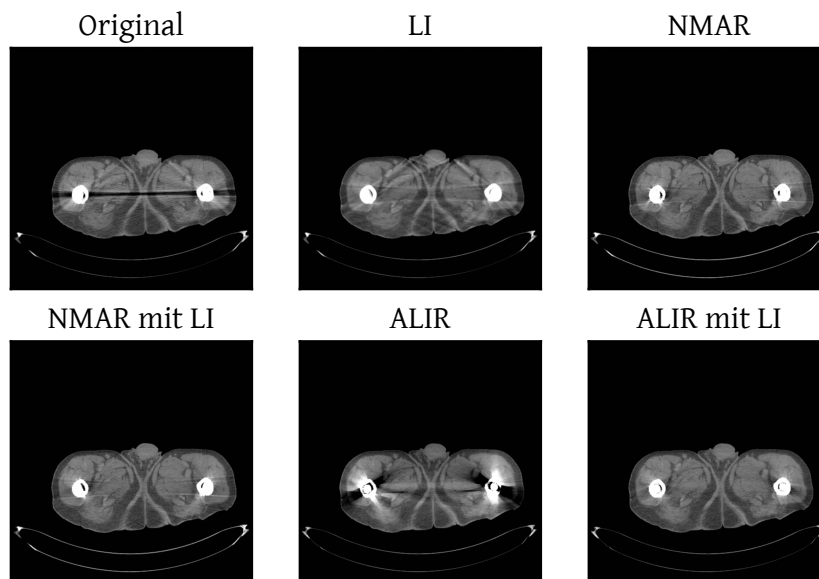


Abbildung 5.19: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für die Aufnahmen eines Patienten mit zwei künstlichen Hüftimplantaten. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 50$  HU,  $WW = 500$  HU dargestellt.

Die Radiologinnen und Radiologen bewerten die Qualität der Artefaktkorrektur von LI mit einer Durchschnittsnote von 1,8, was eine leichte Verbesserung im Vergleich zum Originalbild darstellt (siehe Abbildung 5.20). NMAR und NMAR mit LI erhalten 3,2 bzw.

3,7. Dies signalisiert bereits eine sehr solide Korrektur der Artefakte. ALIR mit LI erhält mit einer Durchschnittsnote von 5,4 die mit Abstand beste Beurteilung bezüglich der Artefaktkorrektur.

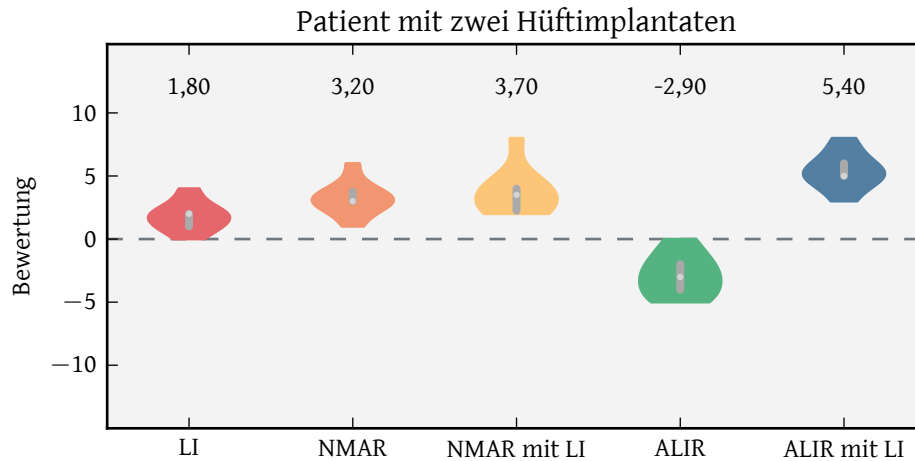


Abbildung 5.20: Violinenplot der Evaluierungsergebnisse für die Aufnahme eines Patienten mit zwei künstlichen Hüftgelenken. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

Patienten mit Amalgamfüllungen in den Zähnen sind eine besondere Herausforderung für Korrekturalgorithmen. Durch die stark abschwächenden Zähne, den vielen Knochenstrukturen und der Menge an anatomischen Details im Kopfbereich wird die Neuberechnung von sinnvollen Projektionsdaten erschwert und somit die Korrekturfähigkeit beeinträchtigt. So ist beispielsweise die ohnehin sehr approximative Abschätzung durch die lineare Interpolation hier zumeist nicht in der Lage, Artefakte hinreichend gut zu korrigieren. In Abbildung 5.21 sind die Rekonstruktionsergebnisse eines Patienten mit einer Amalgamfüllung gezeigt. Die Rohdaten wurden unter Verwendung von 120 kVp und 150 mAs gewonnen. Das unkorrigierte Bild weist dunkle Schatten- bzw. Beamhardening-Artefakte zusammen mit einem hellen Schein in der Nähe der Füllung auf. Zusätzlich gibt es eine Vielzahl an Streifenartefakten, welche in der Regel Verbindungsgraden zu stark abschwächenden Materialien darstellen. Das Rekonstruktionsergebnis, welches durch LI erzeugt wurde, ist nicht in der Lage, die vorhandenen Artefakte zu reduzieren. Vielmehr zeigt die Rekonstruktion zahlreiche neue Artefakte und

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

eine Verstärkung der bereits vorhandenen Streifen. Auch lokal um die Zahnfüllung ist ein neues dunkles Artefakt entstanden. NMAR und NMAR mit LI zeigen ein ähnliches Resultat, wobei die Streifenartefakte im hinteren Kopfbereich bei NMAR im Vergleich zu NMAR mit LI etwas reduzierter sind. Artefakte in der Nähe der Füllung zeigen sich zwar in einer anderen Form, die Ausprägung dieser bleibt allerdings vergleichbar. Einzig ALIR und ALIR mit LI sind in der Lage, die Artefakte nicht zu intensivieren. Vielmehr noch kann eine Reduktion von lokalen Artefakten wahrgenommen werden. Insbesondere ist festzustellen, dass ALIR als das einzige der untersuchten Verfahren imstande ist, den dunklen Schein um die Füllung zu korrigieren. Die Verwendung von einer initialen linearen Interpolation bei ALIR mit LI hat, anders als bei den zuvor untersuchten Anwendungsfällen, einen negativen Einfluss auf die Korrektur. Der erwähnte dunkle Schein konnte hier nicht korrigiert werden. Beide Methoden verstärken die im Originalbild vorhandenen Artefakte nicht und verursachen keine neuen Streifen im Bild.

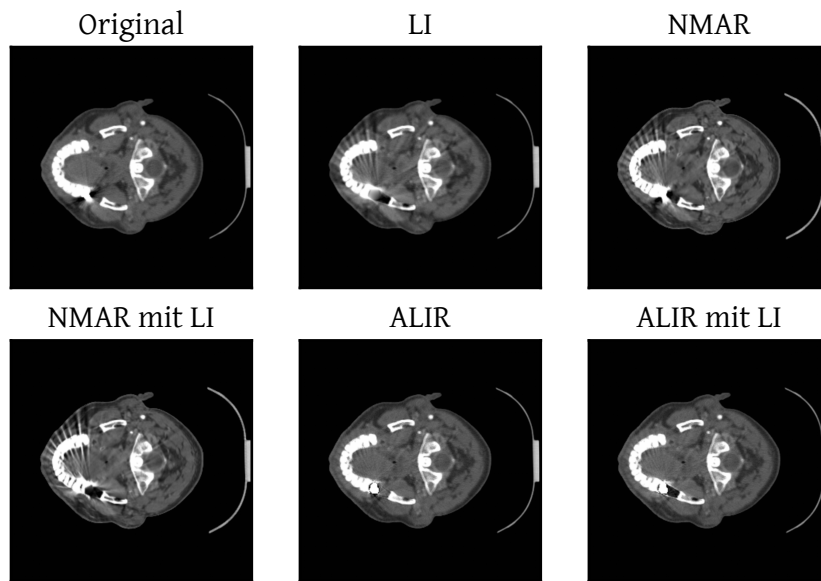


Abbildung 5.21: Ergebnisse der Artefaktkorrektur durch die verschiedenen Methoden für die Aufnahmen eines Patienten mit einer Amalgamfüllung. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 200$  HU,  $WW = 800$  HU dargestellt.

Die schlechten Korrekturergebnisse der Vergleichsmethoden spiegeln sich auch in der Bewertung der Radiologinnen und Radiologen wider. Wie der Abbildung 5.22 zu ent-

nehmen ist, bekommen sowohl LI, NMAR als auch NMAR mit LI deutlich negative Durchschnittsbewertungen mit -4,5, -4,9 und -5,6. ALIR und ALIR mit LI bekommen als einzige der untersuchten Verfahren eine positive Bewertung, was eine Korrektur der Artefakte andeutet. Hierbei bleibt jedoch festzustellen, dass ALIR mit LI mit einer Durchschnittsnote von 0,7 vielmehr auf einen Erhalt der Bildqualität im Vergleich zum Originalbild hindeutet. Die Korrektur des dunklen Scheines im Bereich des Kiefers im durch ALIR rekonstruierten Bild wird von den Radiologinnen und Radiologen als sehr positiv gewertet, sodass eine Durchschnittsnote von 2,1 erzielt werden konnte.

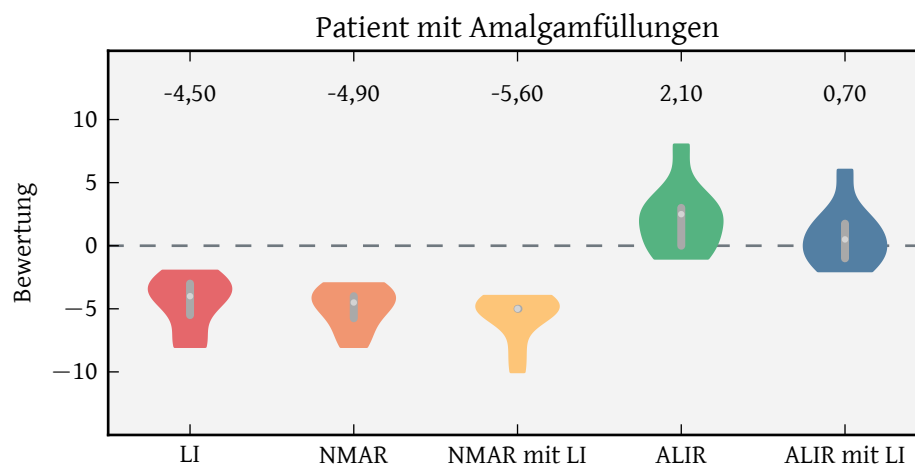


Abbildung 5.22: Violinenplot der Evaluierungsergebnisse für die Aufnahme eines Patienten mit einer Amalgamfüllung. Ein hellgrauer Punkt visualisiert den Median. Ein dicker dunkelgrauer Balken symbolisiert den Abschnitt zwischen dem ersten und dritten Quantil. Die bauchige Kurve zeigt die Dichteverteilung der Benotung. Weiter ist für jede Methode am oberen Ende der Mittelwert gegeben.

Um die Bedeutung der Metallartefaktkorrektur im klinischen Alltag herauszustellen, wird abschließend in diesem Abschnitt ein vollständiges CT-Volumen betrachtet. Abbildung 5.23 zeigt die unkorrigierten Schnittbilder eines Patienten mit einer Totalendoprothese im linken Femur. Das Volumen erstreckt sich über das kleine Becken (Pelvis minor) bis hin zum Femurschaft (Corpus femoris). Das Metallimplantat im linken Femur verursacht stark ausgeprägte Beamhardening-Artefakte, welche über das gesamte Volumen ausstrahlen. Insbesondere der Bereich des Schambeines (Symphysis pubica) und der Hüftgelenkspfanne (Acetabulum) ist hiervon betroffen. Zusätzlich ist das Vo-

## 5.1. METALLARTEFAKTKORREKTUR

lumen von hellen und dunklen Streifenartefakten überlagert. Der diagnostische Wert ist durch die entstandenen Metallartefakte entscheidend beeinträchtigt.

Datensätze wie der hier dargestellte werden im Alltag der Strahlentherapie in der Regel dafür genutzt, Therapiepläne zur Behandlung von Neoplasien zu erstellen. Geplante Dosisverteilungen basieren dabei auf den individuellen, durch die Anatomie bedingten Abschwächungskoeffizienten der Bilddaten. Hierbei werden die Schwächungswerte in speziellen Programmen (z.B. Eclipse<sup>TM</sup> von Varian Medical Systems) in Elektrendichten konvertiert, welche wiederum die Grundlage der physikalischen Bestrahlungsplanung bilden. Bei der Generierung von Therapieplänen ist es dementsprechend bedeutend, dass rekonstruierte Bilddaten korrekte HU-Werte aufweisen und nicht von Artefakten überlagert sind.

Laut einer laufenden Erfassung der Todesursachenstatistik des statistischen Bundesamts<sup>3</sup> liegt der Anteil an Todesfällen durch bösartige Neubildungen der Prostata bei Männern bei 3,1 %. Bei der potenziellen Erstellung eines Therapieplanes zur Bestrahlung der Prostata für das in Abbildung 5.23 gezeigte Volumen würden sich jedoch gleich zwei schwerwiegende Probleme ergeben. Einerseits ist das Erkennen und Segmentieren der Prostata durch die vorhandenen Artefakte stark erschwert und andererseits führen die fehlerhaft abgebildeten Schwächungswerte zu einem unpräzisen Therapieplan, welcher wiederum über den Therapieerfolg des Patienten entscheiden kann.

In Abbildung 5.24 ist der Bilddatensatz gezeigt, welcher durch ALIR rekonstruiert ist. Die Streifen- und Beamhardening-Artefakte sind merklich reduziert und es sind deutlich mehr Details der vorhandenen Anatomie erkennbar. So ist die Prostata, welche zuvor von Artefakten überlagert wurde, nun sichtbar.<sup>4</sup> Noch deutlicher wird dies im Vergleich der Frontalschnitte in Abbildung 5.25. Während im unkorrigierten Volumen eine starke Ausprägung der Artefakte dafür sorgt, dass anatomische Details in der Nähe des Implantates nicht wahrnehmbar sind, kann im korrigierten Volumen auch im Bereich des Zentrums des Beckens zwischen verschiedenen Strukturen differenziert

<sup>3</sup>Die 10 häufigsten Todesursachen bei Männern. Sterbefälle männlich nach der ICD-10 im Jahr 2015, Statistisches Bundesamt (Destatis), 2017. In [www.destatis.de](http://www.destatis.de) (Thematische Recherche: Zahlen & Fakten - Gesellschaft & Staat - Gesundheit - Todesursachen - Dokumentart: Tabelle). Abrufdatum: 19.10.2017

<sup>4</sup>Die Prostata entspricht der Ei-förmigen Struktur, welche zentral im Beckenzentrum in der zweiten Reihe von oben zu sehen ist.

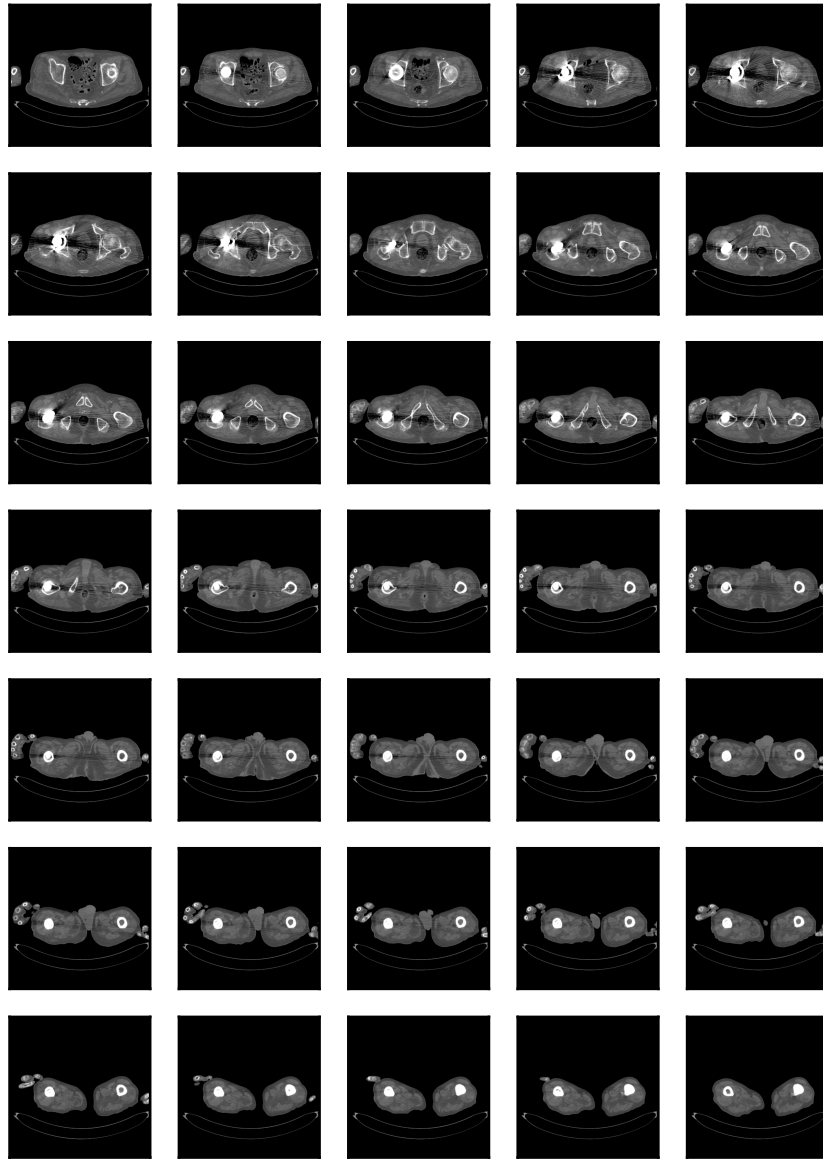


Abbildung 5.23: Unkorrigierte Originalrekonstruktion eines Bildvolumens. Die dargestellten Bilddaten zeigen einen Patienten mit einer Totalendoprothese im linken Femur bzw. Acetabulum. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 200 \text{ HU}$ ,  $WW = 1000 \text{ HU}$  dargestellt.

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

werden. Speziell die Prostata kann hier problemlos heraussegmentiert werden. Auch die umliegende Anatomie weist annähernd korrekte HU-Werte auf, was der Berechnung eines Therapieplanes zugute kommt.

Anschaulich dargestellt in Form eines dreidimensionalen Renderings sind die beiden Volumina in Abbildung 5.26. Das in Lila visualisierte Metallimplantat befindet sich im linken Femur bzw. im linken Acetabulum und verursacht im unkorrigierten Volumen Artefakte, welche über das gesamte Volumen ausstrahlen. Organstrukturen können dadurch in der hier gezeigten Transversalebene nicht wahrgenommen werden. Im durch ALIR rekonstruierten Volumen kann dahingegen der Bereich des kleinen Beckens gut ausgewertet werden. Im Speziellen kann auch hier die Prostata als blasenartige Struktur im Transversalschnitt erkannt werden.

## 5.2 Rekonstruktion korrekter Abschwächungskoeffizienten

Im vorhergehenden Abschnitt wurde untersucht, in welchem Maße der entwickelte ALIR-Algorithmus in der Lage ist, entstandene Metallartefakte zu reduzieren. Insbesondere in einer klinischen Situation ist dabei die visuelle und qualitative Evaluierung durch ausgezeichnete Experten ausschlaggebend für die Beurteilung der Korrekturfähigkeit des Verfahrens. Im Mittelpunkt der Einschätzung steht hierbei vorrangig die korrekte Rekonstruktion von anatomischen Details. Ergänzend dazu soll im Folgenden nun eine qualitative Auswertung vorgenommen werden. In dieser wird untersucht, wie exakt der Algorithmus verfälschte Abschwächungswerte wiederherstellen kann. Hierzu wird ein klinisches Kalibrierungsphantom (Gammex Electron Density CT Phantom Model 465) der Firma Radiation Measurements Inc., Middleton, USA, verwendet, welches auf der linken Seite in Abbildung 5.27 dargestellt ist. Auf der rechten Seite ist zudem eine mit Labeln versehene CT-Aufnahme des Phantoms beigefügt. Das Phantom besteht aus einer Vielzahl an verschiedenen Einsätzen, welche gewebeäquivalente Abschwächungswerte und eine bekannte Elektronendichte relativ zu Wasser, gekennzeichnet durch  $\rho_e^W$ , besitzen. Die Einsätze bilden dabei ein weites Spektrum von  $\rho_e^W = 0.292$  für Lungengewebe 300 bis  $\rho_e^W = 1.707$  für kortikalen Knochen ab. Der

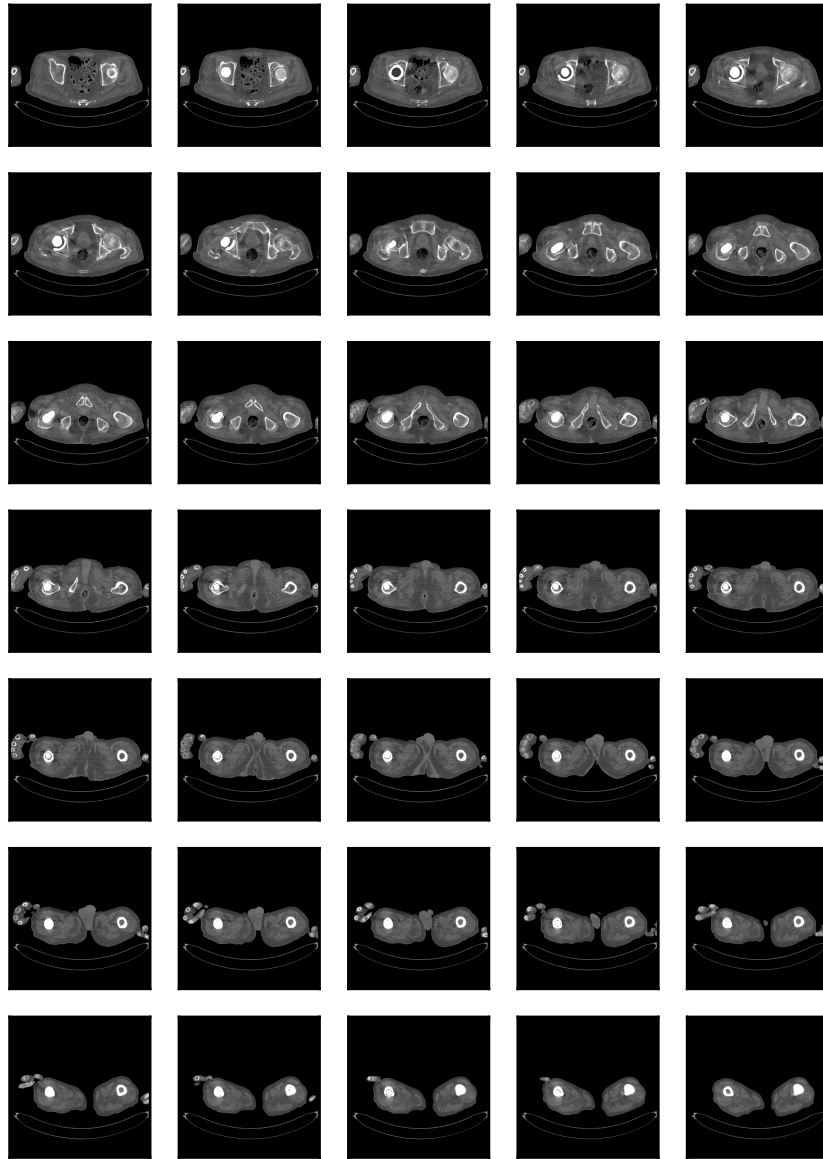


Abbildung 5.24: Ein mit Hilfe von ALIR rekonstruiertes Bildvolumen. Die dargestellten Bilddaten zeigen einen Patienten mit einer Totalendoprothese im linken Femur bzw. Acetabulum. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 200 \text{ HU}$ ,  $WW = 1000 \text{ HU}$  dargestellt.

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

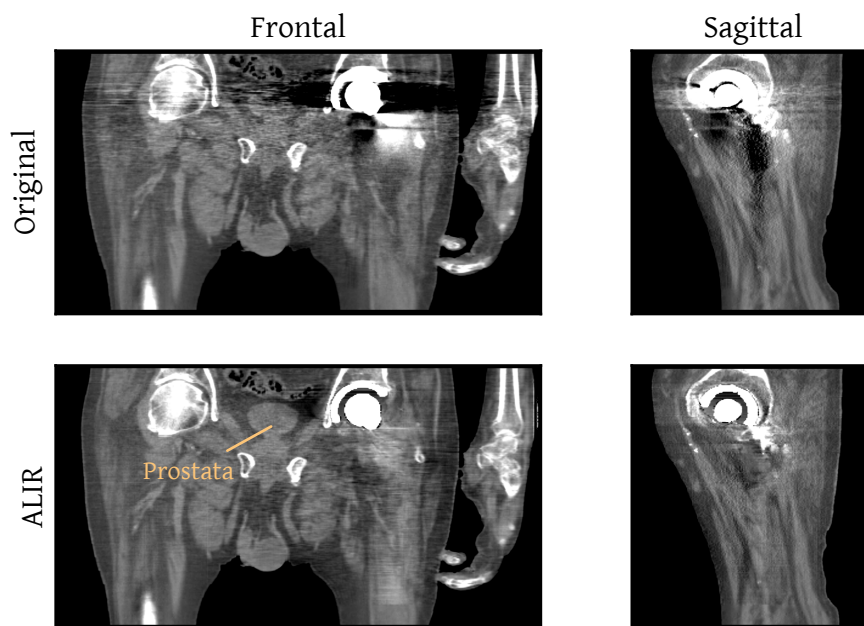
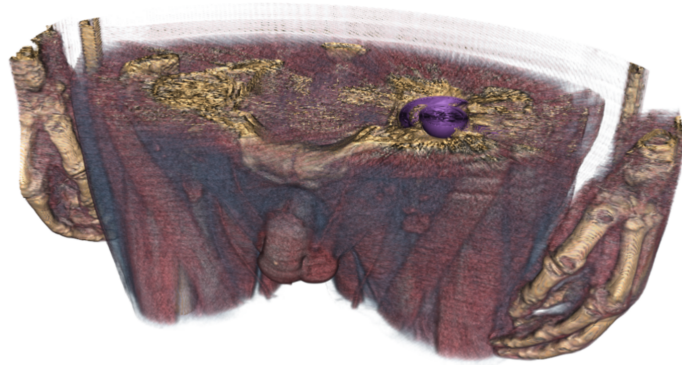


Abbildung 5.25: Frontal- und Sagittalschnitt des unkorrigierten Volumens und des Rekonstruktionsergebnisses, welches mit ALIR erzeugt wurde. Die durch die Totalendoprothese verursachten Artefakte überlagern die Organstrukturen im Zentrum des Beckens. Eine Artefaktkorrektur durch ALIR ermöglicht unter anderem die Differenzierung der Prostata in der Frontalschnittebene.

Ohne Korrektur



ALIR

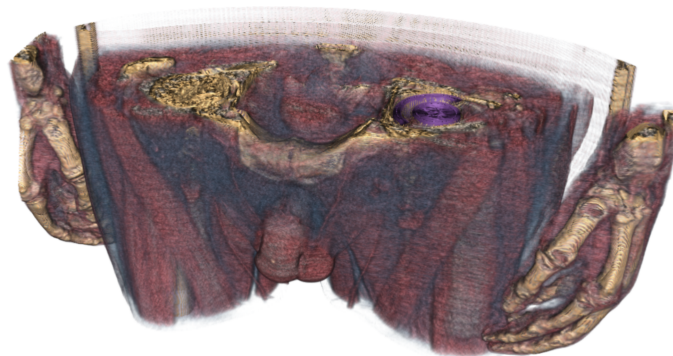


Abbildung 5.26: Dreidimensionales Rendering des unkorrigierten und des durch ALIR rekonstruierten Volumens. In Lila dargestellt ist die Totalendoprothese im linken Femur bzw. Acetabulum. Im unkorrigierten Volumen verhindern die verursachten Artefakte eine klare Differenzierung der umliegenden Anatomie. Das durch ALIR rekonstruierte Volumen bringt hingegen zuvor überlagerte Organstrukturen zum Vorschein.

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

Grundkörper des Phantoms hat einen gewebeäquivalenten Abschwächungswert von Wasser und besitzt 20 Bohrungen mit einem Durchmesser von 30 mm. Die Bohrungen können verwendet werden, um die Einsätze an verschiedene Positionen zu platzieren.

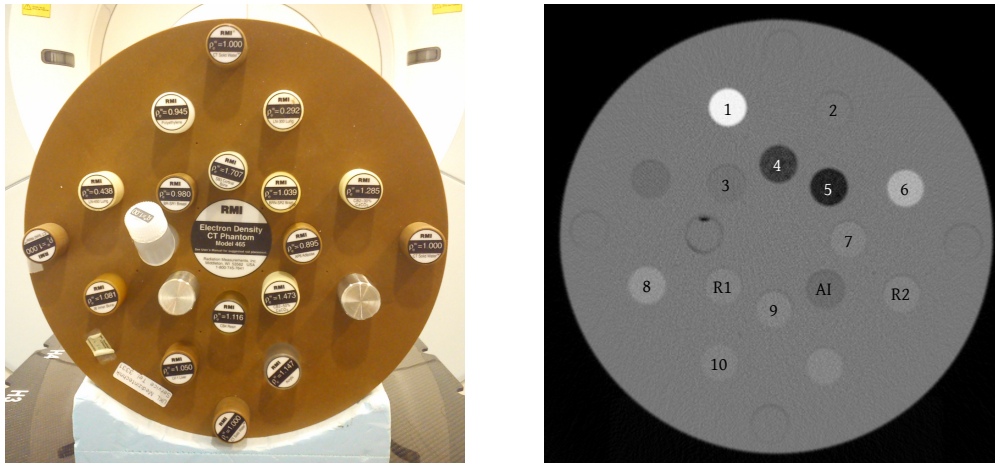


Abbildung 5.27: Foto des verwendeten Phantoms mit Metalleinsätzen. Auf der rechten Seite ist eine CT-Aufnahme des Phantoms gezeigt, welches mit Labeln für die verschiedenen gewebeäquivalenten Einsätzen versehen ist. Hierbei betitelt (1) kortikaler Knochen, (2) Gehirngewebe, (3) Brustgewebe, (4) Lungengewebe 450, (5) Lungengewebe 300, (6)  $\text{CaCO}_3$ , (7) Fettgewebe, (8) trabekulärer Knochen, (9) Knochenmineral und (10) Lebergewebe. Weiter beschreibt (R1) und (R2) die Position der Metallstäbe und (AI) die untersuchte Position.

Abbildung 5.27 zeigt neben den verschiedenen gewebeäquivalenten Einsätzen zwei gekennzeichnete Positionen R1 und R2. Diese wurden genutzt, um zwei Metallstäbe zu platzieren, die dafür sorgen, eine ähnliche Situation herzustellen, wie sie bei einer zweiseitigen Totalendoprothese vorliegt.<sup>5</sup> Da für die Position zwischen R1 und R2, gekennzeichnet durch AI, die stärkste Ausprägung der Metallartefakte zu erwarten ist, wurde diese Position genutzt, um die Wiederherstellungsfähigkeit des ALIR-Algorithmus zu untersuchen. Nacheinander wurden 10 verschiedene gewebeäquivalente Einsätze an die Position AI gesetzt, um anschließend die rekonstruierten HU-Werte von verschiedenen Rekonstruktionsalgorithmen in diesem Bereich zu analysieren. Für die Evaluierung wurden stets zwei Aufnahmen pro gewebeäquivalentem Ein-

<sup>5</sup>Um Artefakte zu vermeiden, sind in der gezeigten Abbildung die Metallstäbe durch wasseräquivalente Einsätze ersetzt worden.

satz akquiriert. Diese bestehen jeweils aus einer Aufnahme mit Stahlstäben an den Positionen R1 und R2 und einer mit wasser-äquivalenten Einsätzen. Die Aufnahmen wurden mit Hilfe eines 40-Slice Biograph mCT, Siemens AG, Erlangen, Deutschland durchgeführt, wobei das scheibenförmige Phantom mit Hilfe eines Styrodur<sup>®</sup>-Sockels im Isozentrum des Scanners platziert wurde. Der Sockel hilft, neben der korrekten Positionierung, Bewegungen beim Austausch der Einsätze zu minimieren. Die akquirierten Daten wurden mit 120 kV aufgenommen, besitzen eine Größe des Messfeldes von 500 mm und haben eine Schichtdicke von 3 mm. Für die Evaluierung wurde eine FBP-Rekonstruktion der Datensätze mit und ohne Metallstäbe erstellt. Dabei wurde letztere als Referenzbild verwendet. Neben der Rekonstruktion mit ALIR wurde zum Vergleich zusätzlich eine Korrektur durch LI durchgeführt. Für die Rekonstruktion mit ALIR wurde das Schwellwertverfahren verwendet, welches eingangs in Abschnitt 4.1.2 und Gleichung (4.2) beschrieben ist. Nach der Segmentierung der Metallobjekte wurde die Region als Vorwissen festgelegt und ein Abschwächungswert von Wasser gefordert. Nach abgeschlossener Rekonstruktion wurden die zuvor segmentierten HU-Werte für Metall wieder eingesetzt.

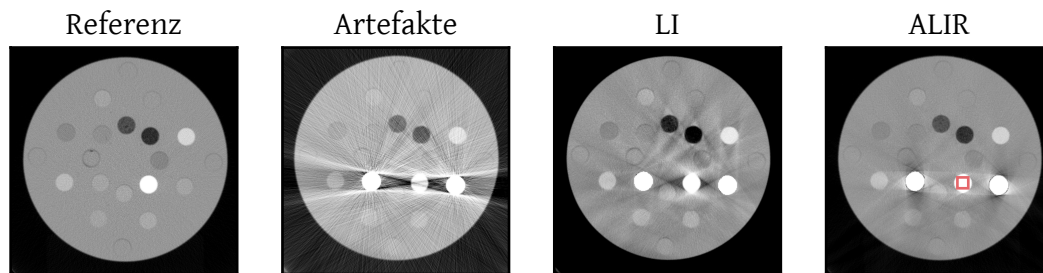


Abbildung 5.28: Rekonstruktionen und Korrekturergebnisse für den Einsatz mit dem gewebeäquivalenten Abschwächungswert für kortikalen Knochen an Position AI. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 0$  HU,  $WW = 2000$  HU dargestellt. Das rote Quadrat zeigt den Bereich, welcher für die Evaluierung genutzt wurde.

In Abbildung 5.28 und 5.29 sind beispielhaft die Rekonstruktionsergebnisse für die Einsätze gezeigt, welche eine gewebeäquivalenten Abschwächungswert von kortikalen Knochen und Fettgewebe besitzen. In beiden Beispielen ist deutlich zu erkennen, dass in der artefaktbehafteten Rekonstruktion die Ausprägung der Artefakte an der Position AI am stärksten ist. Demzufolge ist hier die größte Abweichung der rekonstruierten

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

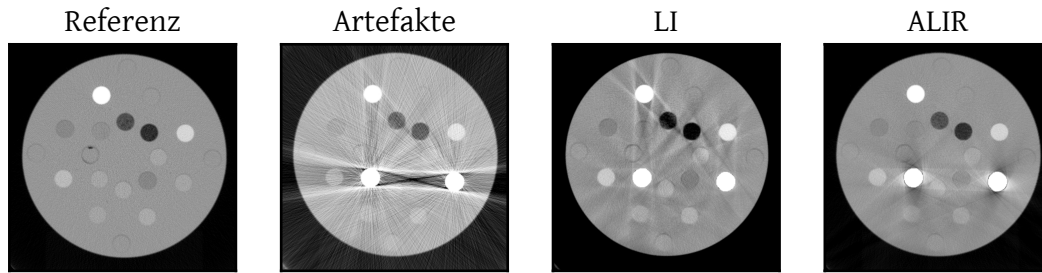


Abbildung 5.29: Rekonstruktionen und Korrekturergebnisse für den Einsatz mit dem gewebeäquivalenten Abschwächungswert für Fettgewebe an Position AI. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $WL = 0$  HU,  $WW = 2000$  HU dargestellt.

HU-Werte zu erwarten. Neben dem deutlich sichtbaren Beamhardening-Artefakt sind eine hohe Anzahl an Streifenartefakten über dem gesamten Bild verteilt. Die Korrektur durch LI erzielt ein Ergebnis, welches weniger Streifenartefakte aufweist, jedoch eine Reihe von neuen Verbindungsartefakten zu verschiedenen Einsätzen zeigt. In Abbildung 5.28 bleiben noch klar zu erkennende Schattenartefakte in der Nähe der Position AI zurück. Anders verhält sich dies in Abbildung 5.29; hier konnte dieser Bereich gut rekonstruiert werden. Auffallend negativ sind hier jedoch die zurückbleibenden Verbindungsartefakte an Position 1 (vergleiche Abbildung 5.27). Die durch ALIR rekonstruierten Bilder weisen untereinander eine annähernd gleiche Bildqualität bezüglich der Korrektur auf. Streifen- und Beamhardening-Artefakte konnten zu einem sehr großen Maß unterdrückt werden. Einzig schwach ausgeprägte Verbindungsartefakte zwischen den Metallstäben sowie Schattenartefakte in deren Nähe bleiben zurück. Der Einsatz an Position AI ist in beiden Ergebnissen, sowohl in Form als auch Intensität, sehr gut erkennbar.

In Abbildung 5.28 ist im ALIR-Ergebnis durch ein rotes Quadrat der Bereich gezeigt, welcher zur Evaluierung der rekonstruierten HU-Werte dient. Der Bereich umfasst  $16 \text{ Pixel} \times 16 \text{ Pixel}$ , was einer Größe von  $16,38 \text{ mm} \times 16,38 \text{ mm}$  entspricht. Nachdem in allen vorhandenen Datensätzen dieser Bereich festgelegt wurde, konnte jeweils der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet werden. In Tabelle 5.2 sind die Mittelwerte für alle Datensätze gegeben. Die Standardabweichung der verschiedenen Rekonstruktionsergebnisse ist in Tabelle 5.3 zusammengetragen. Ergänzend dazu ist in Abbildung 5.30 eine graphische Zusammenfassung der Ergebnisse gezeigt. Wie aus den sehr stark ausgeprägten Artefakten in den Beispielrekonstruktionen bereits abzuleiten

KAPITEL 5. DURCHGEFÜHRTE STUDIEN UND ERGEBNISSE

Gewebeklasse	$\rho_e^W$	$\mu_{\text{ref}} / \text{HU}$	$\mu_{\text{metal}} / \text{HU}$	$\mu_{\text{LI}} / \text{HU}$	$\mu_{\text{ALIR}} / \text{HU}$
Lungengewebe 300	0,292	-700,6	-1148,0	-554,8	-578,1
Lungengewebe 450	0,450	-507,1	-1011,0	-426,1	-428,2
Fettgewebe	0,895	-107,7	-645,2	-41,8	-36,6
Brustgewebe	0,980	-46,2	-604,4	-16,0	21,1
Wasser	1,000	4,5	-548,6	-28,9	62,6
Gehirngewebe	1,039	16,2	-611,1	93,3	73,0
Lebergewebe	1,050	89,5	-487,1	42,1	135,8
Knochenmineral	1,070	240,7	-359,9	190,1	270,7
trabekulärer Knochen	1,081	249,8	-348,2	194,5	273,1
CaCO <sub>3</sub>	1,285	881,3	197,1	690,5	902,2
kortikaler Knochen	1,707	1336,0	541,5	1075,6	1331,0

Tabelle 5.2: Mittelwert  $\mu$  an Position AI für alle gewebeäquivalenten Einsätze für den Referenzdatensatz, die unkorrigierten Rekonstruktionen, LI und ALIR.

war, sind die Mittelwerte  $\mu_{\text{metal}}$  der unkorrigierten Bilder sehr weit entfernt von den korrekten HU-Werten, welche sich aus den  $\rho_e^W$ -Angaben des Herstellers (Gammex Electron Density CT Phantom Model 465, Radiation Measurements Inc., Middleton, USA, siehe Tabelle 5.2) ergeben. Das deutlich hervortretende Beamhardening-Artefakt sorgt hier stets für einen zu kleinen Wert. Die LI-rekonstruierten Bilder erreichen Werte, welche deutlich näher an den Referenzwerten liegen. So konnte ein minimaler Fehler von 30,10 HU für den Einsatz mit einem gewebeäquivalenten Abschwächungswert für Brustgewebe erreicht werden. Die größte Abweichung wird bei kortikalem Knochen mit 260,40 HU verursacht. Die durch ALIR rekonstruierten Daten weisen Mittelwerte auf, welche sehr nahe an die Referenzwerte heranreichen. Insbesondere bei Einsetzen mit einem hohen  $\rho_e^W$ -Wert konnten die Abschwächungskoeffizienten sehr akkurat wiederhergestellt werden. So sind die verursachten Fehler zumeist kleiner als die Standardabweichung in den korrespondierenden Referenzbildern. Der kleinste Fehler in den ALIR-Rekonstruktionen wird für kortikalen Knochen mit nur 5 HU verursacht. Die größte Abweichung ist bei dem Einsatz für Lungengewebe 300 zu finden und beträgt 122,50 HU.

Die berechneten Standardabweichungen, welche in Tabelle 5.3 zusammengefasst sind, zeigen ein sehr interessantes Bild. Während das Spektrum für die unkorrigierten Bilder mit Werten zwischen 340 HU und 420 HU erwartungsgemäß sehr groß ausfällt, kann-

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

Gewebeklasse	$\rho_e^W$	$\sigma_{\text{ref}} / \text{HU}$	$\sigma_{\text{metal}} / \text{HU}$	$\sigma_{\text{LI}} / \text{HU}$	$\sigma_{\text{ALIR}} / \text{HU}$
Lungengewebe 300	0,292	79,4	418,8	52,2	55,6
Lungengewebe 450	0,450	79,0	411,8	52,4	58,5
Fettgewebe	0,895	70,7	379,2	44,3	48,4
Brustgewebe	0,980	73,5	386,8	44,1	48,4
Wasser	1,000	72,6	409,4	44,6	47,2
Gehirngewebe	1,039	72,8	383,5	43,3	45,6
Lebergewebe	1,050	69,2	385,1	45,6	55,2
Knochenmineral	1,070	86,4	376,9	49,8	53,1
trabekulärer Knochen	1,081	84,0	376,8	45,5	33,6
CaCO <sub>3</sub>	1,285	91,6	383,6	59,2	51,3
kortikaler Knochen	1,707	105,0	342,4	64,4	67,8

Tabelle 5.3: Standardabweichung  $\sigma$  an Position AI für alle gewebeäquivalenten Einsätze für den Referenzdatensatz, die unkorrigierten Rekonstruktionen, LI und ALIR.

ten sowohl LI als auch ALIR Standardabweichungen erzielen, die kleiner als die Referenzwerte sind. Dies gibt Grund zur Annahme, dass beide Korrekturverfahren in der Lage sind, den Rauschlevel nicht nur im Vergleich zum artefaktbehafteten Bild, sondern auch im Verhältnis zum Referenzbild zu reduzieren. Bei den Rekonstruktionen mit LI kommt dieses Ergebnis jedoch mit einem negativen Effekt. In allen rekonstruierten Bildern erscheint der Gesamteindruck sehr verschwommen. Dies beinhaltet nicht nur eine Glättung in homogenen Bereichen, sondern auch eine deutliche Entschärfung der Kanten.

Um diesen Aspekt weiter zu untersuchen und zu prüfen, ob die Form der Einsätze nach einer Korrektur exakt rekonstruiert werden kann, werden Profile durch einen Einsatz an Position AI betrachtet. Da trotz des Styrodur<sup>®</sup>-Sockels kleine Bewegungen des Phantoms beim Montieren der Metallstäbe nicht zu vermeiden sind, wurden die rekonstruierten Bilder mit Hilfe einer affinen Registrierung einander angeglichen. Durch die resultierende Positionsgleichheit der Bilder wird ein sinnvoller Vergleich von Profilverläufen ermöglicht. Abbildung 5.31 zeigt einen Bildausschnitt für die Rekonstruktionen mit dem gewebeäquivalenten Einsatz für kortikalen Konchen an Position AI. Ergänzend zu den Rekonstruktionen wurden die Differenzen zum Referenzbild berechnet. Diese geben Rückschlüsse auf die korrekte Übereinstimmung der Form des Einsatzes. Zusätzlich dient ein horizontales und vertikales Profil durch den Einsatz zur

## KAPITEL 5. DURCHGEFÜHRTE STUDIEN UND ERGEBNISSE

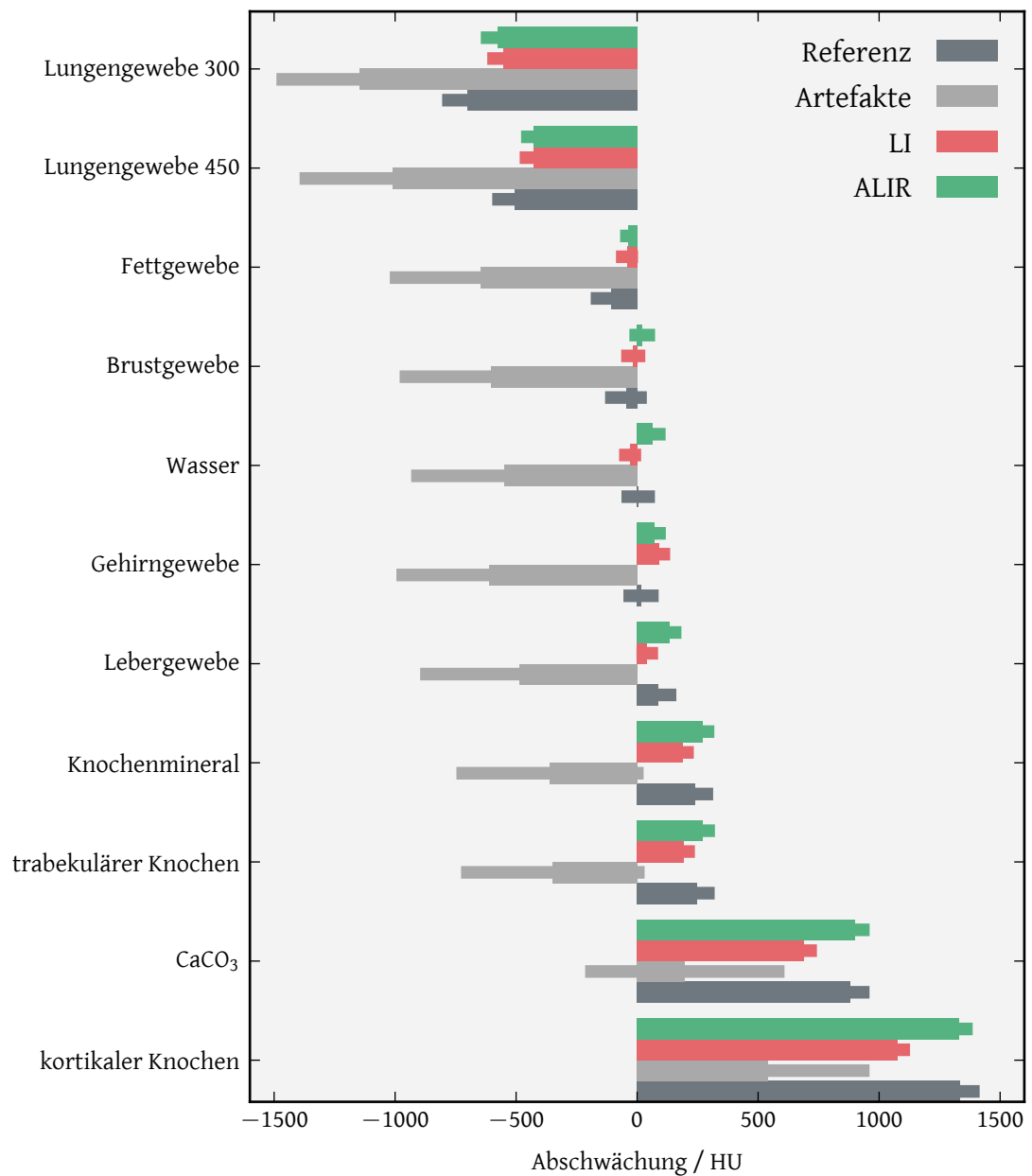


Abbildung 5.30: Balkendiagramm für die Abschwächungswerte der verschiedenen gewebeäquivalenten Einsätze und Rekonstruktionsverfahren. Breite Balken visualisieren den Mittelwert. Die darauf aufgesetzten schmalen Balken zeigen die Standardabweichung.

## 5.2. REKONSTRUKTION KORREKTER ABSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENTEN

Überprüfung der korrekten Formerhaltung. Der Verlauf der Profile ist in dem betrachteten Bereich (ROI, engl. region of interest) durch rote Linien dargestellt. Durch die stark ausgeprägten Artefakte in der unkorrigierten Rekonstruktion zeigen die korrespondierenden Profile einen nahezu beliebigen Verlauf. Speziell das vertikale Profil gibt kein Indiz auf eine kreisförmige Form und weicht vom Verlauf des Referenzprofils deutlich ab. Auch das horizontale Profil weist einen Abfall der Abschwächung auf, welche die Referenzwerte nicht widerspiegeln. Deutlich zu sehen ist dies auch im Differenzbild, welches von Artefakten und Rauschen dominiert wird. Die Form des Einsatzes ist hier nur zu erahnen. Nach einer Rekonstruktion mit LI zeigt sich ein stark verbessertes Bild, sodass die Form, wenn auch noch eher oval als kreisrund, erkannt werden kann. Ein klarer Versatz der rekonstruierten Werte im Profil deutet jedoch auf eine Abweichung der Kantenposition hin. Noch drastischer ist dies im vertikalen Profil von LI zu sehen, in welchem keine Kante zu erkennen ist. An Stelle dessen ist ein weicher Übergang von kortikalem Knochen zum Abschwächungswert von Wasser zu finden. Das berechnete Differenzbild bestätigt diesen Eindruck und zeigt einen großen Fehler entlang des Umrisses des Einsatzes. Neu entstandene Artefakte sind noch deutlich wahrnehmbar. Dem gegenübergestellt ist die Rekonstruktion durch ALIR, welche durch eine gute Korrektur der Artefakte sehr nahe an die Referenzdaten herankommt. Das horizontale Profil verläuft fast exakt entlang des Referenzprofils. Neben einer guten Übereinstimmung der Kanten kann hier auch ein deutlich glatterer Verlauf der Kurve wahrgenommen werden. Begründet ist dies durch das reduzierte Rauschverhalten des Bildes (siehe auch Tabelle 5.3). Das vertikale Profil zeigt leichte Abweichungen in Form eines örtlichen Versatzes der Kanten. Basierend auf dem Differenzbild für ALIR ist im Allgemeinen jedoch eine sehr gute Rekonstruktion der Form des Einsatzes festzustellen.

Für die Evaluierung eines Korrekturalgorithmus ist es wichtig, dass nicht nur die entstandenen Artefakte lokal korrigiert werden, sondern auch die Bildqualität und Schärfe abseits der Artefakte erhalten bleibt. Um diesen Aspekt zu evaluieren, wird ein horizontales Profil durch die Einsätze Lungengewebe 300 an Position 5 und  $\text{CaCO}_3$  an Position 6 betrachtet. Abbildung 5.32 zeigt den analysierten Bereich. Das Profil, welches dem unkorrigierten Bild entnommen ist, ist an einem Versatz von etwa 300 HU zu erkennen. Die Artefakte im Bild zeigen sich hier durch eine Vielzahl an Ausschlägen. Zusammen mit dem vorhandenen Rauschen resultiert dies in eine unstetige Kurve. Die Position

KAPITEL 5. DURCHGEFÜHRTE STUDIEN UND ERGEBNISSE

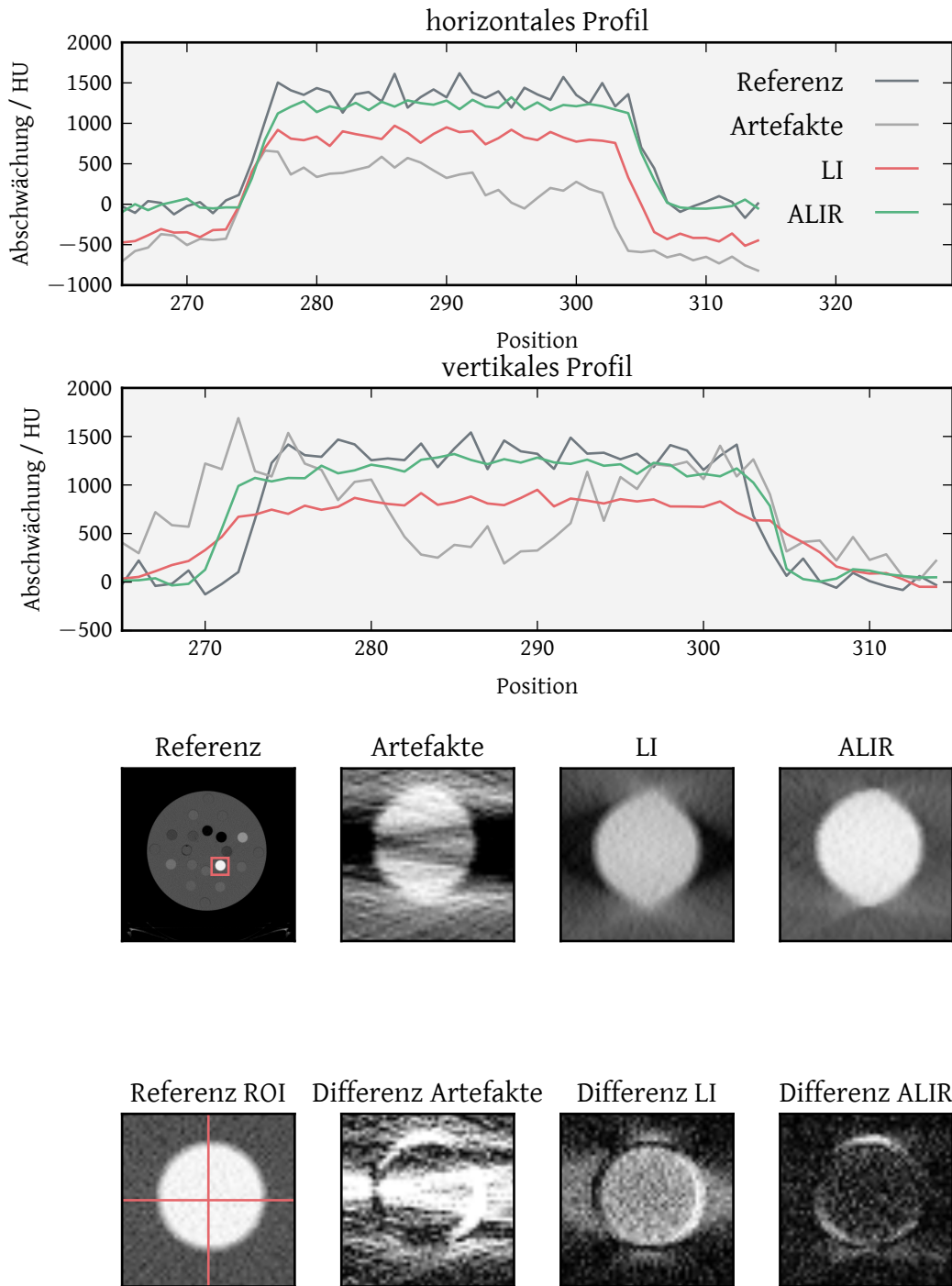


Abbildung 5.31: Horizontales und vertikales Profil durch den gewebeäquivalenten Einsatz für kortikalen Knochen an der Position AI. Das rote Quadrat im Referenzbild zeigt die untersuchte Region. Die Differenzbilder ergeben sich durch eine Subtraktion des Referenzbildes mit der jeweiligen Rekonstruktion.

der Kanten, welche den Übergang der verschiedenen Einsätze zum Grundkörper signalisieren, ist nicht zu erkennen. Diese Kanten sind im LI-Profil hingegen zwar gut zu erkennen, stellen aber vielmehr einen weichen Übergang der Abschwächungswerte dar. Weiter führt die Rekonstruktion durch LI zu einem sehr glatten Profil, welches ein deutlich reduziertes Rauschen aufweist. Gut zu erkennen ist dies auch im Ausschnitt des rekonstruierten Bildes, welches im Vergleich zum Referenzbild deutlich weicher in der allgemeinen Wahrnehmung ist. Das Profil, welches zum ALIR-rekonstruierten Bild korrespondiert, zeigt einen Verlauf, der dem Referenzprofil sehr nahe kommt. Im Speziellen sind die Ausprägung und Position der Kanten gut repräsentiert. Zusätzlich kann auch hier eine im Vergleich zum Referenzbild und insbesondere im Vergleich zum unkorrigiertem Bild deutliche Reduzierung des Rauschens beobachtet werden. Dies bestätigt die Interpretation der reduzierten Standardabweichung für Position AI. Um die Schärfe der Kanten im Bild zu evaluieren, wird für das betrachtete Profil der Gradient herangezogen. Da das Profil für die Artefakte sehr stark oszilliert, wurde der Gradient hier nicht betrachtet. Die stärksten Ausschläge für Referenz-, LI- und ALIR-Profil visualisieren hingegen sehr gut die Position der jeweiligen Kante. Hierbei ist festzustellen, dass die Ausprägungen für das Referenzbild am stärksten sind. Mit Ausnahme der Kante an Position 275 zeigt der Gradient für das ALIR-Profil eine sehr ähnliche Manifestation. Der Gradient für das LI-Profil zeigt hingegen für alle Kantenpositionen die niedrigsten Ausschläge, was die allgemeine Wahrnehmung von einer weichen Kantendarstellung bestätigt.

### 5.3 Nicht-lokale Regularisierung

Um die in Abschnitt 5.3 vorgestellte nicht-lokale Regularisierung in Verbindung mit ALIR zu evaluieren, wird ein Softwarephantom betrachtet, welches mit Hilfe der XCAT-Software erstellt wurde [148]. Verwendet werden hier zwei verschiedene Transversalschnitte, welche sich im Bereich des Beckengürtels befinden und einen Abstand von 2 cm besitzen. In Abbildung 5.33 sind die beiden Schichten gezeigt. Auf der linken Seite befindet sich das zu rekonstruierende Bild, welchem, angelehnt an die Situation in Abbildung 5.25, künstlich ein Metallobjekt in den linken Femur hinzugefügt wurde. Dieses wird im Rahmen der Rekonstruktion mit ALIR als Vorwissen definiert. Der Prior wurde leicht rotiert und translatiert, um eine realistische Situation zu schaffen, wie

KAPITEL 5. DURCHFÜHRTE STUDIEN UND ERGEBNISSE

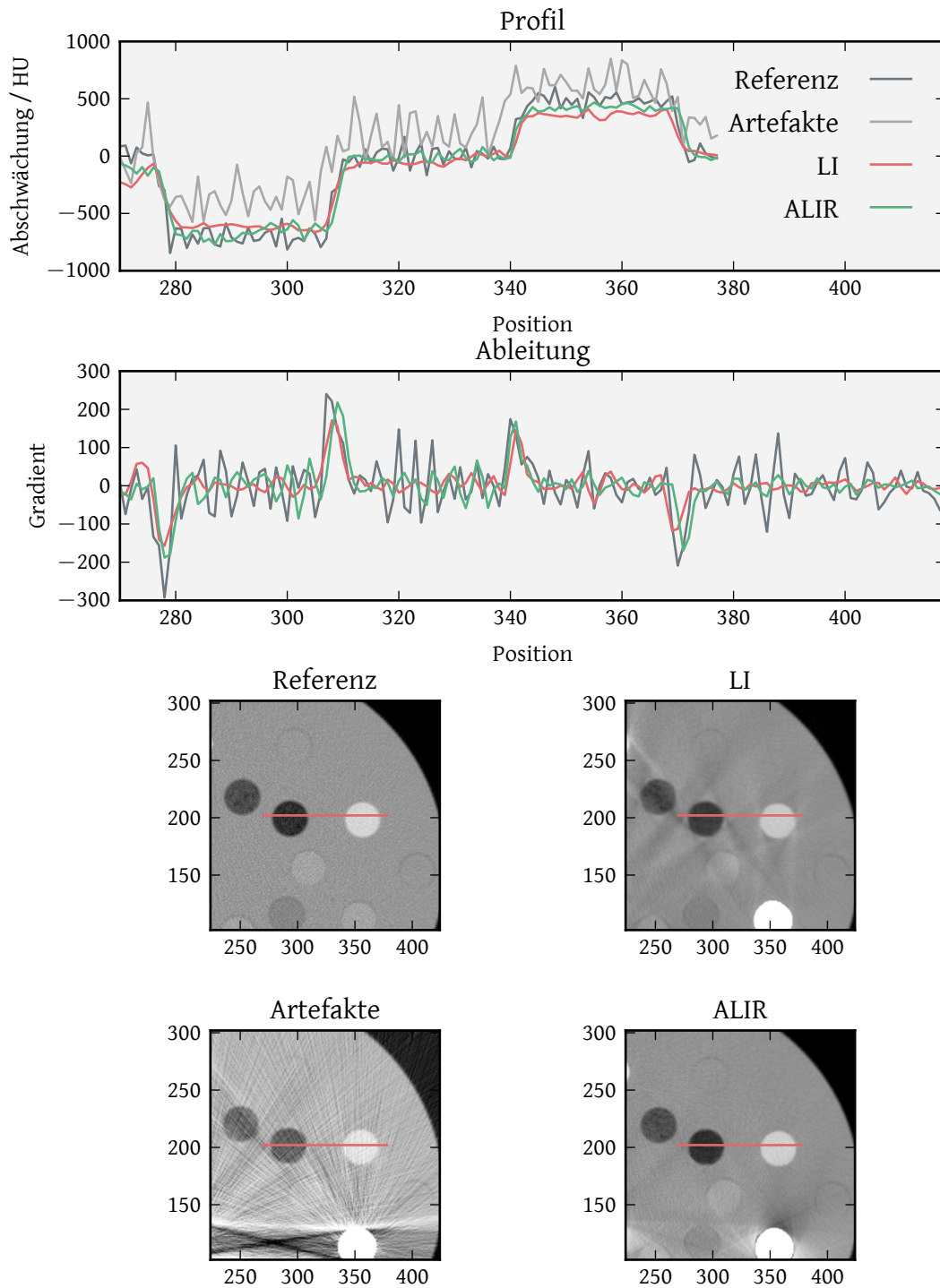


Abbildung 5.32: Horizontales Profil durch Position 5 (Lungengewebe 300) und Position 6 ( $\text{CaCO}_3$ ) zusammen mit dem dazugehörigen Gradienten. Die rekonstruierten Bilder sind in einer Fensterung mit  $\text{WL} = 0 \text{ HU}$ ,  $\text{WW} = 2000 \text{ HU}$  dargestellt.

sie etwa bei einer Verlaufskontrolle vorliegt. Das Differenzbild auf der rechten Seite zeigt die Subtraktion des Priors vom Ground-Truth-Bild. Anatomische Unterschiede sind insbesondere im Bereich der Hüftknochen und in der Struktur des Weichteilgewebes zu erkennen.

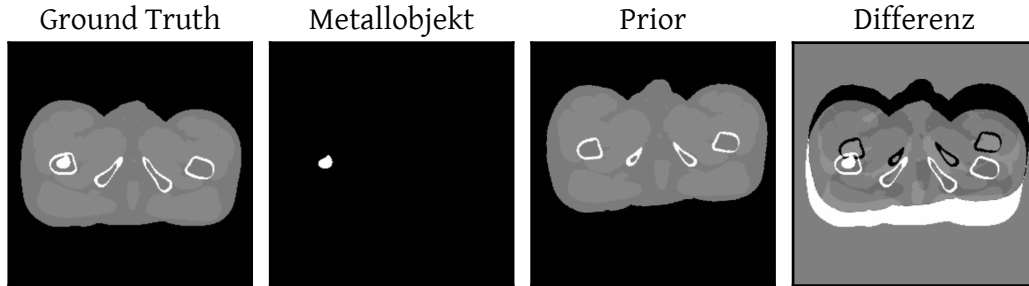


Abbildung 5.33: Das verwendete XCAT-Phantom. Von links nach rechts: Ground-Truth-Bild, künstlich hinzugefügtes Metallobjekt, gegebener Prior und die Differenz zwischen Prior und Ground-Truth-Bild. Der Prior befindet sich etwa 2 cm proximal vom Ground-Truth-Bild.

Für die Initialisierung der Rekonstruktionsalgorithmen wurde zunächst eine Vorwärtsprojektion des Ground-Truth-Bildes durchgeführt. Anschließend wurden alle Projektionen, welche durch das Metallobjekt verlaufen, aus den Rohdaten entfernt. Eine Rekonstruktion ohne diese Daten führt zu ausgeprägten Streifenartefakten ausgehend von der Position des Metallobjektes. Die Rekonstruktion durch ALIR mit nicht-lokaler Regularisierung konvergiert nach 19 Iterationen. In Abbildung 5.34 sind ausgewählte Zwischenergebnisse der Rekonstruktion gezeigt. Die erste Zeile zeigt den Fortschritt der Iteration in Form des Bildes  $\mathbf{f}^{(k)}$ . Zu erkennen ist der typische Übergang von einem sehr weichen und verschwommenen Bild hin zu einem scharfen, gut definierten Endergebnis. Deutlich zu sehen ist die stetige Reduktion der Artefakte zwischen den Iterationen. In der zweiten Zeile ist der Prior nach durchgeführter Registrierung mit dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  gezeigt. Die aus der Registrierung resultierenden Parameter für die verwendete affine Registrierung sind in Tabelle 5.4 gegeben. Die Parameter beziehen sich auf die Gleichung 4.44, wobei für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  aus Gleichung 3.123 gilt, dass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$
1	1,00	$7,44 \cdot 10^{-2}$	$-7,95 \cdot 10^{-2}$	1,00	3,55	$-2,22 \cdot 10^1$
2	1,00	$7,48 \cdot 10^{-2}$	$-7,89 \cdot 10^{-2}$	1,00	3,55	$-2,22 \cdot 10^1$
5	1,00	$7,49 \cdot 10^{-2}$	$-7,96 \cdot 10^{-2}$	1,00	3,55	$-2,21 \cdot 10^1$
13	1,00	$7,54 \cdot 10^{-2}$	$-7,81 \cdot 10^{-2}$	1,00	3,52	$-2,22 \cdot 10^1$

Tabelle 5.4: Parameter der affinen Registrierung in der nicht-lokalen Regularisierung für verschiedene Iterationen.

Die Werte unterscheiden sich in den fortlaufenden Iterationen nur gering, was auf ein gutes Konvergenzverhalten mit einem eindeutigen Ergebnis schließen lässt. Bestätigt wird dies durch die Differenzbilder zwischen dem registrierten Prior und dem Ground-Truth-Bild. Hier kann eine sehr gute Überlappung der Anatomie festgestellt werden, wobei Unterschiede nur in den vorliegenden Variationen der anatomischen Details zu sehen sind. Wie in Abschnitt 5.3 bereits angemerkt, würde eine lokale Bestrafung der Pixelunterschiede zum Prior nun dazu führen, dass die anatomischen Details aus dem Prior in das zu rekonstruierende Bild übertragen werden. Dies sollte bei einer sinnvollen Regularisierung jedoch vermieden werden. In der vierten Reihe ist das durch die nicht-lokale Regularisierung neu berechnete, künstlich hergestellte Prior-Bild zu sehen. Nach und nach werden in jedem Iterationsschritt immer mehr hinreichend große Ähnlichkeiten zwischen dem Bild  $\mathbf{f}^{(k)}$  und dem registrierten Prior gefunden, sodass sich ein Bild zusammensetzt, welches sich dazu eignet, die Differenz der Pixelwerte zu bestrafen (vergleiche Gleichung 4.42 und 4.43). Entscheidend hierbei ist der Unterschied zum Ground-Truth-Bild, welcher in der letzten Reihe in Abbildung 5.34 gezeigt ist. Die berechnete Differenz betrachtet nur Pixelpositionen, für welche der neu berechnete Prior nicht Null ist. Dies ist sinnvoll, da ausschließlich diese Positionen für die Regularisierung herangezogen werden. Deutlich zu erkennen ist, dass gerade im Vergleich zum Differenzbild zwischen dem gegebenem Prior und dem Ground-Truth-Bild, welches in der dritten Reihe gezeigt ist, kaum Unterschiede vorliegen. Die in den ersten Iterationen vorliegenden Differenzen an den Kanten der anatomischen Strukturen, welche durch das noch unscharfe Bild  $\mathbf{f}^{(k)}$  hervorgerufen werden, verschwinden immer mehr. Ab Iteration 13 können nur noch vereinzelt Pixelpositionen, welche sich vom Ground-Truth-Bild unterscheiden, gefunden werden.

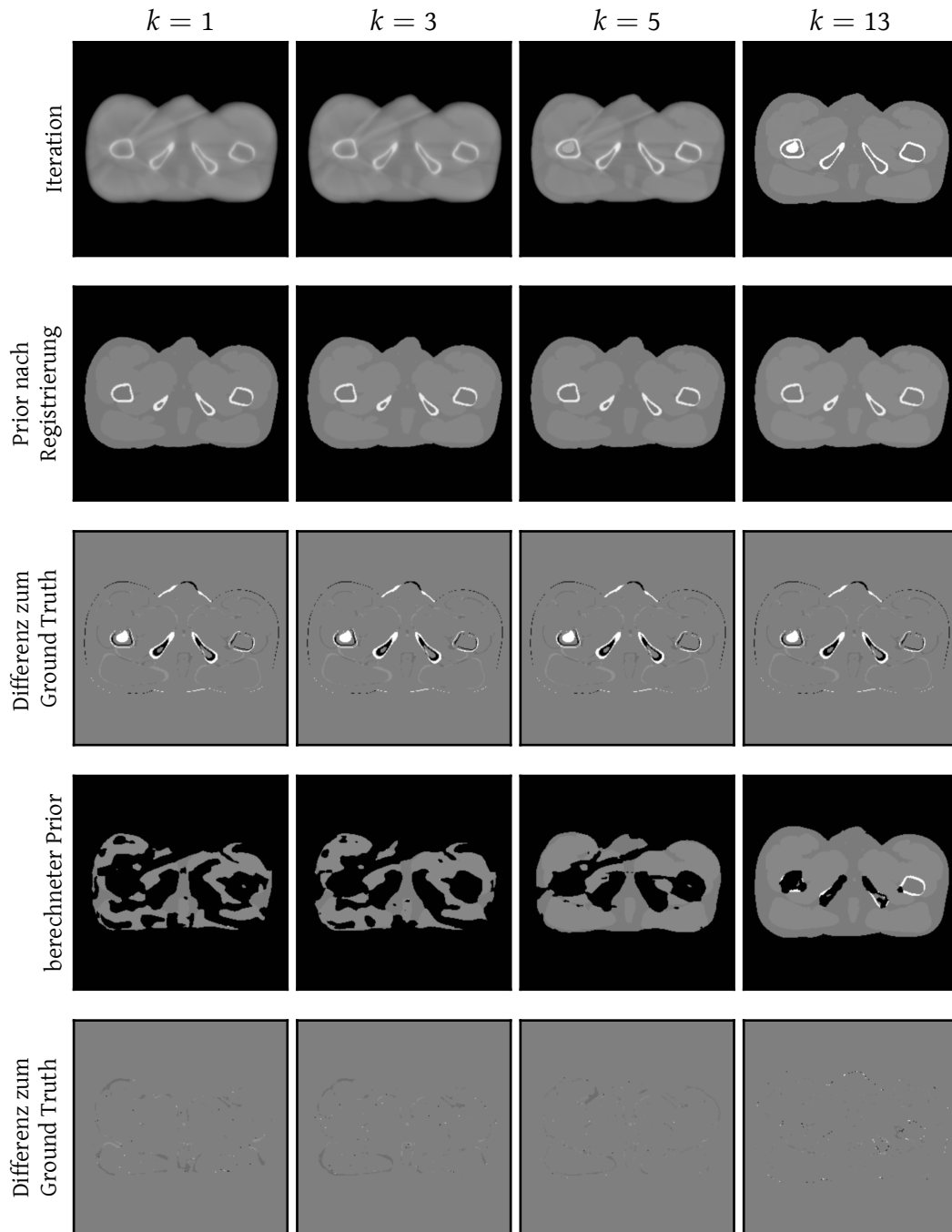


Abbildung 5.34: Zwischenergebnisse der Rekonstruktion durch ALIR mit nicht-lokaler Regularisierung. Erste Reihe: aktuelles Zwischenergebnis der Rekonstruktion. Zweite Reihe: gegebener Prior nach Registrierung mit dem Bild aus Reihe 1. Dritte Reihe: Differenz des registrierten Priors mit Ground-Truth-Bild. Vierte Reihe: der neu berechnete Prior. Letzte Reihe: Differenz des genutzten Priors zum Ground-Truth-Bild.

In Abbildung 5.35 sind die finalen Rekonstruktionsergebnisse von LI, ALIR und ALIR mit nicht-lokaler Regularisierung zusammen mit deren Differenzen zum Ground-Truth-Bild gegeben. Das LI-Ergebnis zeigt eindeutig die stärkste Ausprägung der Artefakte. Deutlich zu sehen ist dies im Differenzbild. Die vom Metallobjekt ausgehenden Streifenartefakte überlagern hier das gesamte Bild und haben so einen sehr negativen Einfluss auf die Bildqualität. Hinzu kommt eine leichte Entschärfung der Kanten im Bild. Das rekonstruierte Bild von ALIR ohne Regularisierung zeigt ein deutlich verbessertes Korrekturergebnis. Die Anzahl und Ausprägung der Streifenartefakte konnte in einem großen Umfang reduziert werden. Ein noch besseres Ergebnis kann durch die zusätzliche nicht-lokale Regularisierung erzielt werden. Artefakte können in der genutzten Fensterung kaum erkannt werden. Einzig das Differenzbild bringt zurückbleibende Streifenartefakte zum Vorschein. Ein wichtiger Aspekt bei der Rekonstruktion mit zusätzlicher Regularisierung ist, dass die anatomischen Details aus dem gegebenen Prior nicht in das rekonstruierte Bild übernommen wurden. Auch die in Abbildung 5.34 zu sehenden Pixelwertunterschiede für Iteration 13 wurden nicht rekonstruiert. So kann durch den elaborierten Optimierungsalgorithmus in Verbindung mit den gegebenen Rohdaten und der gewählten Zielfunktion verhindert werden, dass diese in das Bild übertragen werden.

Durch das vorliegende Ground-Truth-Bild wird es ermöglicht, den hier beschriebenen visuellen Eindruck quantitativ zu belegen. In Tabelle 5.5 ist die Summe der quadrierten Abstände aus Gleichung 5.1 für die drei Algorithmen gegeben. Eindeutig kann hier festgestellt werden, dass LI mit einem Fehlerwert von 1195,9 HU den größten Abstand zum Ground-Truth-Bild aufweist. Der fast um ein zehnfaches kleinere Wert von 134,4 HU für ALIR belegt die deutlich verbesserte Artefaktreduktion. Durch die neu entwickelte Regularisierung kann dieser Wert sogar noch weiter reduziert werden, sodass für ALIR mit nicht-lokaler Regularisierung ein Fehler von nur 32,7 HU entsteht.

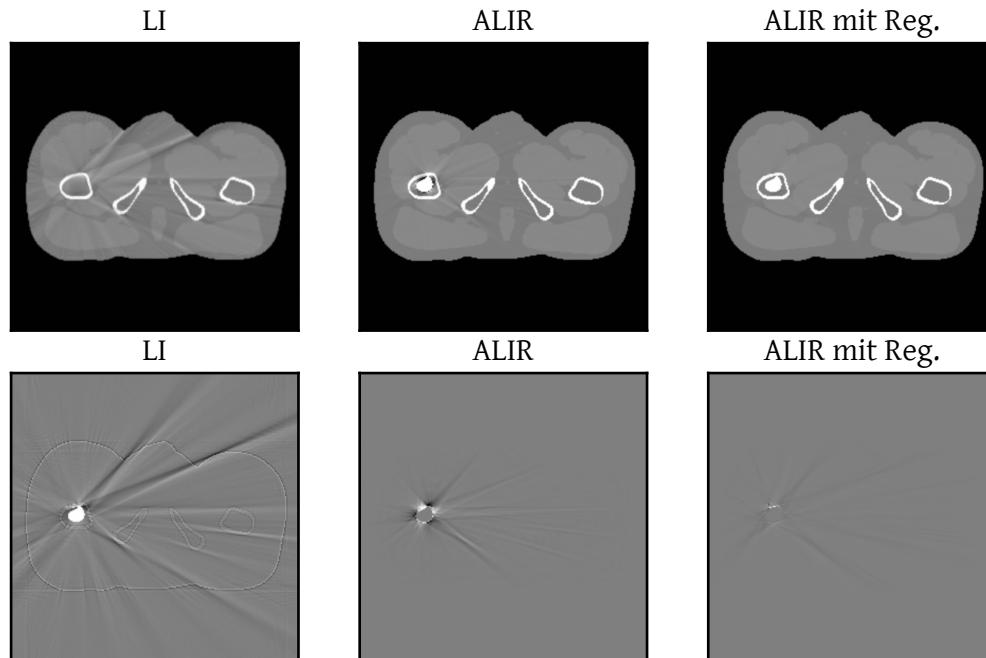


Abbildung 5.35: Gegenüberstellung der Rekonstruktionsergebnisse durch LI, ALIR und ALIR in Kombination mit der nicht-lokalen Regularisierung.

MAR-Methode	SSD / HU
LI	1195,9
ALIR	134,4
ALIR mit Regularisierung	32,7

Tabelle 5.5: Summe der quadrierten Abstände für die verschiedenen Korrekturalgorithmen im Vergleich zum Ground Truth.



## Kapitel 6

# Diskussion und Schlussfolgerung

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass der ALIR-Algorithmus Metallartefakte in klinischen Anwendungsfeldern erfolgreich reduziert. Neben wichtigen Erkenntnissen in Bezug auf die Fähigkeit, korrekte Abschwächungskoeffizienten wiederherzustellen, und auf den Nutzen einer nicht-lokalen Regularisierung sind verschiedene Diskussionspunkte zum Vorschein gekommen. Im Folgenden werden diese Punkte adressiert und es wird ein Ausblick zu potenziellen Verbesserungen und Weiterentwicklungen gegeben. Ergänzend hierzu wird eine Abgrenzung der vorgestellten Methodik zu bereits bekannten Algorithmen gegeben.

### 6.1 Abgrenzung zu bereits bekannten Verfahren

Der grundlegende Gedanke des vorgestellten ALIR-Algorithmus zeigt Ähnlichkeiten zu den Algorithmen von Murphy et al., Snyder et al. und Stayman et al. [108], [151]–[154]. Diese Algorithmen verfolgen ebenfalls einen Modell-basierten Ansatz zur Integration von Vorwissen bezüglich eines Metallobjektes. So wird in dem als Object-constrained Computerized Tomography (OCCT) bezeichneten Ansatz von Snyder et al.

## KAPITEL 6. DISKUSSION UND SCHLUSSFOLGERUNG

das Rekonstruktionsproblem als Deblurring-Problem modelliert. Dieses wird durch eine Entfaltungs-Strategie gelöst, in welcher Vorwissen über das Metallobjekt miteinbezogen wird. Zusätzlich wird für die Rekonstruktion gefordert, dass alle Werte im Bild positiv sind [151].

Der Ansatz von Murphy et al. befasst sich mit einer alternierenden Minimierung der negativen Log-Likelihood-Funktion und Bestimmung von Transformationsparametern zur korrekten Positionierung eines Metallobjektes. Die Zielfunktion wird durch einen Lagrange-Strafterm ergänzt, welcher Werte größer gleich der bekannten Abschwächungskoeffizienten an der ermittelten Position fordert. Zum Finden der korrekten Positionierung wird eine Optimierung basierend auf dem steilsten Abstieg verwendet [152].

Der Korrekturansatz von Stayman et al. integriert das Vorwissen über das Metallobjekt direkt in das Rekonstruktionsproblem. Die Methode basiert auf der Maximierung der Log-Likelihood-Funktion und geht davon aus, dass das Maximum angenommen wird, wenn die korrekte Position des Metallobjektes gefunden ist. Der Ansatz wird durch eine simultane Registrierung und Rekonstruktion modelliert, wobei die Zielfunktion von den Bildwerten und den Registrierungsparametern abhängig ist. Die Optimierung, an welche keine weiteren Nebenbedingungen gestellt werden, wird alternierend durchgeführt. Hierbei basiert der Registrierungsschritt auf einem Quasi-Newton-Ansatz und der Rekonstruktionsschritt auf einem paraboloidalen Surrogates-Ansatz [155].

Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Methoden verwendet der ALIR-Algorithmus einen Augmented-Lagrangian-Ansatz für die Minimierung der negativen Log-Likelihood-Funktion. Dieser integriert die geforderten Nebenbedingungen durch einen linearen und quadratischen Strafterm. Hierdurch wird eine Flexibilität in der Optimierung ermöglicht, welche die Konvergenzeigenschaften positiv beeinflusst. Die Wahrscheinlichkeit einer schlechten Konditionierung wird durch explizite Lagrange-Multiplikatoren reduziert [65, S. 514]. Im hier vorgestellten Algorithmus werden als Nebenbedingungen Positivität und die bekannten Abschwächungskoeffizienten an der ermittelten Position gefordert. Anders als bei den anderen Verfahren werden bei der Rekonstruktion die Projektionswerte, welche durch das Metallobjekt verlaufen, verworfen und in der Rekonstruktion nicht berücksichtigt. Die Nebenbedingungen der Optimierung sollen dabei dem entstehenden Informationsverlust entgegenwirken.

Ein weiteres Alleinstellungsmerkmal des ALIR-Algorithmus ist die Kombination eines Modell-basierten Ansatzes mit einem traditionellen MAR-Ansatz in Form des Ersetzens von Projektionswerten. So wird das sukzessive Fortschreiten des Algorithmus ausgenutzt, um neue Projektionsdaten basierend auf den ständig verbesserten Zwischenergebnissen zu berechnen. Dieser Ansatz realisiert eine neue Strategie zur Korrektur von Metallartefakten und ist aktuell in dem Patent [E2] festgehalten.

## 6.2 Einschränkung durch gefordertes Vorwissen

Der vorgestellte ALIR-Algorithmus verfolgt die Idee, Informationen über die Form und das Abschwächungsverhalten eines Metallobjektes mit in die Rekonstruktion zu integrieren. Um diese Informationen zu gewinnen, ist eine exakte Beschreibung des vorhandenen Implantates notwendig. Hersteller von medizinischen Instrumenten und Implantaten arbeiten zumeist mit computergestützten Geometriebeschreibungen der Objekte. Diese können genutzt werden, um die notwendigen Informationen zu erhalten. So sind beispielsweise die genauen Maße von bestimmten Instrumenten zum Platzieren von radioaktiven Strahlenquellen in der Brachytherapie bekannt [156], [157]. Eine exakte Geometriebeschreibung für innovative und neuartige Instrumente und Implantate zu erhalten, ist hingegen mitunter kompliziert und kann durch vorhandene Schutzrechte sogar unmöglich sein.

Für den Fall, dass keine genauen Informationen über das Metallobjekt vorliegen, ist der ALIR-Algorithmus jedoch nicht unbrauchbar. Vielmehr standen in den klinischen Evaluierungsstudien, welche im Abschnitt 5.1.3 gezeigt sind, auch keine Informationen bezüglich des Metallobjektes zur Verfügung. Diese Einschränkung führt nicht zu einem Fehlverhalten des Algorithmus, sondern kann durch eine Neumodellierung des Rekonstruktionsproblems gelöst werden. In den gezeigten Anwendungsfällen wurde die Methode aus Abschnitt 4.1.2 gewählt, welche auf einer initialen Rekonstruktion des Bildes beruht. Das vorab erstellte Bild kann genutzt werden, um eine Segmentierung des Metallobjektes zu gewinnen. Anschließend können für den Bereich des Implantates vordefinierte Abschwächungskoeffizienten gefordert werden. Sind diese nicht aus einer vorhandenen Geometriebeschreibung abgeleitet, können prinzipiell beliebige Werte gewählt werden. Sind die Werte jedoch so groß gewählt, dass der partielle

Volumeneffekt zu tragen kommt, können Artefakte im Bild entstehen. Dementsprechend sollten große Unterschiede in den Abschwächungskoeffizienten zwischen dem Metallobjekt und der umliegenden Anatomie vermieden werden. Die Ergebnisse der klinischen Anwendungsfälle zeigen, dass ein solches Vorgehen auch ohne Vorwissen über das Implantat zu einer erfolgreichen Korrektur der Metallartefakte führt.

Für die Rekonstruktion mit dem vorgestellten Regularisierungsterm zur Integration eines Priors gestaltet sich eine Neuformulierung ohne Vorwissen als schwierig. Liegt kein Bildmaterial von vorhergehenden Aufnahmen des Patienten vor, können Bilder von Dritten herangezogen werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass der zugrundeliegende Patient ähnliche Maße, wie der zu untersuchende Patient besitzt. Basierend auf den durchgeführten Evaluierungen ist mit einer Zusammenführung von nicht zueinander passenden anatomischen Details nicht zu rechnen. Werden keine Strukturen im Prior gefunden, welche ein ähnliches Erscheinungsbild wie die Strukturen im zu rekonstruierenden Bild aufweisen, berechnet sich der sukzessiv neu berechnete Strafterm zu Null und es wird keine Regularisierung durchgeführt. Dies bedeutet jedoch auch, dass ein schlecht gewählter Prior gegebenenfalls keinen Einfluss auf die Rekonstruktion hat. Eine Untersuchung der Möglichkeit, Atlanten zur Berechnung des Regularisierungsterms heranzuziehen, steht noch aus. Hierbei muss insbesondere das Rauschverhalten der genutzten Bilddaten berücksichtigt werden, da eine Diskrepanz zwischen rauschfreien Atlanten und realen Aufnahmen vorliegt. Ist absolut kein Vorwissen in Form eines Priors vorhanden, so empfiehlt es sich, eine Regularisierung zu verwenden, wie sie in Abschnitt 3.3.4 beschrieben ist.

### **6.3 Variabilität und Komplexität durch Parameter**

Der vorgestellte ALIR-Algorithmus besitzt eine Reihe von Parametern, welche es erlauben, bestimmte Anpassungen vorzunehmen. Diese Variabilität zeigt die Mächtigkeit und vielseitige Einsatzfähigkeit des Algorithmus, sorgt auf der anderen Seite aber auch für Komplexität. Dessen ungeachtet ist die Stabilität des Algorithmus davon nicht eingeschränkt. So sind die Ergebnisse, welche in Abschnitt 5 präsentiert sind, zumeist mit den gleichen Einstellungen und Parametern erzeugt. Um jedoch einen Überblick

### 6.3. VARIABILITÄT UND KOMPLEXITÄT DURCH PARAMETER

über die vorhandenen Einstellungsmöglichkeiten und deren Einfluss zu geben, werden im Folgenden die einzelnen Parameter diskutiert.

Die Parameter  $\tau_\omega$  und  $\tau_c$  (siehe Algorithmus 3, Zeile 19) haben den größten Einfluss bezüglich der Entscheidung, ob neue Projektionswerte in der nachfolgenden Iteration berechnet werden sollen oder nicht. Der Wert  $\tau_c$  hilft dabei zu entscheiden, ob die Nebenbedingungen hinreichend gut eingehalten sind, um eine Neuberechnung durchzuführen. Entscheidender jedoch noch ist der Wert  $\tau_\omega$ . Dieser dient dazu festzustellen, ob bereits genug anatomische Informationen im Zwischenergebnis vorhanden sind, um neue Projektionswerte zu berechnen. Da der Parameter einen Schwellwert bezüglich des Gradienten der Zielfunktion darstellt, ergibt sich der folgende Zusammenhang. Wird  $\tau_\omega$  zu hoch gewählt, kann es vorkommen, dass noch nicht hinreichend viele Details im Zwischenergebnis enthalten sind und die neu berechneten Projektionswerte Artefakte im Bild erzeugen. Im Verlauf der Iterationen führt ein niedriger Schwellwert  $\tau_\omega$  zu einer späteren Berechnung von neuen Projektionswerten. Dies kann einerseits zu einer kürzeren Berechnungszeit führen, da weniger Filterschritte durchgeführt werden. Andererseits können jedoch, bedingt durch das lange Verwenden der linearen Interpolation für die Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$ , Artefakte im Bild entstehen. Wird mit der Berechnung von neuen Projektionsdaten so spät begonnen, dass bereits stark ausgeprägte Artefakte im Zwischenergebnis vorhanden sind, besteht die Möglichkeit, dass der Filterungsschritt nicht mehr in der Lage ist, diese hinreichend stark zu unterdrücken. In der Folge werden die Artefakte durch die Iterationen weitergetragen und können gegebenenfalls sogar verstärkt werden. Obwohl dieser Zusammenhang eine potenzielle Fehlerquelle darstellt, zeigt der Algorithmus ein robustes Verhalten. Für alle in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Ergebnisse wurden die gleichen Einstellungen mit  $\tau_\omega = 10^{-7}$  und  $\tau_c = 10^{-2}$  verwendet. Die Stabilität des Algorithmus lässt darauf schließen, dass eine Anpassung dieser Werte für eine individuelle Rekonstruktion nicht notwendig ist.

Die Gesamtanzahl an Iterationen des Algorithmus kann durch den Parameter  $\omega^*$  beeinflusst werden (siehe Algorithmus 3, Zeile 6). Der Wert kennzeichnet die Konvergenzgrenze bezüglich des Gradienten der Zielfunktion. Wird der Parameter relativ groß gewählt, so verkleinert sich die Anzahl an Iterationsschritten, da das Konvergenzkriterium früher erfüllt ist. Wird der Wert deutlich zu groß gewählt, ist die Rekonstruktion unter Umständen noch nicht weit genug fortgeschritten und das rekonstru-

ierte Bild erscheint verschwommen. Ist der Wert hingegen zu klein gewählt, kann es zu einer hohen Anzahl an Iterationen kommen, in welcher Iterationsschritte durchgeführt werden, die in der Praxis nicht mehr notwendig sind. Zwar findet noch eine Optimierung der Lösung statt, jedoch werden in späteren Iterationen im Bildbereich nur noch sehr feine Verbesserung durchgeführt. Für alle Ergebnisse in dieser Arbeit wurde der empirisch ermittelte Wert  $\omega^* = 10^{-10}$  gewählt. Eine individuelle Einstellung für unterschiedliche Rekonstruktionen ist nicht notwendig. Der Wert kann daher als konstant für alle Rekonstruktionen gesetzt werden.

Einfluss auf die Wichtigkeit der Nebenbedingung beziehungsweise die korrekte Rekonstruktion von bekannten Abschwächungskoeffizienten kann durch den Wert  $\eta^*$  und durch die Entwicklung der Werte  $\eta^{(k)}$  in den Iterationen  $k$  genommen werden (siehe Algorithmus 3, Zeile 3, 5, 6, 11 und 16). Der Wert  $\eta^*$  hat eine ähnliche Bedeutung, wie der Wert  $\omega^*$ , jedoch mit einem gesonderten Fokus auf die Nebenbedingungen. Ist der Parameter  $\eta^*$  zu groß gewählt, so kann es sein, dass die Norm der Nebenbedingungen noch nicht klein genug ist. In der Konsequenz werden die bekannten Abschwächungskoeffizienten nicht genau genug rekonstruiert. Wird der Wert gleich Null gesetzt, so wird gefordert, dass die bekannten Abschwächungskoeffizienten exakt rekonstruiert werden. Dies ist in der Regel nicht erforderlich. Vielmehr ist es sinnvoll, eine gewisse Variabilität für die Rekonstruktion zu erlauben, um der Optimierung hinreichend viele Freiheitsgrade zu geben. Für alle gezeigten Ergebnisse wurde der empirisch ermittelte Wert  $\eta^* = 10^{-5}$  gewählt. Eine Anpassung dieses Wertes ist für individuelle Rekonstruktionen nicht erforderlich.

Bei den festgelegten Schwellwerten  $\tau_\omega$ ,  $\tau_c$ ,  $\omega^*$  und  $\eta^*$  handelt es sich um Erfahrungswerte. Anwendungsfälle, bei welchen es notwendig war, diese Werte zu ändern, sind im Rahmen dieser Arbeit nicht aufgetreten. Um eine konkrete und wissenschaftlich belegte Aussage bezüglich der Werte zu machen, müssen jedoch weitere Studien durchgeführt werden. Hierzu sollte ein Hardwarephantom verwendet werden, für welches die genauen Abschwächungskoeffizienten bekannt sind. Ergänzend dazu muss eine exakte Beschreibung der Geometrie des Phantoms und die Möglichkeit, ein Metallobjekt zu integrieren, vorhanden sein. Unter Berücksichtigung der Auflösung des verwendeten Tomographen kann dann entschieden werden, wann eine optimale Bildqualität erzeugt wird. Hierzu können verschiedene Rekonstruktionen erstellt werden, welche mit den vorhandenen physikalischen Merkmalen des Phantoms verglichen werden.

### 6.3. VARIABILITÄT UND KOMPLEXITÄT DURCH PARAMETER

Jeder Schwellwert sollte dabei einen Wertebereich durchlaufen, während alle anderen Werte festgesetzt sind. Sinnvolle Wertebereiche für die einzelnen Parameter sind  $\tau_\omega \in (10^{-15}, 10^{-3})$ ,  $\tau_c \in (0, 10^{-1})$ ,  $\omega^* \in (10^{-15}, 10^{-3})$  und  $\eta^* \in (0, 10^{-1})$ .

Die einzigen Werte, für welche es sinnvoll ist, einem Anwender Einstellungsmöglichkeiten zu bieten, sind die Parameter  $\sigma_d$ ,  $\sigma_r$  und  $k_{\text{filter}}$ . Diese steuern das Verhalten des bilateralen Filters, welcher zur Reduktion der Streifenartefakte in den Zwischenergebnissen genutzt wird. Die Werte sollten auf die geometrische Ausdehnung der Artefakte und deren Intensität (photometrische Ausdehnung) angepasst werden. Ziel der Filterung ist es, in den Zwischenergebnissen die Artefakte zu unterdrücken, während möglichst viele anatomische Details erhalten bleiben. Der Parameter  $\sigma_d$  bestimmt dabei die geometrische Ausdehnung des Filters. Ein zu hoher Wert für diesen Parameter würde dafür sorgen, dass ein sehr großer Bereich in die Filterung miteinbezogen wird. Dies erhöht einerseits die Ausführungszeit und kann andererseits dazu führen, dass das Bild verschwommen erscheint, da über eine zu große Region gemittelt wird. Ist der Wert  $\sigma_d$  hingegen zu klein gewählt, so kann es vorkommen, dass der Filterkernel nicht genug Pixel miteinbezieht und eine Tiefpassfilterung ausschließlich im Bereich der Artefakte selbst durchgeführt wird. Um jedoch die Artefakte zu unterdrücken, müssen Nachbarschaftspixel der Anatomie miteinbezogen werden. Ein ähnlicher Zusammenhang ist bei dem Parameter  $\sigma_r$  festzustellen. Wird der Wert zu hoch gewählt, so werden Kanten im Bild nicht hinreichend stark berücksichtigt und es findet eine Tiefpassfilterung über wichtige zu erhaltende Strukturen statt. Wird der Wert hingegen zu klein gewählt, so bleiben die Kanten der Artefakte nach der Filterung erhalten. Dementsprechend wird das Artefakt im Bild nach der Filterung nicht unterdrückt, sondern kann unter Umständen sogar hervorgehoben werden. Durch die neu berechneten Projektionsdaten werden diese Strukturen in die nächste Iteration weitertransportiert, sodass keine Korrektur stattfinden kann. Neben den Werten  $\sigma_d$  und  $\sigma_r$  ist für die Filterung auch die Anzahl an Filteriterationen  $k_{\text{filter}}$  relevant. Dieser Parameter hat Einfluss auf die Manifestation der Filterung. Je mehr Filteriterationen durchgeführt werden, um so deutlicher kann der Effekt der Filterung wahrgenommen werden. Für einen Einsatz des Algorithmus im klinischen Alltag erscheint es sinnvoll, dem Radiologen die Möglichkeit zu geben, diese Parameter an die vorhandenen Artefakte anzupassen. Um dem Radiologen eine intuitive Anpassung der Parameter zu gewährleisten, kann zunächst eine initiale nicht korrigierte Rekonstruktion erstellt werden. Anhand dieser

kann der Effekt des Filters anschaulich gezeigt werden und der Nutzer kann so die Parameter an die vorhandenen Artefakte anpassen. Dieses Vorgehen stellt jedoch lediglich einen zusätzlichen optionalen Optimierungsschritt dar, da der Algorithmus auch mit fest vorgegebenen Werten eine gute Korrekturfähigkeit gezeigt hat. So wurden für die in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Ergebnisse stets die selben Einstellungen mit  $\sigma_d = 6,0$ ,  $\sigma_r = 0,01$  und  $k_{\text{filter}} = 14$  verwendet.

## 6.4 Initiale Neuberechnung von Metallprojektionen

Der ALIR-Algorithmus wurde in zwei verschiedenen Variationen vorgestellt und evaluiert. Zum einen gibt es eine Version des Algorithmus, in welcher nach initialer Bestimmung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  die Metallprojektionen für die Rekonstruktion nicht berücksichtigt werden und zum anderen gibt es eine Version, in welcher die Projektionen zunächst durch eine lineare Interpolation ersetzt werden. Die Nichtberücksichtigung der Projektionen hat in der Evaluierung zwei potenzielle Probleme zum Vorschein gebracht. So kann es bei großen Metallobjekten beziehungsweise wenn die Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  viele Elemente enthält schon in frühen Iterationen der Rekonstruktion zu stark ausgeprägten Artefakten kommen. In Folge dessen besteht die Möglichkeit, dass der Filterungsschritt nicht in der Lage ist, die Artefakte hinreichend stark zu unterdrücken. In der Konsequenz werden Artefakte durch die Neuberechnung von Projektionen nicht reduziert, sondern können gegebenenfalls verstärkt werden. Dieses Verhalten kann in den beiden Anwendungsfällen mit den Hüftimplantaten in Abschnitt 5.1.3 beobachtet werden. In beiden Fällen haben sich lokal um die Implantate stark ausgeprägte Schattenartefakte manifestiert. Dem gegenübergestellt sind die Anwendungsfälle mit dem Hardwarephantom, dem Knieimplantat und insbesondere den Amalgamfüllungen. In diesen Fällen enthält die Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  im Vergleich zur Gesamtanzahl der Projektionen relativ wenig Elemente und die Ausprägung der Artefakte ist in den ersten Iterationen gering. Insbesondere sind sie genau so stark oder weniger stark ausgeprägt wie die Artefakte, welche in den ersten Iterationen durch die lineare Interpolation verursacht wurden. Für den Anwendungsfall mit Amalgamfüllungen ist die ALIR-Version mit initialer Nichtberücksichtigung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  dem Interpolationsansatz vorzuziehen. Die gesamte Evaluierung zeigt jedoch, dass ALIR mit LI im Allgemeinen sehr

#### 6.4. INITIALE NEUBERECHNUNG VON METALLPROJEKTIONEN

stabil ist und qualitativ hochwertige Ergebnisse liefert, ohne dabei eine wesentliche Sensitivität bezüglich der Mächtigkeit der Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  zu zeigen.

Der zweite Effekt, welcher bei einer Nichtberücksichtigung der Menge  $\mathcal{M}_{\text{metal}}$  auftritt, betrifft den Rand des Metallobjektes. Durch die fehlenden Informationen zu Beginn der Rekonstruktion können die Abschwächungskoeffizienten im Bereich des Metallobjektes nicht rekonstruiert werden. Dies macht sich durch einen dunklen verschwommenen Punkt in den Anfangsiterationen bemerkbar. Im Verlauf der Rekonstruktion sorgen die Nebenbedingungen dafür, dass an der Position des Metallobjektes korrekte Abschwächungskoeffizienten rekonstruiert werden. In den ersten Iterationen kommt es jedoch durch das verschwommene Erscheinungsbild in Verbindung mit dem partiellen Volumeneffekt an der Kante des Bereichs zu einem Rekonstruktionsfehler in Form eines schwarzen Randes um das Metallobjekt. Die Größe des Fehlers von genau einem Pixel kann mit dem partiellen Volumeneffekt erklärt werden. Der Kante zwischen den vorhandenen Projektionen und nicht berücksichtigten Projektionen im Rohdatenbereich kann gegebenenfalls abhängig von der Größe der Pixel nicht eindeutig eine Position im Bildbereich zugewiesen werden (siehe Abschnitt 2.3.4). So kann es dazu kommen, dass der Bereich der fehlenden Informationen im Bildbereich einen Pixel größer ist als die vorhandenen Informationen in Form des Vektors  $\mathbf{b}$ . Durch das Filtern des Bildes und Ersetzen der Metallprojektionen kann sich der entstandene Fehler in die folgenden Iterationen fortpflanzen. Bei der Rekonstruktion durch ALIR mit LI tritt der Fehler nicht auf, da der Bereich des Metalls auch in den Anfangsiterationen durch die Daten der linearen Interpolation gefüllt wird. Ein durch den partiellen Volumeneffekt verursachter Fehler tritt nicht auf. Dies spricht ebenfalls dafür, dass im Allgemeinen die initiale lineare Interpolation für die ersten Iterationen bevorzugt werden sollte.

In der Regel kann der beschriebene partielle Volumeneffekt auch immer dann auftreten, wenn die Differenz der Abschwächungskoeffizienten zwischen einem Objekt und seiner Umgebung sehr groß ist oder wenn ein Objekt so klein ist, dass es an die Grenzen der Auflösung des tomographischen Systems stößt. Genau wie im ALIR-Algorithmus können im Algorithmus von Stayman et al. unterschiedliche Projektionsoperatoren für das Metallobjekt und die Anatomie benutzt werden [108]. Um das Problem des partiellen Volumeneffektes bei Cochlea-Implanten zu lösen, wurde hier vorgeschlagen, verschiedene Auflösungen für das Implantat und die Anatomie zu verwenden [158],

[159]. Dieses Vorgehen könnte in Zukunft auch für den ALIR-Algorithmus adaptiert werden, sodass die Auflösung im Bereich des Metallobjektes lokal erhöht wird.

### **6.5 Anwendung der nicht-lokalen Regularisierung für klinische Daten**

Für eine Verwendung des in Abschnitt 5.3 vorgestellten nicht-lokalen Regularisierungsterms bei klinischen Anwendungsfällen müssen einzelne Details beachtet werden. Die Wahl eines sinnvollen Prior-Images nimmt in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle ein. Wie bereits erwähnt, besitzen klinische Verlaufskontrollen hierbei ein sehr hohes Potenzial, da sie in der Regel gleiche anatomische Strukturen aufweisen. Weil sich die Aufnahmezeitpunkte jedoch unterscheiden, kann nicht von einer gleichen Lagerung des Patienten ausgegangen werden. Zwar kann das medizinische Personal dafür sorgen, dass die Patienten stets die selbe Position einnehmen, das Verschieben von inneren Organen und Strukturen kann dabei jedoch nicht vollständig verhindert werden. Die hier vorgestellte nicht-lokale Regularisierung ist genau auf diese Problemstellung zugeschnitten. Um eine potenzielle klinische Anwendung zu ermöglichen, müssen jedoch zunächst weitere Studien bezüglich einzelner Parameter durchgeführt werden. Hierzu gehört insbesondere eine Untersuchung hinsichtlich einer geeigneten Größe des Suchfensters und der Patches. Sollte sich beispielsweise die Lage der verschiedenen anatomischen Strukturen stark verändert haben, liegt es nahe, ein großes Suchfenster für die Berechnung des Strafterms zu nutzen. Liegt eine Verformung von Strukturen zwischen den verschiedenen Aufnahmezeitpunkten vor, so kann die Wahl der Patchgröße an Bedeutung gewinnen. Ist die Größe der genutzten Patches beispielsweise zu groß, so könnte es vorkommen, dass keine hinreichend ähnlichen Strukturen mehr gefunden werden können. Ein Aspekt, welcher bei der Wahl der verschiedenen Größen beachtet werden sollte, ist die Berechnungszeit für den Regularisierungsterm. Mit größer werdendem Suchfenster steigt die Anzahl an Patchvergleichen und damit auch die Ausführungszeit. Analog verhält es sich mit der Größe der Patches. Die Verwendung eines größeren Patches ist mit einer steigenden Anzahl an Pixelvergleichen gleichzusetzen, was wiederum zu einer längeren Ausführungszeit

führt. Da jedoch die Vergleiche von Patches für die Berechnung der Gewichtungsmatrix unabhängig voneinander sind, können diese parallel durchgeführt werden. Dies würde die Rechenzeit signifikant reduzieren.

Neben der Wahl eines geeigneten Priors ist die Berücksichtigung des Rauschverhaltens in den klinischen Bilddaten von hoher Bedeutung. Insbesondere bei der Berechnung der pixelspezifischen Gewichtung ist es notwendig, das Rauschen im gegebenen Prior zu beachten. Der Vergleich von Patches aus dem Zwischenergebnis  $\mathbf{f}^{(k)}$  und dem Prior-Image kann durch das Rauschen stark beeinträchtigt sein. Daher ist anzunehmen, dass vor der Berechnung einer Gewichtungsmatrix eine Rauschunterdrückung notwendig ist. Diese ist bisher noch nicht mit in den Regularisierungsterm integriert, jedoch erscheint die bilaterale Filterung für diesen Zweck geeignet. Diese Art von Filterung wird bereits bei der Berechnung neuer Projektionswerte verwendet und zeichnet sich durch eine gute Kantenerhaltung aus. Alternative kantenerhaltende Filter wie beispielsweise die Local-Mode-Filterung [160], Guided-Image-Filterung [161], L0-Gradient-Filterung [162], SURE-Filterung [163], Domain-Transform-Filterung [164] oder eine Filterung basierend auf gewichteten kleinsten Quadraten [165] sollten jedoch auf eine potenzielle Anwendung geprüft werden. Neben der Filterung des Prior-Images muss darüber hinaus untersucht werden, inwiefern eine Rauschunterdrückung in den Zwischenergebnissen  $\mathbf{f}^{(k)}$  notwendig ist. In den ersten Iterationen der iterativen Rekonstruktion haben die Zwischenergebnisse zumeist ein verschwommenes Erscheinungsbild, sodass eine Filterung hier nicht erforderlich sein sollte. In späteren Iterationen, in welchen mehr Details im Bild hervortreten, wird jedoch auch das Rauschen deutlicher. Der Zeitpunkt, ab wann eine Filterung der Zwischenergebnisse notwendig ist, könnte durch ein Schwellwertverfahren in Bezug auf den Gradienten ermittelt werden. Hier sollte eine ähnliche Vorgehensweise zielführend sein, wie bei der Bestimmung des Zeitpunktes für die Berechnung von neuen Projektionswerten.

## 6.6 Konvergenzgeschwindigkeit und Ausführungszeit

Der Augmented-Lagrangian-Algorithmus ist bereits ein sehr etabliertes Verfahren im Gebiet der Optimierung. Das Konvergenzverhalten des Algorithmus ist ausführlich erforscht und in verschiedenen Arbeiten veröffentlicht [65], [85], [88], [89]. Bekannte

Bibliotheken für Optimierungsalgorithmen, wie beispielsweise das LANCELOT-Paket, besitzen fertige Implementierungen, welche frei genutzt werden können [87]. Da das Grundgerüst des ALIR-Algorithmus aus dem Augmented-Lagrangian-Verfahren besteht, sind ähnliche Konvergenzeigenschaften für den Rekonstruktionsalgorithmus anzunehmen. Anschaulich kann ergänzend dazu beobachtet werden, dass alle hier vorgestellten Rekonstruktionsergebnisse des ALIR-Algorithmus mit weniger als 20 äußeren Iterationen erstellt wurden. Die Terminierung der Rekonstruktionen wurde dabei stets durch ein Eintreten der Konvergenzbedingungen hervorgerufen. Für eine einzelne Schicht betrug die Ausführungszeit des Algorithmus auf einem Intel Xeon mit vier 2,53 GHz Kernen und 10 GB RAM in der Regel ca. 30 min. Die Verbesserung der Ausführungszeit kann durch eine weitere Parallelisierung der Projektionsalgorithmen erzielt werden. Zusätzlich kann der vorgestellte nicht-lokale Regularisierungsterm bezüglich der Berechnung der einzelnen Vergleiche von Patches parallelisiert werden.

Eine interessante Beobachtung ist im Hinblick auf die Berechnung der neuen Projektionswerte zu machen. Auch hier ist eine Konvergenz festzustellen, denn die Projektionswerte stabilisieren sich zunehmend zum Ende der Ausführung. Da dies in Verbindung mit einer Stabilisierung des Bildinhaltes stattfindet, erscheint es möglich, in Zukunft die Intensität der Filterung in den letzten Iterationen abzuschwächen. Dies ist sinnvoll, da anzunehmen ist, dass zu diesem Zeitpunkt die Streifenartefakte bereits zu einem gewissen Grad reduziert wurden. Mit einer weniger starken Filterung könnte es gelingen, in den letzten Iterationen noch mehr Informationen über anatomische Details in die neu berechneten Projektionen mit einzubeziehen. Für die Umsetzung könnte ähnlich wie bei der Bestimmung des Zeitpunktes für das Ersetzen der Projektionen ein Schwellwert bezüglich der Größe der Norm des Gradienten festgelegt werden.

### **6.7 Weiterentwicklung der Ideen für die dreidimensionale Rekonstruktion**

Der ALIR-Algorithmus wurde bis zum jetzigen Zeitpunkt lediglich für die zweidimensionale Bildgebung vorgestellt. Alle in Abschnitt 5 gezeigten Ergebnisse basieren auf

sequentiellen Aufnahmen mit einem Fächerstrahl, welche in eine Parallelstrahlgeometrie umgewandelt wurden. Im klinischen Alltag werden aufgrund des Geschwindigkeitsvorteiles allerdings zumeist Helix-Aufnahmen mit einem Kegelstrahl durchgeführt. Eine Weiterentwicklung des Ansatzes für eine native dreidimensionale Rekonstruktion ist direkt umsetzbar. Zu diesem Zweck muss der Algorithmus auf moderne Helix-CTs angepasst werden, wobei insbesondere die Geometrie der neuen Tomographen berücksichtigt werden sollte. Katsevich et al. haben 2002 eine exakte FBP für Helix-CTs vorgestellt [166]. Seitdem wurde das Verfahren weiterentwickelt und findet vermehrt Beachtung [167]–[174]. So wurde im Rahmen einer Dissertation von Sunnegårdh bereits eine iterative FBP für helikale Computertomographen mit Kegelstrahl vorgestellt [175], [176]. Für die Entwicklung von Projektoren für den ALIR-Algorithmus, welche für die dreidimensionale Bildgebung zugeschnitten sind, stellt die Methodik von Katsevich daher eine geeignete Grundlage dar.

Zusätzlich zu den Projektoren muss die Bildfilterung für die dreidimensionale Rekonstruktion angepasst werden. Den bilateralen Filter schichtweise auf ein Bildvolumen anzuwenden, stellt hierbei eine einfache Vorgehensweise dar. Dies würde allerdings lediglich der Approximation einer korrekten dreidimensionalen Filterung entsprechen. Für eine korrekte Filterung ist es jedoch notwendig, alle vorhandenen Informationen mit einzubeziehen. Die Integration aller drei Dimensionen in die Filterung ist intuitiv und kann direkt vollzogen werden. Hierfür ist es notwendig, die Gleichungen (4.25) und (4.26) um eine Dimension zu erweitern. Für die Anwendung bei CT-Aufnahmen muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass die Voxel mitunter nicht isotrop sind. Um der Anisotropie der Voxel zu entsprechen, kann der Filterkern (4.25) an die jeweiligen Ausmaße angepasst werden. Der Parameterraum des Filters muss hierzu erweitert werden.

## **6.8 Anwendung der entwickelten Methodik auf andere Problemstellungen**

Die hier entwickelte Methodik ist nicht nur für die Reduktion von Metallartefakten geeignet, sondern bietet ein weitreichendes Potenzial für verschiedene Problemstellungen. Die Gestalt der Nebenbedingungen, welche an die Rekonstruktion gestellt werden,

können dabei auf viele denkbare Aufgabenstellungen angepasst werden. Hervorzuheben ist hierbei die Rauschunterdrückung. Sowohl der Rekonstruktionsansatz ALIR als auch der vorgestellte Regularisierungsterm lassen sich für diese Anwendung einsetzen. Während beim Regularisierungsterm keine weiteren Änderungen vorgenommen werden müssen, muss der ALIR-Algorithmus auf die Problemstellung angepasst werden. Das Berechnen von neuen Projektionen in fortlaufenden Iterationen muss dabei unabhängig von einem vorhandenen Metallobjekt gestaltet werden. Hierzu könnten die gemessenen Rohdaten um künstliche Projektionen erweitert werden, um so gefilterte Vorwärtsprojektionen der Zwischenergebnisse zur Rauschunterdrückung zu integrieren. Eine geeignete Anzahl an neuen künstlichen Projektionen muss in diesem Zusammenhang noch ermittelt werden. Weiter noch sollte die Frage, wie die neuen Projektionen und gemessene Projektionen miteinander kombiniert werden können, Bestandteil neuer Studien sein. Hierzu ist es denkbar, den Detektor künstlich um neue artifizielle Detektorelemente zu erweitern oder die gemessenen und neu berechneten Projektionen zu mitteln. In Zukunft sollte eine ausführliche Auseinandersetzung mit der potenziellen Anwendung der entwickelten Methoden auf verschiedene Problemstellungen nicht ausbleiben.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Reduktion von Metallartefakten in Computertomographie-Bildern. Metallartefakte können unter anderem von Implantaten oder chirurgischen Instrumenten, welche sich im Inneren eines Patienten befinden, hervorgerufen werden. Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Algorithmus Augmented Likelihood Image Reconstruction (ALIR) ist in der Lage, Vorwissen in Bezug auf ein vorhandenes Metallobjekt in die Rekonstruktion mit einfließen zu lassen.

Um eine substanzielle Basis für die erarbeitete Methodik zu schaffen, wurden in Kapitel 2 zunächst Grundlagen für die Bildgebung mit Hilfe der Computertomographie gegeben. Hierzu gehört die Erzeugung von Röntgenstrahlung, deren Interaktion mit Materie und anschließende Detektion. Darüber hinaus wurde eine Beschreibung der Geometrie von unterschiedlichen computertomographischen Systemen vorgegeben. Die darin enthaltene Erläuterung von einzelnen Parametern ist notwendig für die Entwicklung von spezifischen Rekonstruktionsalgorithmen. Darauf aufbauend wurden erste fundamentale mathematische Beschreibungen von Zusammenhängen erarbeitet. Diese konnten anschließend in der Herleitung eines analytischen Rekonstruktionsverfahrens verwendet werden. Dieses Verfahren stellt den im klinischen Alltag verwendeten Algorithmus dar und wurde im Laufe der Arbeit stets als Vergleichsmethodik herangezogen. Der letzte Abschnitt des Kapitels befasst sich mit der Entstehung von verschiedenen Bildartefakten.

## KAPITEL 7. ZUSAMMENFASSUNG

Das Kapitel 3 widmet sich mathematischen Grundlagen, welche die technische Basis dieser Arbeit bilden. Dies beinhaltet eine Einführung in das Gebiet der inversen Probleme und einen ausführlichen Einstieg in das mathematische Kernfach der Optimierung. Neben der Definition von wichtigen Begrifflichkeiten und Zusammenhängen wurde hier eine Herleitung von Optimierungsalgorithmen gegeben, welche in der entwickelten Rekonstruktionsmethode Anwendung finden. Abgeleitet von einer bereits bekannten iterativen Rekonstruktion wurde eine Formulierung des Rekonstruktionsproblems als Optimierungsaufgabe gegeben. Das Vorgehen veranschaulicht die Herangehensweise, welche später auch im ALIR-Algorithmus zur Rekonstruktion des Bildes verwendet wird. Das Kapitel endet mit einer Einführung in die Grundlagen der Bildregistrierung.

Der zentrale Beitrag dieser Arbeit, die Augmented Likelihood Image Reconstruction, wurde in Kapitel 4 hergeleitet. Die aus Kapitel 3 gewonnenen Erkenntnisse konnten genutzt werden, um die untersuchte Fragestellung durch ein Optimierungsproblem zu formulieren. In diesem Rahmen wurde eine Zielfunktion, welche genutzt wird, um ein Bild aus zuvor aufgenommenen tomographischen Daten zu rekonstruieren, um Nebenbedingungen erweitert. Diese Nebenbedingungen sorgen einerseits dafür, dass im Bild nur physikalisch erklärbare Abschwächungskoeffizienten rekonstruiert werden, und andererseits helfen sie dabei, Vorwissen über ein vorhandenes Metallobjekt zu integrieren. Als Vorwissen wurden in diesem Rahmen bekannte Abschwächungskoeffizienten und Geometriebeschreibungen eines spezifischen Objektes betrachtet. Um die korrekte Position eines solchen Objektes zu ermitteln, wurde die Rekonstruktion durch ein Registrierungsproblem erweitert. Zentraler Baustein des entwickelten Korrekturansatzes ist das Ersetzen von Projektionen, welche durch Metall verlaufen. Aufgenommene Messdaten, welche mit einem Metallobjekt assoziiert sind, werden in jedem Iterationsschritt der Optimierung durch neu berechnete Werte ersetzt. Um temporär entstandene Artefakte in den Zwischenergebnissen zu unterdrücken, wurde ein bilateraler Bildfilter verwendet.

Das zweite Schwerpunktthema des Kapitels befasst sich mit einem Regularisierungsterm, welcher genutzt werden kann, um einen Prior in der Rekonstruktion mit zu berücksichtigen. Ein Ausnutzen der Zwischenergebnisse ermöglicht es, in jeder Iteration einen angepassten Strafterm zu berechnen. Dieser basiert auf strukturellen Ähnlichkeiten in dem gegebenen Prior und dem aktuellen Zwischenergebnis. Ein Vergleich

von Bildausschnitten in einem Suchfenster führt dabei zu einer vom Pixelwert abhängenden Gewichtung der Regularisierung.

In Kapitel 5 sind Evaluierungen zu verschiedenen Aspekten der vorgestellten Methodiken gegeben. Hierzu gehört als wichtigster Faktor eine Untersuchung bezüglich der Fähigkeit des Rekonstruktionsalgorithmus zur Reduktion von Metallartefakten. Weil in diesem Zusammenhang nur eine Evaluierung mit klinischen Bilddaten sinnvoll ist, stellte sich die Herausforderung einer quantitativen Auswertung. Da diese durch das Fehlen einer Grundwahrheit beeinträchtigt ist, wurde das Expertenwissen von Radiologen zur Bewertung der Bildqualität herangezogen. Eine Auswertung von 6 klinischen Datensätzen hat durch die Bewertung von 10 Radiologen ergeben, dass die vorgestellte Methode im Vergleich zu den Ansätzen wie lineare Interpolation und Normalized Metal Artefact Reduction die besten Ergebnisse produziert. In einer weiteren Evaluierung konnte die Fähigkeit zur Wiederherstellung von Abschwächungskoeffizienten nachgewiesen werden. Die Abweichung zu den korrekten Abschwächungskoeffizienten nach erfolgreicher Metallartefaktkorrektur betrug hierbei zwischen 122 HU für Lungengewebe und 5 HU für kortikalen Knochen. Das Potenzial der vorgestellten nicht-lokalen Regularisierung konnte durch eine ausführliche Evaluierung mit Hilfe eines Softwarephantoms gezeigt werden.

Trotz der gewonnenen Erkenntnisse gilt es, sich zu vergegenwärtigen, dass die entwickelte Methode keines Falls eine endgültige Lösung des behandelten Problems der Metallartefaktkorrektur darstellt. Ungeachtet der guten Korrekturergebnisse und des hervorragenden Abschneidens bei dem Vergleich zu bereits etablierten Verfahren ist eine kritische Betrachtung unabdinglich. In keinem Anwendungsfall konnte es gelingen, sämtliche Artefakte aus den Bildern zu beseitigen. Auch wenn eine korrekte Wiederherstellung aller anatomischer Informationen aufgrund des Informationsverlustes, welcher durch die verworfenen Metallprojektionen verursacht wird, nicht zu erwarten ist, muss es das angestrebte Ziel eines Korrekturalgorithmus sein, auch die verbleibenden Streifenartefakte in den Rekonstruktionen zu entfernen. Sofern jedoch das Problem in Zukunft nicht durch neue Hardwarelösungen behoben werden kann, wird eine Schwierigkeit in diesem Zusammenhang stets verbleiben: die Wiederherstellung der verlorengegangenen Informationen. Der vorgestellte Rekonstruktionsalgorithmus und der Regularisierungsterm haben neue Erkenntnisse zu einer möglichen Lösung

## KAPITEL 7. ZUSAMMENFASSUNG

des Problems beigetragen und konnten zeigen, wie es gelingen kann, zusätzliche Informationen in die Rekonstruktion zu integrieren. Einige Verbesserungsvorschläge wurden im Rahmen der Diskussion in Kapitel 6 bereits erwähnt. Um aber eine Translation in den klinischen Alltag vollziehen zu können, ist es notwendig, weitere ausführliche Studien durchzuführen. Ob es gelingen wird, eine Methode zu entwickeln, welche bei allen Anwendungsfällen sämtliche Artefakte erfolgreich behebt, sei es durch neue medizintechnische Lösungsansätze, durch fortschrittliche Algorithmen oder eine Verbindung beider Aspekte, muss eingehend in Zukunft untersucht werden.

# Referenzen

## Eigene Arbeiten

- [E1] M. Stille, M. Kleine, J. Haegele, J. Barkhausen und T. M. Buzug, „Augmented Likelihood Image Reconstruction“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 35, Nr. 1, S. 158–173, 2015. DOI: 10.1109/TMI.2015.2459764.
- [E2] M. Stille und T. M. Buzug, *Verfahren und Vorrichtung zur Reduktion von Artefakten in computertomographischen Bildern*, patentiert in Deutschland: DE102014-007095A1, patentiert in den USA: US020170150937A1, 2015.
- [E3] C. Ziemann, M. Stille, F. Cremers, D. Rades und T. M. Buzug, „The Effects of Metal Artifact Reduction on the Retrieval of Attenuation Values“, *Journal of Applied Clinical Medical Physics*, Jg. 18, Nr. 1, S. 243–250, 2017. DOI: 10.1002/acm2.12002.
- [E4] M. Stille, C. Ziemann, F. Cremers, D. Rades und T. M. Buzug, „Retrieval of Attenuation Values by the Augmented Likelihood Image Reconstruction in the Presence of Metal Artefacts“, in *Bildverarbeitung für die Medizin 2018*, Springer-Verlag, 2018, S. 371–371. DOI: 10.1007/978-3-662-56537-7\_92.
- [E5] C. Ziemann, M. Stille, F. Cremers, D. Rades und T. M. Buzug, „Improvement of Dose Calculation in Radiation Therapy due to Metal Artefact Correction using the Augmented Likelihood Image Reconstruction“, *Journal of Applied Clinical Medical Physics*, Jg. 19, Nr. 3, S. 227–233, 2018. DOI: 10.1002/acm2.12325.
- [E6] M. Stille und T. M. Buzug, „Metal artifact reduction by projection replacements and non-local prior image integration“, *Current Directions in Biomedical Engineering*, Jg. 1, Nr. 1, S. 100–103, 2015. DOI: 10.1515/cdbme-2015-0026.

## Referenzen

- [E7] M. Stille und T. M. Buzug, „Augmented Likelihood Image Reconstruction with non-local prior image regularization“, in *Proc. 4th Intl. Mtg. on Image Formation in X-ray CT*, 2016, 145–148.
- [E8] M. Stille, B. Kratz, J. Müller, N. Maass, I. Schasielen, M. Elter, I. Weyers und T. M. Buzug, „Influence of metal segmentation on the quality of metal artifact reduction methods“, in *SPIE Medical Imaging*, International Society for Optics und Photonics, Bd. 8668, 2013, S. 86683C. DOI: 10.1117/12.2006810.
- [E9] M. Stille, E. J. Smith, W. R. Crum und M. Modo, „3D reconstruction of 2D fluorescence histology images and registration with in vivo MR images: Application in a rodent stroke model“, *Journal of Neuroscience Methods*, Jg. 219, Nr. 1, S. 27–40, 2013. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2013.06.003.
- [E10] M. Stille, *Reconstruction of a 3-Dimensional Brain Volume from Fluorescent Images and its Co-Registration with Magnetic Resonance Imaging*. Lübeck, Deutschland: Infinite Science Publishing, 2015.
- [E11] J. Mueller, F. Kaiser, Y. Levakhina, M. Stille, I. Weyers und T. M. Buzug, „An open database of metal artifacts cases for clinical CT imaging“, in *Proc. 2th Intl. Mtg. on Image Formation in X-ray CT*, 2012, S. 210–213.
- [E12] M. P. Heinrich, M. Stille und T. M. Buzug, „Residual U-Net Convolutional Neural Network Architecture for Low-Dose CT Denoising“, *Current Directions in Biomedical Engineering*, Jg. 4, Nr. 1, S. 297–300, 2018. DOI: 10.1515/cdbme-2018-0072.

## Allgemeine Arbeiten

- [1] A. Hata, M. Yanagawa, O. Honda, N. Kikuchi, T. Miyata, S. Tsukagoshi, A. Uranishi und N. Tomiyama, „Effect of Matrix Size on the Image Quality of Ultra-high-resolution CT of the Lung: Comparison of 512 x 512, 1024 x 1024, and 2048 x 2048“, *Academic Radiology*, Jg. 25, Nr. 7, S. 869–876, 2018. DOI: 10.1016/j.acra.2017.11.017.
- [2] J. Radon, „Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten“, *Classic Papers in Modern Diagnostic Radiology*, S. 7–22, 2005.

- [3] A. M. Cormack, „Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II“, *Journal of Applied Physics*, Jg. 35, Nr. 10, S. 2908–2913, 1964. DOI: 10.1063/1.1713127.
- [4] Z. V. Maizlin und P. M. Vos, „Do We Really Need to Thank the Beatles for the Financing of the Development of the Computed Tomography Scanner?“, *Journal of Computer Assisted Tomography*, Jg. 36, Nr. 2, S. 161–164, 2012. DOI: 10.1097/RCT.0b013e318249416f.
- [5] B. De Man, „Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography“, Diss., Katholieke Universiteit Leuven, Löwen, Belgien, 2001.
- [6] T. M. Buzug, *Computed Tomography*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-39408-2.
- [7] H. E. Johns, *Physics of Radiology*. Springfield, IL: Charles River Media, 1983.
- [8] M. U. Sedlmair, „Dual Energy CT: Physikalische Modelle und Anwendungen“, Diss., Ludwig-Maximilians-Universität München, München, Deutschland, 2009.
- [9] J. M. Boone, T. R. Fewell und R. J. Jennings, „Molybdenum, rhodium, and tungsten anode spectral models using interpolating polynomials with application to mammography“, *Medical Physics*, Jg. 24, Nr. 12, S. 1863–1874, 1997. DOI: 10.1118/1.598100.
- [10] S. Kappler, D. Niederlöhner, K. Stierstorfer und T. Flohr, „Contrast-enhancement, image noise, and dual-energy simulations for quantum-counting clinical CT“, in *SPIE Medical Imaging*, International Society for Optics und Photonics, Bd. 7622, 2010, 76223H.
- [11] K. D. Toennies, *Guide to Medical Image Analysis*. London: Springer-Verlag, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4471-2751-2.
- [12] A. Beer, „Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbigen Flüssigkeiten“, *Annalen der Physik*, Jg. 162, Nr. 5, S. 78–88, 1852.
- [13] J. H. Lambert, *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*. Augsburg: Klett, 1760.

## Referenzen

- [14] Chye Hwang Yan, R. Whalen, G. Beaupre, S. Yen und S. Napel, „Reconstruction algorithm for polychromatic CT imaging: Application to beam hardening correction“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 19, Nr. 1, S. 1–11, 2000. DOI: 10.1109/42.832955.
- [15] I. Elbakri und J. Fessler, „Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 21, Nr. 2, S. 89–99, 2002. DOI: 10.1109/42.993128.
- [16] S. Ulzheimer und T. Flohr, „Multislice CT: Current Technology and Future Developments“, in *Multislice CT*, Springer-Verlag, 2009, S. 3–23. DOI: 10.1007/978-3-540-33125-4\_1.
- [17] T. Weidinger, „Computertomographie mit quantenzählenden Detektoren“, Diss., Universität zu Lübeck, Lübeck, Deutschland, 2014.
- [18] M. M. Lell, J. E. Wildberger, H. Alkadhi, J. Damilakis und M. Kachelriess, „Evolution in Computed Tomography: The Battle for Speed and Dose“, *Investigative Radiology*, Jg. 50, Nr. 9, S. 629–44, 2015. DOI: 10.1097/RLI.000000000000172.
- [19] J. P. Schlomka, E. Roessl, R. Dorscheid, S. Dill, G. Martens, T. Istel, C. Bäumer, C. Herrmann, R. Steadman, G. Zeitler, A. Livne und R. Proksa, „Experimental feasibility of multi-energy photon-counting K-edge imaging in pre-clinical computed tomography“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 53, Nr. 15, S. 4031–4047, 2008. DOI: 10.1088/0031-9155/53/15/002.
- [20] K. Taguchi und J. S. Iwanczyk, „Vision 20/20: Single photon counting X-ray detectors in medical imaging“, *Medical Physics*, Jg. 40, Nr. 10, S. 100 901, 2013. DOI: 10.1118/1.4820371.
- [21] J. Barfett, J. Fierstra, D. Mikulis und T. Krings, „Blood velocity calculated from volumetric dynamic computed tomography angiography“, *Investigative Radiology*, Jg. 45, Nr. 12, S. 778–781, 2010. DOI: 10.1097/rli.0b013e3181ea3588.
- [22] F. R. de Graaf, J. D. Schuijf, J. E. van Velzen, M. J. Boogers, L. J. Kroft, A. de Roos, J. H. Reiber, A. Sieders, F. Spanó, J. W. Jukema, M. J. Schalij, E. E. van der Wall und J. J. Bax, „Diagnostic Accuracy of 320-Row Multidetector Computed Tomography Coronary Angiography to Noninvasively Assess In-Stent Restenosis“, *Investigative Radiology*, Jg. 45, Nr. 6, S. 331–340, 2010. DOI: 10.1097/rli.0b013e3181dfa312.

- [23] J. Neubauer, J. M. Voigt, H. Lang, C. Scheuer, S. M. Goerke, M. Langer, M. Fiebich und E. Kotter, „Comparing the Image Quality of a Mobile Flat-Panel Computed Tomography and a Multidetector Computed Tomography“, *Investigative Radiology*, Jg. 49, Nr. 7, S. 491–497, 2014. DOI: 10.1097/rli.000000000000042.
- [24] B. Li, T. L. Toth, J. Hsieh und X. Tang, „Simulation and analysis of image quality impacts from single source, ultra-wide coverage CT scanner“, *Journal of X-Ray Science and Technology*, Jg. 20, Nr. 4, S. 395–404, 2012. DOI: 10.3233/XST-2012-00347.
- [25] H. Hu, H. D. He, W. D. Foley und S. H. Fox, „Four multidetector-row helical CT: Image quality and volume coverage speed“, *Radiology*, Jg. 215, Nr. 1, S. 55–62, 2000. DOI: 10.1148/radiology.215.1.r00ap3755.
- [26] J. Thibault, K. Sauer, C. Bouman und J. Hsieh, „High quality iterative image reconstruction for multi-slice helical CT“, in *Proceedings of the International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2003.
- [27] J. Hsieh, „A general approach to the reconstruction of X-ray helical computed tomography“, *Medical Physics*, Jg. 23, Nr. 2, S. 221–229, 1996. DOI: 10.1118/1.597706.
- [28] J. Hsieh, „Multislice CT“, in *Computed Tomography, Second Edition*, SPIE, 2009, S. 375–432. DOI: 10.1117/3.817303.ch10.
- [29] J. Hsieh, B. Nett, Z. Yu, K. Sauer, J.-B. Thibault und C. A. Bouman, „Recent Advances in CT Image Reconstruction“, *Current Radiology Reports*, Jg. 1, Nr. 1, S. 39–51, 2013. DOI: 10.1007/s40134-012-0003-7.
- [30] T. Kimpe und T. Tuytschaever, „Increasing the number of gray shades in medical display systems - How much is enough?“, *Journal of Digital Imaging*, Jg. 20, Nr. 4, S. 422–432, 2007. DOI: 10.1007/s10278-006-1052-3.
- [31] A. Faridani und E. L. Ritman, „High-resolution computed tomography from efficient sampling“, *Inverse Problems*, Jg. 16, Nr. 3, S. 635–650, 2000. DOI: 10.1088/0266-5611/16/3/307.
- [32] A. Faridani, „Introduction to the mathematics of computed tomography“, *Inside Out: Inverse Problems and Applications*, Jg. 47, S. 1–46, 2003.

## Referenzen

- [33] H. Stark, J. W. Woods, I. Paul und R. Hingorani, „Direct Fourier Reconstruction in Computer Tomography“, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Jg. 29, Nr. 2, S. 237–245, 1981. DOI: 10.1109/TASSP.1981.1163528.
- [34] D. Potts und G. Steidl, „Fast Summation at Nonequispaced Knots by NFFT“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Jg. 24, Nr. 6, S. 2013–2037, 2003. DOI: 10.1137/s1064827502400984.
- [35] J. Keiner, S. Kunis und D. Potts, „Using NFFT 3—A Software Library for Various Nonequispaced Fast Fourier Transforms“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 36, Nr. 4, S. 1–30, 2009. DOI: 10.1145/1555386.1555388.
- [36] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Elad und M. Israeli, „Fast and accurate Polar Fourier transform“, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Jg. 21, Nr. 2, S. 145–167, 2006. DOI: 10.1016/j.acha.2005.11.003.
- [37] A. Averbuch, G. Shabat und Y. Shkolnisky, „Direct Inversion of the Three-Dimensional Pseudo-polar Fourier Transform“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Jg. 38, Nr. 2, A1100–A1120, 2016. DOI: 10.1137/15m1031916.
- [38] H. Guan und R. Gordon, „Computed tomography using algebraic reconstruction techniques (ARTs) with different projection access schemes: A comparison study under practical situations“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 41, Nr. 9, S. 1727–1743, 1996. DOI: 10.1088/0031-9155/41/9/012.
- [39] J. Hsieh, „Adaptive streak artifact reduction in computed tomography resulting from excessive X-ray photon noise“, *Medical Physics*, Jg. 25, Nr. 11, S. 2139–2147, 1998. DOI: 10.1118/1.598410.
- [40] P. P. Dendy, B. Heaton und J. Cameron, „Physics for Diagnostic Radiology“, *Medical Physics*, Jg. 28, Nr. 3, S. 404–405, 2001. DOI: 10.1118/1.1350686.
- [41] G. H. Glover, „Compton scatter effects in CT reconstructions“, *Medical Physics*, Jg. 9, Nr. 6, S. 860–867, 1982. DOI: 10.1118/1.595197.
- [42] L. M. Zatz und R. E. Alvarez, „An Inaccuracy in Computed Tomography: The Energy Dependence of CT Values“, *Radiology*, Jg. 124, Nr. 1, S. 91–97, 1977. DOI: 10.1148/124.1.91.
- [43] R. A. Brooks und G. D. Chiro, „Beam hardening in X-ray reconstructive tomography“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 21, Nr. 3, S. 390–398, 1976. DOI: 10.1088/0031-9155/21/3/004.

- [44] A. J. Duerinckx und A. Macovski, „Polychromatic Streak Artifacts in Computed Tomography Images“, *Journal of Computer Assisted Tomography*, Jg. 2, Nr. 4, S. 481–487, 1978. DOI: 10.1097/00004728-197809000-00020.
- [45] M. Gado und M. Phelps, „The Peripheral Zone of Increased Density in Cranial Computed Tomography“, *Radiology*, Jg. 117, Nr. 1, S. 71–74, 1975. DOI: 10.1148/117.1.71.
- [46] G. D. Chiro, R. A. Brooks, L. Dubal und E. Chew, „The Apical Artifact“, *Journal of Computer Assisted Tomography*, Jg. 2, Nr. 1, S. 65–70, 1978. DOI: 10.1097/00004728-197801000-00010.
- [47] J. Hsieh, R. C. Molthen, C. A. Dawson und R. H. Johnson, „An iterative approach to the beam hardening correction in cone beam CT“, *Medical Physics*, Jg. 27, Nr. 1, S. 23–29, 2000. DOI: 10.1118/1.598853.
- [48] T. Trabold, M. Buchgeister, A. Küttner, M. Heuschmid, A. F. Kopp, S. Schröder und C. D. Claussen, „Estimation of Radiation Exposure in 16-Detector Row Computed Tomography of the Heart with Retrospective ECG-gating“, *RöFo - Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen und der bildgebenden Verfahren*, Jg. 175, Nr. 8, S. 1051–1055, 2003. DOI: 10.1055/s-2003-40926.
- [49] L. Husmann, I. Valenta, O. Gaemperli, O. Adda, V. Treyer, C. A. Wyss, P. Veit-Haibach, F. Tatsugami, G. K. von Schulthess und P. A. Kaufmann, „Feasibility of low-dose coronary CT angiography: first experience with prospective ECG-gating“, *European Heart Journal*, Jg. 29, Nr. 2, S. 191–197, 2007. DOI: 10.1093/eurheartj/ehm613.
- [50] T. F. Jakobs, C. R. Becker, B. Ohnesorge, T. Flohr, C. Suess, U. J. Schoepf und M. F. Reiser, „Multislice helical CT of the heart with retrospective ECG gating: Reduction of radiation exposure by ECG-controlled tube current modulation“, *European Radiology*, Jg. 12, Nr. 5, S. 1081–1086, 2002. DOI: 10.1007/s00330-001-1278-x.
- [51] C. R. Becker, A. Knez, B. Ohnesorge, U. J. Schoepf und M. F. Reiser, „Imaging of Noncalcified Coronary Plaques Using Helical CT with Retrospective ECG Gating“, *American Journal of Roentgenology*, Jg. 175, Nr. 2, S. 423–424, 2000. DOI: 10.2214/ajr.175.2.1750423.

## Referenzen

- [52] M. Grass, R. Manzke, T. Nielsen, P. Koken, R. Proksa, M. Natanzon und G. Shechter, „Helical cardiac cone beam reconstruction using retrospective ECG gating“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 48, Nr. 18, S. 3069–3084, 2003. DOI: 10.1088/0031-9155/48/18/308.
- [53] H. Nyquist, „Certain Topics in Telegraph Transmission Theory“, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, Jg. 47, Nr. 2, S. 617–644, 1928. DOI: 10.1109/t-aiee.1928.5055024.
- [54] C. R. Crawford und A. C. Kak, „Aliasing artifacts in computerized tomography“, *Applied Optics*, Jg. 18, Nr. 21, S. 3704–3711, 1979. DOI: 10.1364/AO.18.003704.
- [55] M. Kachelriess, M. Knaup, C. Penssel und W. Kalender, „Flying focal spot (FFS) in cone-beam CT“, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, Jg. 53, Nr. 3, S. 1238–1247, 2006. DOI: 10.1109/tns.2006.874076.
- [56] J. F. Barrett und N. Keat, „Artifacts in CT: Recognition and Avoidance“, *RadioGraphics*, Jg. 24, Nr. 6, S. 1679–1691, 2004. DOI: 10.1148/rg.246045065.
- [57] E. T. Quinto, „Exterior and limited-angle tomography in non-destructive evaluation“, *Inverse Problems*, Jg. 14, Nr. 2, S. 339–353, 1998. DOI: 10.1088/0266-5611/14/2/009.
- [58] E. T. Quinto, „Tomographic reconstructions from incomplete data-numerical inversion of the exterior Radon transform“, *Inverse Problems*, Jg. 4, Nr. 3, S. 867–876, 1988. DOI: 10.1088/0266-5611/4/3/019.
- [59] E. T. Quinto und H. Rullgård, „Local singularity reconstruction from integrals over curves in  $R^3$ “, *Inverse Problems and Imaging*, Jg. 7, Nr. 2, S. 585–609, 2013. DOI: 10.3934/ipi.2013.7.585.
- [60] M. J. Yaffe und J. G. Mainprize, „Digital Tomosynthesis“, *Radiologic Clinics of North America*, Jg. 52, Nr. 3, S. 489–497, 2014. DOI: 10.1016/j.rcl.2014.01.003.
- [61] J. T. Dobbins und D. J. Godfrey, „Digital X-ray tomosynthesis: Current state of the art and clinical potential“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 48, Nr. 19, R65–R106, 2003. DOI: 10.1088/0031-9155/48/19/r01.

- [62] L. T. Niklason, B. T. Christian, L. E. Niklason, D. B. Kopans, D. E. Castleberry, B. H. Opsahl-Ong, C. E. Landberg, P. J. Slanetz, A. A. Giardino, R. Moore, D. Albagli, M. C. DeJule, P. F. Fitzgerald, D. F. Fobare, B. W. Giambattista, R. F. Kwasnick, J. Liu, S. J. Lubowski, G. E. Possin, J. F. Richotte, C. Y. Wei und R. F. Wirth, „Digital tomosynthesis in breast imaging“, *Radiology*, Jg. 205, Nr. 2, S. 399–406, 1997. DOI: 10.1148/radiology.205.2.9356620.
- [63] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Mineola, New York, USA: Diver Publications, 2003.
- [64] A. Rieder, *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2003. DOI: 10.1007/978-3-322-80234-7.
- [65] J. Nocedal und S. Wright, *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006. DOI: 10.1007/978-0-387-40065-5.
- [66] W. Alt, *Nichtlineare Optimierung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [67] A. Mang, S. Becker, A. Toma, T. Polzin, T. A. Schütz und T. M. Buzug, „Modellierung tumorinduzierter Gewebedeformation als Optimierungsproblem mit weicher Nebenbedingung“, in *Bildverarbeitung für die Medizin 2011*, 2011, S. 294–298. DOI: 10.1007/978-3-642-19335-4\_61.
- [68] P. E. Gill, W. Murray und M. H. Wright, *Practical Optimization*. San Diego, California, USA: Emerald Group Publishing Limited, 1981.
- [69] C. G. Broyden, „The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations“, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Jg. 6, Nr. 1, S. 76–90, 1970. DOI: 10.1093/imamat/6.1.76.
- [70] R. Fletcher, „A new approach to variable metric algorithms“, *The Computer Journal*, Jg. 13, Nr. 3, S. 317–322, 1970. DOI: 10.1093/comjnl/13.3.317.
- [71] D. Goldfarb, „A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means“, *Mathematics of Computation*, Jg. 24, Nr. 109, S. 23, 1970. DOI: 10.2307/2004873.
- [72] D. F. Shanno, „Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization“, *Mathematics of Computation*, Jg. 24, Nr. 111, S. 647–647, 1970. DOI: 10.1090/s0025-5718-1970-0274029-x.

## Referenzen

- [73] R. Fletcher und M. J. D. Powell, „A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization“, *The Computer Journal*, Jg. 6, Nr. 2, S. 163–168, 1963. DOI: 10.1093/comjnl/6.2.163.
- [74] A. Mang, *Methoden zur numerischen Simulation der Progression von Gliomen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05246-1.
- [75] J. J. Moré und D. J. Thuente, „Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 20, Nr. 3, S. 286–307, 1994. DOI: 10.1145/192115.192132.
- [76] J. Nocedal, „Updating quasi-Newton matrices with limited storage“, *Mathematics of Computation*, Jg. 35, Nr. 151, S. 773–773, 1980. DOI: 10.1090/S0025-5718-1980-0572855-7.
- [77] D. C. Liu und J. Nocedal, „On the limited memory BFGS method for large scale optimization“, *Mathematical Programming*, Jg. 45, Nr. 1-3, S. 503–528, 1989. DOI: 10.1007/bf01589116.
- [78] R. H. Byrd, J. Nocedal und R. B. Schnabel, „Representations of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods“, *Mathematical Programming*, Jg. 63, Nr. 1-3, S. 129–156, 1994. DOI: 10.1007/BF01582063.
- [79] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu und J. Nocedal, „Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 23, Nr. 4, S. 550–560, 1997. DOI: 10.1145/279232.279236.
- [80] J. L. Morales und J. Nocedal, „Remark on “algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization”“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 38, Nr. 1, S. 1–4, 2011. DOI: 10.1145/2049662.2049669.
- [81] J. Nocedal, „Theory of algorithms for unconstrained optimization“, *Acta Numerica*, Jg. 1, S. 199–242, 1992. DOI: 10.1017/s0962492900002270.
- [82] J. L. Nazareth, „Conjugate Gradient Methods less Dependent on Conjugacy“, *SIAM Review*, Jg. 28, Nr. 4, S. 501–511, 1986. DOI: 10.1137/1028155.
- [83] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal und C. Zhu, „A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Jg. 16, Nr. 5, S. 1190–1208, 1995. DOI: 10.1137/0916069.

- [84] R. H. Byrd, S. L. Hansen, J. Nocedal und Y. Singer, „A Stochastic Quasi-Newton Method for Large-Scale Optimization“, *SIAM Journal on Optimization*, Jg. 26, Nr. 2, S. 1008–1031, 2016. DOI: 10.1137/140954362.
- [85] M. P. Friedlander und M. A. Saunders, „A Globally Convergent Linearly Constrained Lagrangian Method for Nonlinear Optimization“, *SIAM Journal on Optimization*, Jg. 15, Nr. 3, S. 863–897, 2005. DOI: 10.1137/s1052623402419789.
- [86] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Amsterdam: Elsevier, 1982. DOI: 10.1016/c2013-0-10366-2.
- [87] A. R. Conn, N. Gould und P. L. Toint, „Numerical experiments with the LANCELOT package (release A) for large-scale nonlinear optimization“, *Mathematical Programming*, Jg. 73, Nr. 1, S. 73–110, 1996. DOI: 10.1007/bf02592099.
- [88] A. R. Conn, N. I. M. Gould und P. Toint, „A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds“, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Jg. 28, Nr. 2, S. 545–572, 1991. DOI: 10.1137/0728030.
- [89] A. R. Conn, N. Gould, A. Sartenaer und P. L. Toint, „Convergence Properties of an Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with a Combination of General Equality and Linear Constraints“, *SIAM Journal on Optimization*, Jg. 6, Nr. 3, S. 674–703, 1996. DOI: 10.1137/s1052623493251463.
- [90] G. L. Zeng, *Medical Image Reconstruction*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-05368-9.
- [91] E. Ziegel, W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky und W. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 4. JSTOR, 1987, Bd. 29, S. 501. DOI: 10.2307/1269484.
- [92] E. Mumcuoglu, R. Leahy, S. Cherry und Z. Zhou, „Fast gradient-based methods for Bayesian reconstruction of transmission and emission PET images“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 13, Nr. 4, S. 687–701, 1994. DOI: 10.1109/42.363099.
- [93] L. A. Shepp und Y. Vardi, „Maximum likelihood reconstruction for emission tomography“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 1, Nr. 2, S. 113–122, 1982.

## Referenzen

- [94] A. J. Rockmore und A. Macovski, „A Maximum Likelihood Approach to Transmission Image Reconstruction from Projections“, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, Jg. 24, Nr. 3, S. 1929–1935, 1977. DOI: 10.1109/tns.1977.4329128.
- [95] K. Lange, R. Carson et al., „EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography“, *Journal of Computed Assisted Tomography*, Jg. 8, Nr. 2, S. 306–316, 1984.
- [96] H. R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*. Wiesbaden, Deutschland: Vieweg+Teubner Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-3-8348-8166-3.
- [97] J. W. Stayman und J. Fessler, „Nonnegative definite quadratic penalty design for penalized-likelihood reconstruction“, in *2001 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record (Cat. No.01CH37310)*, IEEE. DOI: 10.1109/nssmic.2001.1009735.
- [98] T. M. Peters, „Algorithms for Fast Back- and Re-Projection in Computed Tomography“, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, Jg. 28, Nr. 4, S. 3641–3647, 1981. DOI: 10.1109/tns.1981.4331812.
- [99] G. Harauz und F. P. Ottensmeyer, „Interpolation in computing forward projections in direct three-dimensional reconstruction“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 28, Nr. 12, S. 1419–1427, 1983. DOI: 10.1088/0031-9155/28/12/007.
- [100] P. M. Joseph, „An Improved Algorithm for Reprojecting Rays through Pixel Images“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 1, Nr. 3, S. 192–196, 1982. DOI: 10.1109/tmi.1982.4307572.
- [101] R. L. Siddon, „Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array“, *Medical Physics*, Jg. 12, Nr. 2, S. 252–255, 1985. DOI: 10.1118/1.595715.
- [102] G. T. Gullberg, R. H. Huesman, J. A. Malko, N. J. Pelc und T. F. Budinger, „An attenuated projector-backprojector for iterative SPECT reconstruction“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 30, Nr. 8, S. 799–816, 1985. DOI: 10.1088/0031-9155/30/8/004.
- [103] B. D. Man und S. Basu, „Distance-driven projection and backprojection in three dimensions“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 49, Nr. 11, S. 2463–2475, 2004. DOI: 10.1088/0031-9155/49/11/024.

- [104] Y. Long, J. A. Fessler und J. M. Balter, „3D Forward and Back-Projection for X-Ray CT Using Separable Footprints“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 29, Nr. 11, S. 1839–1850, 2010. DOI: 10.1109/tmi.2010.2050898.
- [105] G. Zeng und G. Gullberg, „Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 19, Nr. 5, S. 548–555, 2000. DOI: 10.1109/42.870265.
- [106] R. Guedouar und B. Zarrad, „A comparative study between matched and mismatched projection/back projection pairs used with ASIRT reconstruction method“, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Jg. 619, Nr. 1-3, S. 225–229, 2010. DOI: 10.1016/j.nima.2010.02.077.
- [107] G.-H. Chen, J. Tang und S. Leng, „Prior image constrained compressed sensing (PICCS): A method to accurately reconstruct dynamic CT images from highly undersampled projection data sets“, *Medical Physics*, Jg. 35, Nr. 2, S. 660–663, 2008. DOI: 10.1118/1.2836423.
- [108] J. W. Stayman, Y. Otake, J. L. Prince, A. J. Khanna und J. H. Siewerdsen, „Model-Based Tomographic Reconstruction of Objects Containing Known Components“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 31, Nr. 10, S. 1837–1848, 2012. DOI: 10.1109/tmi.2012.2199763.
- [109] H. Dang, A. S. Wang, Z. Zhao, M. S. Sussman, J. H. Siewerdsen und J. W. Stayman, „Joint Estimation of Deformation and Penalized-Likelihood CT Reconstruction Using Previously Acquired Images“, in *Proceedings of the International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2013, S. 424–427.
- [110] H. Dang, A. S. Wang, M. S. Sussman, J. H. Siewerdsen und J. W. Stayman, „dPIR-PL: A joint estimation framework for deformable registration and penalized-likelihood CT image reconstruction using prior images“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 59, Nr. 17, S. 4799–4826, 2014. DOI: 10.1088/0031-9155/59/17/4799.
- [111] B. Fischer und J. Modersitzki, „Ill-posed medicine—An introduction to image registration“, *Inverse Problems*, Jg. 24, Nr. 3, S. 034008, 2008. DOI: 10.1088/0266-5611/24/3/034008.

## Referenzen

- [112] D. L. G. Hill, P. G. Batchelor, M. Holden und D. J. Hawkes, „Medical image registration“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 46, Nr. 3, R1–R45, 2001. DOI: 10.1088/0031-9155/46/3/201.
- [113] W. Crum, L. Griffin, D. Hill und D. Hawkes, „Zen and the art of medical image registration: correspondence, homology, and quality“, *NeuroImage*, Jg. 20, Nr. 3, S. 1425–1437, 2003. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2003.07.014.
- [114] J. Hajnal, D. Hawkes und D. Hill, Hrsg., *Medical Image Registration*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2001. DOI: 10.1201/9781420042474.
- [115] F. Maes, A. Collignon, D. Vandermeulen, G. Marchal und P. Suetens, „Multimodality image registration by maximization of mutual information“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 16, Nr. 2, S. 187–198, 1997. DOI: 10.1109/42.563664.
- [116] A. Mang, J. A. Schnabel, W. R. Crum, M. Modat, O. Camara-Rey, C. Palm, G. B. Caseiras, H. R. Jäger, S. Ourselin, T. M. Buzug und D. J. Hawkes, „Consistency of parametric registration in serial MRI studies of brain tumor progression“, *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, Jg. 3, Nr. 3-4, S. 201–211, 2008. DOI: 10.1007/s11548-008-0234-5.
- [117] J. Modersitzki, *Numerical Methods for Image Registration*. Oxford, Vereinigtes Königreich: Oxford University Press, 2003. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198528418.001.0001.
- [118] W. R. Crum, T. Hartkens und D. L. G. Hill, „Non-rigid image registration: theory and practice“, *The British Journal of Radiology*, Jg. 77, Nr. suppl\_2, S140–S153, 2004. DOI: 10.1259/bjr/25329214.
- [119] M. Holden, „A Review of Geometric Transformations for Nonrigid Body Registration“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 27, Nr. 1, S. 111–128, 2008. DOI: 10.1109/tmi.2007.904691.
- [120] J. Modersitzki, *FAIR: flexible algorithms for image registration*. Philadelphia, Pennsylvania, USA: Society for Industrial und Applied Mathematics, 2009. DOI: 10.1137/1.9780898718843.
- [121] J. Modersitzki und E. Haber, „Intensity Gradient Based Registration and Fusion of Multi-modal Images“, *Methods of Information in Medicine*, Jg. 46, Nr. 03, S. 292–299, 2007. DOI: 10.1160/me9046.

- [122] H. Livyatan, Z. Yaniv und L. Joskowicz, „Gradient-based 2-D/3-D rigid registration of fluoroscopic X-ray to CT“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 22, Nr. 11, S. 1395–1406, 2003. DOI: 10.1109/tmi.2003.819288.
- [123] F. W. Wehrli, H. K. Song, P. K. Saha und A. C. Wright, „Quantitative MRI for the assessment of bone structure and function“, *NMR in Biomedicine*, Jg. 19, Nr. 7, S. 731–764, 2006. DOI: 10.1002/nbm.1066.
- [124] W. A. Kalender, R. Hebel und J. Ebersberger, „Reduction of CT artifacts caused by metallic implants“, *Radiology*, Jg. 164, Nr. 2, S. 576–577, 1987. DOI: 10.1148/radiology.164.2.3602406.
- [125] E. T. Quinto, „Singularities of the X-Ray Transform and Limited Data Tomography in R<sup>2</sup> and R<sup>3</sup>“, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Jg. 24, Nr. 5, S. 1215–1225, 1993. DOI: 10.1137/0524069.
- [126] S. J. LaRoque, E. Y. Sidky und X. Pan, „Accurate image reconstruction from few-view and limited-angle data in diffraction tomography“, *Journal of the Optical Society of America A*, Jg. 25, Nr. 7, S. 1772, 2008. DOI: 10.1364/josaa.25.001772.
- [127] A. K. Louis und A. Rieder, „Incomplete data problems in X-ray computerized tomography“, *Numerische Mathematik*, Jg. 56, Nr. 4, S. 371–383, 1989. DOI: 10.1007/bf01396611.
- [128] V. Aurich und J. Weule, „Non-Linear Gaussian Filters Performing Edge Preserving Diffusion“, in *Informatik aktuell*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, S. 538–545. DOI: 10.1007/978-3-642-79980-8\_63.
- [129] C. Tomasi und R. Manduchi, „Bilateral filtering for gray and color images“, in *Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No.98CH36271)*, Narosa Publishing House. DOI: 10.1109/iccv.1998.710815.
- [130] S. Paris, P. Kornprobst, J. Tumblin und F. Durand, „Bilateral Filtering: Theory and Applications“, *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, Jg. 4, Nr. 1, S. 1–75, 2008. DOI: 10.1561/06000000020.
- [131] P. Bannas, Y. Li, U. Motosugi, K. Li, M. Lubner, G.-H. Chen und P. J. Pickhardt, „Prior Image Constrained Compressed Sensing Metal Artifact Reduction (PICCS-MAR): 2D and 3D Image Quality Improvement with Hip Prostheses at CT Colonography“, *European Radiology*, Jg. 26, Nr. 7, S. 2039–2046, 2015. DOI: 10.1007/s00330-015-4044-1.

## Referenzen

- [132] T. Heußner, M. Brehm, L. Ritschl, S. Sawall und M. Kachelrieß, „Prior-based artifact correction (PBAC) in computed tomography“, *Medical Physics*, Jg. 41, Nr. 2, S. 021 906, 2014. DOI: 10 . 1118/1 . 4851536.
- [133] K. Lange, „Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 9, Nr. 4, S. 439–446, 1990. DOI: 10 . 1109/42 . 61759.
- [134] T. Hebert und R. Leahy, „A generalized EM algorithm for 3-D Bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 8, Nr. 2, S. 194–202, 1989. DOI: 10 . 1109/42 . 24868.
- [135] D. Yu und J. Fessler, „Edge-preserving tomographic reconstruction with nonlocal regularization“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 21, Nr. 2, S. 159–173, 2002. DOI: 10 . 1109/42 . 993134.
- [136] Z. Tian, X. Jia, K. Yuan, T. Pan und S. B. Jiang, „Low-dose CT reconstruction via edge-preserving total variation regularization“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 56, Nr. 18, S. 5949–5967, 2011. DOI: 10 . 1088/0031–9155/56/18/011.
- [137] E. Y. Sidky und X. Pan, „Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 53, Nr. 17, S. 4777–4807, 2008. DOI: 10 . 1088/0031–9155/53/17/021.
- [138] Y. Liu, Z. Liang, J. Ma, H. Lu, K. Wang, H. Zhang und W. Moore, „Total Variation-Stokes Strategy for Sparse-View X-ray CT Image Reconstruction“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 33, Nr. 3, S. 749–763, 2014. DOI: 10 . 1109/tmi . 2013 . 2295738.
- [139] L. Ritschl, F. Bergner, C. Fleischmann und M. Kachelrieß, „Improved total variation-based CT image reconstruction applied to clinical data“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 56, Nr. 6, S. 1545–1561, 2011. DOI: 10 . 1088/0031–9155/56/6/003.
- [140] W. Yu, L. Zeng und B. Liu, „Improved total variation-based image reconstruction algorithm for linear scan cone-beam computed tomography“, *Journal of Electronic Imaging*, Jg. 22, Nr. 3, S. 033 015, 2013. DOI: 10 . 1117/1 . jei . 22 . 3 . 033015.

- [141] M. Yan und L. A. Vese, „Expectation maximization and total variation-based model for computed tomography reconstruction from undersampled data“, in *SPIE Medical Imaging*, N. J. Pelc, E. Samei und R. M. Nishikawa, Hrsg., International Society for Optics und Photonics, 2011. DOI: 10.1117/12.878238.
- [142] J. Huang, Y. Zhang, J. Ma, D. Zeng, Z. Bian, S. Niu, Q. Feng, Z. Liang und W. Chen, „Iterative Image Reconstruction for Sparse-View CT Using Normal-Dose Image Induced Total Variation Prior“, *PLoS ONE*, Jg. 8, Nr. 11, 2013. DOI: 10.1371/journal.pone.0079709.
- [143] J. W. Stayman, H. Dang, Y. Ding und J. H. Siewerdsen, „PIRPLE: a penalized-likelihood framework for incorporation of prior images in CT reconstruction“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 58, Nr. 21, S. 7563–7582, 2013. DOI: 10.1088/0031-9155/58/21/7563.
- [144] M. R. Paudel, M. Mackenzie, B. G. Fallone und S. Rathee, „Clinical Evaluation of Normalized Metal Artifact Reduction in kVCT Using MVCT Prior Images (MVCT-NMAR) for Radiation Therapy Treatment Planning“, *International Journal of Radiation Oncology Biology Physics*, Jg. 89, Nr. 3, S. 682–689, 2014. DOI: 10.1016/j.ijrobp.2014.02.040.
- [145] J. W. Stayman, W. Zbijewski, Y. Otake, A. Uneri, S. Schafer, J. Lee, J. L. Prince und J. H. Siewerdsen, „Penalized-likelihood reconstruction for sparse data acquisitions with unregistered prior images and compressed sensing penalties“, in *SPIE Medical Imaging*, International Society for Optics und Photonics, 2011. DOI: 10.1117/12.878075.
- [146] E. Meyer, R. Raupach, M. Lell, B. Schmidt und M. Kachelrieß, „Normalized metal artifact reduction (NMAR) in computed tomography“, *Medical Physics*, Jg. 37, Nr. 10, S. 5482–5493, 2010. DOI: 10.1118/1.3484090.
- [147] E. Meyer, F. Bergner, R. Raupach, T. Flohr und M. Kachelries, „Normalized metal artifact reduction (NMAR) in computed tomography“, in *2009 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC)*, IEEE, 2009. DOI: 10.1109/nssmic.2009.5401721.
- [148] W. P. Segars, M. Mahesh, T. J. Beck, E. C. Frey und B. M. W. Tsui, „Realistic CT simulation using the 4D XCAT phantom“, *Medical Physics*, Jg. 35, Nr. 8, S. 3800–3808, 2008. DOI: 10.1118/1.2955743.

## Referenzen

- [149] W. P. Segars und B. M. W. Tsui, „MCAT to XCAT: The Evolution of 4-D Computerized Phantoms for Imaging Research“, *Proceedings of the IEEE*, Jg. 97, Nr. 12, S. 1954–1968, 2009. DOI: 10.1109/jproc.2009.2022417.
- [150] J. L. Hintze und R. D. Nelson, „Violin Plots: A Box Plot-Density Trace Synergism“, *The American Statistician*, Jg. 52, Nr. 2, S. 181–184, 1998. DOI: 10.1080/00031305.1998.10480559.
- [151] D. Snyder, J. O’Sullivan, B. Whiting, R. Murphy, J. Benac, J. Cataldo, D. Polittle und J. Williamson, „Deblurring subject to nonnegativity constraints when known functions are present with application to object-constrained computerized tomography“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 20, Nr. 10, S. 1009–1017, 2001. DOI: 10.1109/42.959298.
- [152] R. Murphy, S. Yan, J. O’Sullivan, D. Snyder, B. Whiting, D. Polittle, G. Lasio und J. Williamson, „Pose estimation of known objects during transmission tomographic image reconstruction“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 25, Nr. 10, S. 1392–1404, 2006. DOI: 10.1109/tmi.2006.880673.
- [153] J. F. Williamson, B. R. Whiting, J. Benac, R. J. Murphy, G. J. Blaine, J. A. O’Sullivan, D. G. Polittle und D. L. Snyder, „Prospects for quantitative computed tomography imaging in the presence of foreign metal bodies using statistical image reconstruction“, *Medical Physics*, Jg. 29, Nr. 10, S. 2404–2418, 2002. DOI: 10.1118/1.1509443.
- [154] J. W. Stayman, Y. Otake, S. Schafer, A. J. Khanna, J. L. Prince und J. H. Siewerdsen, „Model-based reconstruction of objects with inexactly known components“, in *SPIE Medical Imaging*, International Society for Optics und Photonics, 2012. DOI: 10.1117/12.911202.
- [155] H. Erdogan und J. Fessler, „Monotonic algorithms for transmission tomography“, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Jg. 18, Nr. 9, S. 801–814, 1999. DOI: 10.1109/42.802758.
- [156] J. Markman, J. F. Williamson, J. F. Dempsey und D. A. Low, „On the validity of the superposition principle in dose calculations for intracavitary implants with shielded vaginal colpostats“, *Medical Physics*, Jg. 28, Nr. 2, S. 147–155, 2001. DOI: 10.1118/1.1339224.

- [157] F. A. Lerma und J. F. Williamson, „Accurate localization of intracavitary brachytherapy applicators from 3D CT imaging studies“, *Medical Physics*, Jg. 29, Nr. 3, S. 325–333, 2002. DOI: 10.1118/1.1412243.
- [158] J. W. Stayman, H. Dang, Y. Otake, W. Zbijewski, J. Noble, B. Dawant, R. Labadie, J. P. Carey und J. H. Siewerdsen, „Overcoming nonlinear partial volume effects in known-component reconstruction of Cochlear implants“, in *SPIE Medical Imaging*, International Society for Optics und Photonics, 2013. DOI: 10.1117/12.2007945.
- [159] J. W. Stayman, I. Steven Tilley und J. H. Siewerdsen, „Integration of component knowledge in penalized-likelihood reconstruction with morphological and spectral uncertainties“, in *Conference proceedings/International Conference on Image Formation in X-Ray Computed Tomography. International Conference on Image Formation in X-Ray Computed Tomography*, NIH Public Access, Bd. 2014, 2014, S. 111–115.
- [160] J. V. de Weijer und R. V. den Boomgaard, „Local mode filtering“, in *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2001*, IEEE Comput. Soc. DOI: 10.1109/cvpr.2001.990993.
- [161] K. He, J. Sun und X. Tang, „Guided Image Filtering“, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Jg. 35, Nr. 6, S. 1397–1409, 2013. DOI: 10.1109/tpami.2012.213.
- [162] L. Xu, C. Lu, Y. Xu und J. Jia, „Image smoothing via L<sub>0</sub> gradient minimization“, in *Proceedings of the 2011 SIGGRAPH Asia Conference on - SA '11*, ACM Press, 2011. DOI: 10.1145/2024156.2024208.
- [163] T. Qiu, A. Wang, N. Yu und A. Song, „LLSURE: Local Linear SURE-Based Edge-Preserving Image Filtering“, *IEEE Transactions on Image Processing*, Jg. 22, Nr. 1, S. 80–90, 2013. DOI: 10.1109/tip.2012.2214052.
- [164] E. S. L. Gastal und M. M. Oliveira, „Domain transform for edge-aware image and video processing“, *ACM Transactions on Graphics*, Jg. 30, Nr. 4, S. 1, 2011. DOI: 10.1145/2010324.1964964.
- [165] Z. Farbman, R. Fattal, D. Lischinski und R. Szeliski, „Edge-preserving decompositions for multi-scale tone and detail manipulation“, *ACM Transactions on Graphics*, Jg. 27, Nr. 3, S. 1, 2008. DOI: 10.1145/1360612.1360666.

## Referenzen

- [166] A. Katsevich, „Theoretically Exact Filtered Backprojection-Type Inversion Algorithm for Spiral CT“, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Jg. 62, Nr. 6, S. 2012–2026, 2002. DOI: 10.1137/s0036139901387186.
- [167] A. Katsevich, „An improved exact filtered backprojection algorithm for spiral computed tomography“, *Advances in Applied Mathematics*, Jg. 32, Nr. 4, S. 681–697, 2004. DOI: 10.1016/s0196-8858(03)00099-x.
- [168] A. Katsevich, S. Basu und J. Hsieh, „Exact filtered backprojection reconstruction for dynamic pitch helical cone beam computed tomography“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 49, Nr. 14, S. 3089–3103, 2004. DOI: 10.1088/0031-9155/49/14/004.
- [169] A. Katsevich und M. Kapralov, „Theoretically exact FBP reconstruction algorithms for two general classes of curves“, in *Proceedings of the International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2007, S. 80–83.
- [170] E. Fontaine und H.-H. Lee, „Optimizing Katsevich image reconstruction algorithm on multicore processors“, in *2007 International Conference on Parallel and Distributed Systems*, IEEE, 2007. DOI: 10.1109/icpads.2007.4447730.
- [171] J. Tan, H. H. Li, E. Klein, H. Li, P. Parikh und D. Yang, „Physical phantom studies of helical cone-beam CT with exact reconstruction“, *Medical Physics*, Jg. 39, Nr. 8, S. 4695–4704, 2012. DOI: 10.1118/1.4736535.
- [172] F. Noo, J. Pack und D. Heuscher, „Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries“, *Physics in Medicine and Biology*, Jg. 48, Nr. 23, S. 3787–3818, 2003. DOI: 10.1088/0031-9155/48/23/001.
- [173] H. Yu und G. Wang, „Studies on artifacts of the Katsevich algorithm for spiral cone-beam CT“, in *Developments in X-Ray Tomography IV*, SPIE, 2004. DOI: 10.1117/12.559286.
- [174] A. J. Wunderlich, „The Katsevich Inversion Formula for Cone-Beam Computed Tomography“, Diss., Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA, 2006.
- [175] J. Sunnegårdh, „Iterative Filtered Backprojection Methods for Helical Cone-Beam CT“, Diss., Linköping University, Linköping, Schweden, 2009.

- [176] J. Sunnegårdh und P.-E. Danielsson, „Regularized iterative weighted filtered backprojection for helical cone-beam CT“, *Medical Physics*, Jg. 35, Nr. 9, S. 4173–4185, 2008. DOI: 10.1118/1.2966353.



# Maik Stille

## Curriculum Vitae

Friedrich-Wilhelm-Platz 4  
23564 Lübeck  
☎ +49 176 810 626 30  
✉ maik.stille@gmail.com



### PERSÖNLICHE DATEN

Geburtsdatum 20. November 1984  
Geburtsort Greifswald, Deutschland  
Nationalität deutsch  
Familienstand verheiratet, ein Kind

### AUSBILDUNG

1991–1995 **Grundschule**, Dersekow, Deutschland  
1995–2001 **Realschule**, Dersekow, Deutschland  
2001–2004 **Gymnasium**, Greifswald, Deutschland  
Hauptfächer: Mathematik und Datenverarbeitungstechnik  
2005–2011 **Diplom in Informatik**, Universität zu Lübeck, Deutschland  
Nebenfach: Medizininformatik, Abschlussnote: 1,3

#### DIPLOMARBEIT

Titel *Reconstruction of a 3-dimensional brain volume from fluorescent images and its co-registration with magnetic resonance imaging.*  
Betreuung Prof. Dr. Thorsten M. Buzug, Prof. Dr. Michel Modo, Dr. Bill Crum und Prof. Dr. Andreas Mang  
Institute Institut für Medizintechnik, Universität zu Lübeck, und Centre for Neuroimaging Sciences, King's College London  
2011–heute **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**, Institut für Medizintechnik, Universität zu Lübeck, Deutschland

Lübeck, 5. März 2019